

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN †
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

37. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1933

QA1
M88
v.37

5856-4

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN †
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

37. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1933

Inhaltsverzeichnis

Seite

Aumann, G., Eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes auf komplexwertige Funktionen	578
Behnke, H., und P. Thullen, Maximalteiler und Regularitätshüllen. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carathéodory	310
Berwald, L., Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze	61
Berwald, L. Bemerkung zu der Abhandlung: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze. (Diese Zeitschrift 37, 1933, S. 61—76)	768
Bochner, S., Ein Satz von Landau und Ikehara	1
Bochner, S., Simultankonvergenz von mehrfachen Fourierschen Reihen und Integralen	566
Bosanquet, L. S., and M. L. Cartwright, On the Hölder and Cesàro means of an analytic function	170
Bosanquet, L. S., and M. L. Cartwright, Some Tauberian theorems	416
Cartan, E., Observations sur le mémoire précédent	619
Cartwright, M. L., and L. S. Bosanquet, On the Hölder and Cesàro means of an analytic function	170
Cartwright, M. L., and L. S. Bosanquet, Some Tauberian theorems	416
Copeland, A. H., A matrix theory of measurement	542
Deuring, M., Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1	405
Estermann, Th., Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz	556
Fejér, L., Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen	287
Fekete, M., Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. (Dritte Mitteilung)	635
Field, P., On a Rational Plane Curve with an $(n-2)$ -fold Point	402
Haupt, O., Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen	589
Heilbronn, H., und E. Landau, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner	10
Heilbronn, H., und E. Landau, Ein Satz über Potenzreihen	17
Heilbronn, H., und E. Landau, Anwendungen der N. Wiener'schen Methode	18
Heilbronn, H., Zu dem Integralsatz von Cauchy	37
Hölder, E., Über die unbeschränkte Fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit	727
Irrgang, R., Ein singuläres bewegungsinvariantes Variationsproblem	381
Jardetzky, W., Bemerkung über die Figuren zonal rotierender Flüssigkeiten, die von den Gleichgewichtsfiguren abzweigen	603
Jung, H. W. E., Das arithmetische Geschlecht	342
Kaluza, Th., Elementarer Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy	689
Karamata, J., Über die O -Inversionssätze der Limitierungsverfahren	582
Klein, F., Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen	39
Kosambi, D. D., Parallelism and Path-Spaces	608
Landau, E., und H. Heilbronn, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner	10
Landau, E., und H. Heilbronn, Ein Satz über Potenzreihen	17
Landau, E., und H. Heilbronn, Anwendungen der N. Wiener'schen Methode	18
Landau, E., Über einen Satz von Herrn Dieudonné	22
Landau, E., Der Paleysche Satz über Charaktere	28
Landau, E., Über ungerade schlichte Funktionen	33

	Seite
Landau, E., Über eine trigonometrische Ungleichung	36
Landau, E., Bemerkungen zu der M.-P. Geppertschen Abhandlung „Approximative Darstellungen analytischer Funktionen, die durch Dirichletsche Reihen gegeben sind“ im Bd. 35 dieser Zeitschrift, S. 190—211	314
Levi, F., Über die Untergruppen der freien Gruppen. (2. Mitteilung)	90
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Siebente Abhandlung. Beiträge zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. Anfangswertproblem	424
Lösch, F., Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen. II.	77
Lösch, F., Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. III.	85
Maruhn, K., Über den von Laplace postulierten Urkörper	463
Mordell, L. J., The number of solutions of some congruences in two variables	193
Nagy, v. Sz., J., Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex	493
Noether, E., Nichtkommutative Algebra	514
Ostrowski, A., Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen	98
Paley †, R. E. A. C., N. Wiener and A. Zygmund, Notes on random functions	647
Paley †, R. E. A. C., Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff	669
Perron, O., Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper $\mathbb{Q}(i/\sqrt{2})$	749
Pólya, G., Über die Konvergenz von Quadraturverfahren	264
Porusch, J., Die Arithmetik in Zahlkörpern, deren zugehörige Galoissche Körper spezielle metabelsche Gruppen besitzen, auf klassenkörpertheoretischer Grundlage	134
Raff, H., Zur Theorie der linearen Transformationen	572
Ridder, J., Der Perronsche Integralbegriff	161
Rogosinski, W., Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie	210
Salié, H., Über die Verteilung der quadratischen Reste	594
Schauder, J., Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen	623
Schauder, J., Bemerkung zu der Arbeit: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. (Diese Zeitschrift 37, 1933, S. 623—634)	768
Seifert, H., und C. Weber, Die beiden Dodekaederräume	237
Specht, W., Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen	321
Strohhäcker, E., Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen	356
Szegő, G., Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten	674
Thomsen, G., Zum geometrischen Spiegelungskalkül	561
Thullen, P., und H. Behnke, Maximalteiler und Regularitätshüllen. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carathéodory	310
van der Waerden, B. L., Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen	446
Wavre, R., Sur les polydromies de certains potentiels newtoniens prolongés	739
Weber, C., und H. Seifert, Die beiden Dodekaederräume	237
Wiener, N., R. E. A. C. Paley † and A. Zygmund, Notes on random functions	647
Winn, C. E., On Strong Summability for any positive order	481
Wintner, A., Über das Äquivalenzproblem beschränkter hermitescher Formen	254
Wintner, A., Über die Stetigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktion bei inkommensurablen Partialschwingungen	479
Wolibner, W., Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long	698
Zygmund, A., R. E. A. C. Paley † and N. Wiener, Notes on random functions	647

Ein Satz von Landau und Ikehara.

Von

S. Bochner in München.

Von Herrn E. Landau¹⁾ stammt der folgende Satz, welcher der erste tiefliegende Satz aus der Gattung der „Tauberians“ war.

Satz von Landau. *Es sei*

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty$$

und

$$a_n \geq 0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

sei für $\Re(s) > 1$ konvergent.

Falls die Reihensumme $f(s)$ auch auf der Geraden $\Re(s) = 1$ regulär bis auf einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum A im Punkte $s = 1$ ist, und falls gleichmäßig bei absolut wachsendem $t = I(s)$ die Abschätzung

$$(1) \quad f(s) = O(|t|^k)$$

besteht, wo k konstant ist, so ist

$$A = \lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-\eta} \sum_{\lambda_n \leq \eta} a_n.$$

Unlängst haben die Herren S. Ikehara²⁾ und N. Wiener³⁾ die fremdartige Voraussetzung (1) gänzlich streichen können und damit ein bedeutungsvolles Resultat erzielt; ihr Beweis besteht in der Anwendung einer neuen Methode, welche N. Wiener zur Behandlung von Tauberians ersonnen hat. Durch den Einbau des Beweises von Ikehara in die allgemeinen Betrachtungen von Wiener sieht er komplizierter aus, als er in Wirklichkeit ist. Wir wollen diesen Beweis in einer stark vereinfachten und in manchen

¹⁾ Vgl. etwa: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 874.

²⁾ S. Ikehara, Journ. of Math. and Phys. of the Massachusetts Inst. of Techn. 10 (1931), S. 1—12.

³⁾ N. Wiener, Ann. of Math. (2), 33 (1932), S. 1—100, insbesondere Kap. 4. Mathematische Zeitschrift. 37.

Punkten vervollständigten Fassung wiederholen und dabei den Gebrauch von Fourierschen Integralen — auf denen die Methode von Wiener basiert — beträchtlich einschränken.

Wir beweisen nach Wiener gleich den folgenden allgemeinen Satz.

Satz von Ikehara und Wiener. *Es sei $\alpha(\xi)$ eine monoton wachsende Funktion in $0 \leq \xi < \infty$, und das Integral*

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} d\alpha(\xi)$$

sei für $\Re(s) > 1$ konvergent.

Falls die Funktion

$$g(s) = f(s) - \frac{A}{s-1}$$

für $\Re(s) \rightarrow 1$ auf jedem endlichen Intervall: $-a < \Im(s) < a$ gleichmäßig konvergiert, so ist

$$(2) \quad A = \lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-\eta} \alpha(\eta).$$

Zum Beweis setzen wir $s = 1 + \varepsilon + it$, wobei $\varepsilon > 0$ und $-\infty < t < \infty$. Dann ist

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-\varepsilon\xi} e^{-\xi} d\alpha(\xi),$$

wofür man nach Einführung der Funktion

$$\beta(\xi) = e^{-\xi} \alpha(\xi) + \int_0^{\xi} e^{-\xi} \alpha(\xi) d\xi,$$

für welche

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(v) - \beta(u) = \int_u^v e^{-\xi} d\alpha(\xi),$$

auch schreiben kann

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi).$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{s-1} = \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-\varepsilon\xi} d\xi.$$

Nunmehr schreiben wir

$$g(1 + \varepsilon + it) = h_{\varepsilon}(t),$$

so daß nach Voraussetzung die Funktion

$$(3) \quad h_{\varepsilon}(t) = \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi) - A \int_0^{\infty} e^{-it\xi} e^{-\varepsilon\xi} d\xi$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig in jedem endlichen t -Intervall gegen eine Grenzfunktion $h(t)$ konvergiert. Hierbei sind die zwei Integrale in (3) für beliebiges $\varepsilon > 0$ auch für $t = 0$, also absolut konvergent. Wegen dieser absoluten Konvergenz ergibt sich leicht folgendes. Jedes der Integrale ist eine stetige, also nach Riemann integrierbare Funktion in t , und falls in einem endlichen Intervall, als welches wir das Intervall

$$(-2\lambda, 2\lambda)$$

wählen, eine stetige Funktion $\Gamma(t)$ gegeben ist, so kann man im wiederholten Integral

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \Gamma(t) \left[\int_0^\infty e^{-t\xi} e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi) \right] dt$$

die Reihenfolge der Integrationen nach t und ξ vertauschen. Dies wenden wir insbesondere auf die Funktion

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda} \right) e^{it\eta}$$

an, in welcher η eine feste reelle Zahl ist. Nun ist aber

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda} \right) e^{it\zeta} dt = 2 \frac{\sin^2 \lambda \zeta}{\lambda \zeta^2}.$$

Wenn wir daher die Funktionen

$$(4) \quad K(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2},$$

$$(5) \quad K_\lambda(\zeta) = \lambda K(\lambda \zeta)$$

einführen, so erhalten wir aus (3)

$$(6) \quad \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \Gamma(t) h_\varepsilon(t) dt = \int_0^\infty K_\lambda(\eta - \xi) e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi) - A \int_0^\infty K_\lambda(\eta - \xi) e^{-\varepsilon\xi} d\xi.$$

Von nun an werden wir dauernd benutzen müssen, daß $K(\zeta)$ und $d\beta(\xi)$ nicht-negativ sind. Es sei λ und η fest. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert das erste Integral in (6) gegen

$$\frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \Gamma(t) h(t) dt,$$

und das dritte gegen

$$\int_0^\infty K_\lambda(\eta - \xi) d\xi,$$

also besitzt auch

$$\int_0^\infty K_\lambda(\eta - \xi) e^{-\varepsilon\xi} d\beta(\xi)$$

einen endlichen Grenzwert. Er beträgt

$$\int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\beta(\xi),$$

wie aus dem folgenden Hilfssatz⁴⁾ hervorgeht.

Hilfssatz. Gegeben sei in $0 \leq \xi < \infty$ eine Folge von nicht-negativen Funktionen $\chi_n(\xi)$, derart, daß

$$(7) \quad \chi_n(\xi) \leq \chi_{n+1}(\xi) \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

und die Funktion

$$(8) \quad \chi(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(\xi)$$

endlich und stetig ist. Falls für irgendeine monoton wachsende Funktion $\beta(\xi)$ die Integrale

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \chi_n(\xi) d\beta(\xi)$$

endlich und beschränkt sind (also auch konvergent sind), so ist auch das Integral

$$(10) \quad \int_0^{\infty} \chi(\xi) d\beta(\xi)$$

endlich, und sein Wert ist der Grenzwert von (9).

Beweis des Hilfssatzes. Nach den Voraussetzungen gibt es eine Zahl C , so daß für $a > 0$ und $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\int_0^a \chi_n(\xi) d\beta(\xi) \leq C.$$

Für endliches a findet man leicht, weil die Funktionen $\chi_n(\xi)$ auf jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergieren,

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \chi_n(\xi) d\beta(\xi) = \int_0^a \chi(\xi) d\beta(\xi),$$

also gilt auch

$$\int_0^a \chi(\xi) d\beta(\xi) \leq C.$$

Demnach ist das Integral (10) endlich. Und daß es dem Grenzwert der Folge (9) gleicht, folgt aus (11) in Verbindung mit

$$\int_a^{\infty} \chi_n(\xi) d\beta(\xi) \leq \int_a^{\infty} \chi(\xi) d\beta(\xi).$$

⁴⁾ Vgl. z. B. H. E. Bray, Ann. of Math. 20 (1919), S. 176—186.

Aus (6) folgt demnach

$$(12) \quad \int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\beta(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \Gamma(t) h(t) dt + A \int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\xi.$$

Nunmehr lassen wir η gegen ∞ konvergieren. Nach dem Riemannschen Satz ist

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \Gamma(t) h(t) dt \equiv \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) h(t) e^{it\eta} dt \rightarrow 0,$$

überdies folgt aus

$$\int_{-\infty}^0 K_{\lambda}(\eta - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{-\eta} K_{\lambda}(-t) dt \rightarrow 0,$$

daß

$$\int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(t) dt.$$

Nun ist aber

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = 1,$$

und daher erhalten wir aus (12)

$$(14) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A.$$

Überdies erhält man aus (12), daß das Integral links in (12) stetig in η ist, und daher insbesondere einer Abschätzung

$$(15) \quad \int_0^{\infty} K_{\lambda}(\eta - \xi) d\beta(\xi) \leq C(\lambda)$$

genügt.

Für $l \geq 0$ ist daher

$$\int_l^{l+1} K_{\lambda}(l - \xi) d\beta(\xi) \leq C(\lambda),$$

und da nun, etwa für $\lambda = 1$, die Funktion $K_{\lambda}(l - \xi)$ im Intervall $l \leq \xi \leq l+1$ von Null verschieden ist, so gibt es eine Zahl B , derart, daß

$$(16) \quad \int_l^{l+1} d\beta(\xi) \leq B \quad l \geq 0.$$

Es sei jetzt $R(\zeta)$ eine in $-\infty < \zeta < \infty$ nicht-negative stetige Funktion, welche, um allen sonstigen Voraussetzungen gerecht zu werden, einer Abschätzung

$$(17) \quad R(\zeta) \leq \frac{G}{1 + \zeta^2}$$

genügen soll (G ist eine Zahl). Wir setzen bei festem λ

$$\varphi(\eta) = \int_0^\infty K_\lambda(\eta - \xi) d\beta(\xi) - A$$

und bilden das Integral

$$(18) \quad \psi(\eta) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(\eta - \zeta) R(\zeta) d\zeta,$$

welches wegen (15) endlich ist.

Es ist für beliebiges a

$$\int_a^\infty \varphi(\eta - \zeta) R(\zeta) d\zeta \leq \max_t \varphi(t) \cdot \int_a^\infty R(\zeta) d\zeta$$

und

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^a \varphi(\eta - \zeta) R(\zeta) d\zeta \leq \lim_{\eta \rightarrow \infty} \max_{t \geq \eta - a} \varphi(t) \cdot \int_{-\infty}^\infty R(\zeta) d\zeta.$$

Wegen

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi(\eta) = 0$$

ist daher auch

$$(19) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \psi(\eta) = 0.$$

Nun ist

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^\infty R(\zeta) \left[\int_0^\infty K_\lambda(\eta - \zeta - \xi) d\beta(\xi) \right] d\zeta - A \int_{-\infty}^\infty R(\zeta) d\zeta.$$

Das wiederholte Integral hat den Wert

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a R(\zeta) \left[\int_0^\infty K_\lambda(\eta - \zeta - \xi) d\beta(\xi) \right] d\zeta \\ = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[\int_{-a}^a R(\zeta) K_\lambda(\eta - \zeta - \xi) d\zeta \right] d\beta(\xi). \end{aligned}$$

Wenn man berücksichtigt, daß, wegen (18), zugleich mit $\varphi(\eta)$ auch $\psi(\eta)$ in η beschränkt ist, so ergibt sich auf Grund des obigen Hilfssatzes, wenn man ihn auf die Funktionen

$$\chi_n(\xi) = \int_{-n}^n R(\zeta) K_\lambda(\eta - \zeta - \xi) d\zeta$$

anwendet und die Funktion

$$(20) \quad R_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) K_\lambda(t - \zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda(t - \zeta)}{\lambda(t - \zeta)^2} R(\zeta) d\zeta$$

einführt, die Relation

$$\psi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) d\zeta.$$

Wegen (19) ist daher

$$(21) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) d\zeta.$$

Die rechte Seite ist von λ unabhängig. Andererseits ist

$$(22) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_\lambda(t) = R(t)$$

gleichmäßig in jedem endlichen t -Intervall, wie unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Stetigkeit von $R(\zeta)$ an der Abschätzung

$$\begin{aligned} \pi |R_\lambda(t) - R(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| R(t) - R\left(t + \frac{\xi}{\lambda}\right) \right| \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi \\ &= \int_{-\delta\lambda}^{\delta\lambda} + \left[\int_{-\infty}^{-\delta\lambda} + \int_{\delta\lambda}^{\infty} \right] \end{aligned}$$

leicht zu erkennen ist. Man würde daher vermuten, daß auch

$$(23) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A \int_{-\infty}^{\infty} R(\zeta) d\zeta.$$

Wir zerlegen das Integral (20) in die Bestandteile

$$\int_{-\infty}^{t-1}, \int_{t-1}^{t+1}, \int_{t+1}^{\infty}.$$

Es ist, vgl. (17),

$$\int_{t-1}^{t+1} \leq \int_{t-1}^{t+1} K_\lambda(\zeta - t) \frac{G}{1 + \zeta^2} d\zeta \leq \text{Maximum}_{t-1 \leq \zeta \leq t+1} \frac{G}{1 + \zeta^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(\zeta - t) d\zeta,$$

und wegen (13) gibt es daher eine Zahl H_1 , so daß

$$\int_{t-1}^{t+1} \leq \frac{GH_1}{1 + t^2}.$$

Andererseits ist, für $\lambda \geq 1$,

$$\int_{-\infty}^{t-1} + \int_{t+1}^{\infty} \leq \left(\int_{-\infty}^{t-1} + \int_{t+1}^{\infty} \right) \frac{\pi^{-1}}{1 + (\zeta - t)^2} \cdot \frac{G}{1 + \zeta^2} d\zeta,$$

und dies ist, nach einer einfachen Abschätzung,

$$\leq \frac{GH_2}{1 + t^2}.$$

Also gibt es eine Konstante H , so daß für $\lambda \geq 1$

$$R_\lambda(t) \leq \frac{GH}{1 + t^2}.$$

In Verbindung mit (17) und (22) ergibt sich folgendes. Zu jedem ε gibt es ein λ , derart, daß

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Maximum}_{n-\frac{1}{2} \leq t \leq n+\frac{1}{2}} |R_\lambda(t) - R(t)| \leq \varepsilon.$$

In Verbindung mit (16) ergibt sich für dieses λ

$$\int_0^\infty |R_\lambda(\eta - \xi) - R(\eta - \xi)| d\beta(\xi) \leq B\varepsilon.$$

Und da ε beliebig klein sein kann, hat tatsächlich die Relation (21) die Relation (23) zur Folge. Für die Funktion

$$R_0(\zeta) = \begin{cases} e^{-\zeta} & \zeta \geq 0 \\ 0 & \zeta < 0 \end{cases}$$

nimmt die Relation (23) die Form an

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta e^{\xi - \eta} d\beta(\xi) = A,$$

was, wegen

$$\int_0^\eta e^{\xi} d\beta(\xi) = \int_0^\eta d\alpha(\xi) = \alpha(\eta) - \alpha(0),$$

mit der behaupteten Relation (2) äquivalent ist. Aber die Funktion $R_0(\zeta)$ hat eine Unstetigkeit, so daß ihre Verwendung in der Relation (23) nicht ohne weiteres zulässig ist. Zur Rechtfertigung betrachten wir für $\delta > 0$ eine Funktion $R_1(\zeta)$, welche nicht-negativ und stetig ist, im Intervall $\zeta \leq 0$ verschwindet, im Intervall $0 \leq \zeta \leq \delta$ einen Wert $\leq e^{-\delta}$ und im Intervall $\delta \leq \zeta < \infty$ genau den Wert $e^{-\zeta}$ hat, und eine Funktion $R_2(\zeta)$, welche nicht-negativ und stetig ist, für $\zeta \leq -\delta$ ver-

schwindet, für $-\delta < \zeta < 0$ einen Wert ≤ 1 und für $0 \leq \zeta < \infty$ genau den Wert $e^{-\zeta}$ hat. Offenbar ist

$$(24) \quad R_1(\zeta) \leq R(\zeta) \leq R_2(\zeta)$$

und

$$(25) \quad 1 - \delta \leq \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\zeta) d\zeta \leq 1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\zeta) d\zeta \leq 1 + \delta.$$

Nach obigem ist für $\eta \rightarrow \infty$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\zeta) d\zeta.$$

Aus (24) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_1(\eta - \xi) d\beta(\xi) &\leq \liminf_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\eta - \xi) d\beta(\xi) \leq \overline{\lim}_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\eta - \xi) d\beta(\xi) \\ &\leq \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(\eta - \xi) d\beta(\xi). \end{aligned}$$

Da δ beliebig klein sein kann, so folgt aus alledem

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\eta - \xi) d\beta(\xi) = A,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. September 1932.)

Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner.

Von

Hans Heilbronn und Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Jedes $P(\dots)$ ist > 0 und hängt nur von dem ab, was in der Klammer steht.

Es konvergiere

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $s > \dots$; die a_n seien ≥ 0 . Es sei

$$f(s) - \frac{1}{s-1}$$

in $s = 1$ regulär. Dann ist

$$\sum_{n=1}^m a_n = O(m).$$

Wie beweist man das? Nicht so: Für ganzes $m > 2$ und $1 < s < 2$ ist

$$\frac{1}{m^s} \sum_{n=1}^m a_n \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{n^s} \leq f(s) < \frac{P_1(f)}{s-1},$$

$$\sum_{n=1}^m a_n < P_1(f) \frac{m^s}{s-1},$$

denn jetzt ist die günstigste s -Wahl

$$s = 1 + \frac{1}{\log m},$$

was nur

$$\sum_{n=1}^m a_n = O(m \log m)$$

gibt.

Vielmehr kamen wir auf obigen Satz folgendermaßen. Aus der vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner lernten wir die Wienerische Beweismethode des sogenannten Ikeharaschen Satzes. Da Landau fürs kommende Semester eine Vorlesung über Dirichletsche Reihen angekündigt hat, interessierte uns nur der Spezialfall der Dirichletschen Reihen. Bei dieser Spezialisierung der Bochnerschen Beweisanordnung bemerkten wir zu unserem Erstaunen: Ohne viele Änderungen kommt ein Wortlaut heraus, der die Hauptvoraussetzung statt auf der vollen Geraden $\sigma = 1$ nur auf einer beliebig kurzen, $s = 1$ enthaltenden Teilstrecke macht — bei entsprechender Abschwächung der Behauptung, aber so, daß der Ikeharasche Wortlaut für Dirichletsche Reihen in unserem enthalten ist.

Es lautet der neue (den Satz zu Anfang dieser Einleitung reichlich enthaltende)

Hauptsatz: *Es sei*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty.$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

konvergiere für $\sigma > 1$; die a_n seien ≥ 0 . Es sei $\lambda > 0$; für $|t| \leq 2\lambda$ sei bei $\varepsilon \rightarrow +0$ gleichmäßig

$$h_\varepsilon(t) = f(1 + \varepsilon + ti) - \frac{1}{\varepsilon + ti} \rightarrow h(t).$$

Dann ist

$$\overline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y} a_n \leq P_2(\lambda),$$

$$\underline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y} a_n \geq P_3(\lambda),$$

100

$$\lim_{\lambda=\infty} P_2(\lambda) = 1,$$

$$\lim_{\lambda=\infty} P_3(\lambda) = 1.$$

(Wir wiederholen: $P_2(\lambda)$ und $P_3(\lambda)$ sind von f unabhängig.)

Insbesondere ist

$$\sum_{\lambda_n \leq y} a_n = O(e^y),$$

$$\underline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y} a_n > 0.$$

Wir beweisen den Hauptsatz nach dem modifizierten Bochnerschen Paradigma ab ovo, so daß der Leser von der Literatur (Landau —

Hardy + Littlewood — Ikehara — Wiener — Bochner) nichts zu kennen braucht.

Die Theorie der Funktionen komplexer Variabler kommt übrigens nirgends zur Anwendung.

§ 1.

Hilfssätze.

Definition 1:

$$G_{\lambda}(t, y) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{|t|}{2\lambda}\right) e^{tyi},$$

also

$$G_{\lambda}(t, y) e^{-txi} = G_{\lambda}(t, y - x).$$

Definition 2:

$$K_{\lambda}(y) = \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_{\lambda}(t, y) dt,$$

also für $y \geq 0$

$$\begin{aligned} K_{\lambda}(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\lambda} \left(1 - \frac{t}{2\lambda}\right) \cos ty dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{t}{2\lambda}\right) \frac{\sin ty}{y} - \frac{\cos ty}{2\lambda y^2} \right\}_0^{2\lambda} = \frac{\sin^2 \lambda y}{\pi \lambda y^2}, \end{aligned}$$

$$K_{\lambda}(0) = K_{\lambda}(+0) = \frac{\lambda}{\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = 1.$$

Definition 3:

$$b_{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda\alpha} e^{v/\lambda} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = \int_{-\infty}^{\alpha} e^x K_{\lambda}(x) dx \quad \text{für } \alpha \geq 0.$$

Satz 1: 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_{\lambda}(y - \lambda_n) = \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_{\lambda}(t, y) h(t) dt + \int_{-\infty}^y K_{\lambda}(z) dz \quad \text{für } y \geq 0.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_{\lambda}(y - \lambda_n) \rightarrow 1 \quad \text{bei } y \rightarrow \infty.$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_{\lambda}(y - \lambda_n) < P_4(\lambda, f) \quad \text{für } y \geq 0.$$

4)

$$\sum_{z - \frac{1}{\lambda} \leq \lambda_n \leq z} a_n e^{-\lambda_n} < \frac{P_6}{\lambda} \quad \text{für } z > P_6(\lambda, f).$$

5)

$$\sum_{|\lambda_n - y| > \delta} \frac{a_n e^{-\lambda_n}}{(\lambda_n - y)^2} < \frac{P_7}{\delta} \left(\frac{1}{\lambda \delta} + 1 \right) \quad \text{für } \delta > 0, \quad y > P_8(\lambda, \delta, f).$$

Beweis: 1) Für $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y) h_\varepsilon(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(1+\varepsilon+t)} dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y) dt \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+t)x} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(1+\varepsilon)} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y - \lambda_n) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} dx \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y - x) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(1+\varepsilon)} K_\lambda(y - \lambda_n) - \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} K_\lambda(y - x) dx. \end{aligned}$$

Bei $\varepsilon \rightarrow 0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y) h_\varepsilon(t) dt &\rightarrow \frac{1}{2} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} G_\lambda(t, y) h(t) dt, \\ \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} K_\lambda(y - x) dx &\rightarrow \int_0^{\infty} K_\lambda(y - x) dx = \int_{-\infty}^y K_\lambda(z) dz. \end{aligned}$$

Also existiert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n(1+\varepsilon)} K_\lambda(y - \lambda_n).$$

Also konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(y - \lambda_n)$$

und hat den behaupteten Wert.

2) In 1) strebt bei $y \rightarrow \infty$ das erste Integral als Fourierkonstante einer stetigen Funktion gegen 0; das zweite strebt gegen 1.

3) Nach 1) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(y - \lambda_n) < \frac{1}{2\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} |h(t)| dt + 1 = P_4(\lambda, f).$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad K_\lambda(u) &\geq P_9 \lambda \quad \text{für} \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{\lambda}, \\
 \sum_{z - \frac{1}{\lambda} \leq \lambda_n \leq z} a_n e^{-\lambda_n} &\leq \frac{1}{P_9 \lambda} \sum_{z - \frac{1}{\lambda} \leq \lambda_n \leq z} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(z - \lambda_n) \\
 &\leq \frac{1}{P_9 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(z - \lambda_n),
 \end{aligned}$$

also nach 2)

$$< \frac{P_5}{\lambda} \quad \text{für} \quad z > P_6(\lambda, f).$$

5) Für $y > P_6(\lambda, f)$ ist

$$\sum_{\substack{|\lambda_n - y| > \delta \\ \lambda_n \leq P_6(\lambda, f)}} \frac{a_n e^{-\lambda_n}}{(\lambda_n - y)^2} \leq \frac{1}{(y - P_6(\lambda, f))^2} \sum_{\lambda_n \leq P_6(\lambda, f)} a_n e^{-\lambda_n},$$

also

$$< \frac{P_{10}}{\delta} \quad \text{für} \quad y > P_{11}(\lambda, \delta, f).$$

Für $y \geq 0$ ist nach 4)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{|\lambda_n - y| > \delta \\ \lambda_n > P_6(\lambda, f)}} \frac{a_n e^{-\lambda_n}}{(\lambda_n - y)^2} &\leq \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\delta + \frac{\kappa}{\lambda}\right)^2} \sum_{\substack{\delta + \frac{\kappa}{\lambda} < |\lambda_n - y| \leq \delta + \frac{\kappa+1}{\lambda} \\ \lambda_n > P_6(\lambda, f)}} a_n e^{-\lambda_n} \\
 &< \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\delta + \frac{\kappa}{\lambda}\right)^2} \frac{2P_5}{\lambda} < \frac{2P_5}{\lambda} \left(\frac{1}{\delta^2} + \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(\delta + \frac{u}{\lambda}\right)^2} \right) = \frac{2P_5}{\delta} \left(\frac{1}{\lambda\delta} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Satz 2:

$$e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_\lambda(y - \lambda_n) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad y \rightarrow \infty.$$

Beweis: Nach Satz 1, 3) konvergiert

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(y - z - \lambda_n) dz$$

für $y \geq 0$ gleichmäßig. Nach Satz 1, 2) ist für $\omega > 0$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} e^{-z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(y - z - \lambda_n) dz = \int_0^{\omega} e^{-z} dz.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} K_\lambda(y - z - \lambda_n) dz \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \int_0^{\infty} e^{-z} K_\lambda(y - z - \lambda_n) dz;
 \end{aligned}$$

hierin ist

$$\int_0^{\infty} e^{-z} K_\lambda(y - z - \lambda_n) dz = e^{\lambda_n - y} \int_{-\infty}^{y - \lambda_n} e^x K_\lambda(x) dx = e^{\lambda_n - y} b_\lambda(y - \lambda_n).$$

Satz 3: 1)

$$b_1(\alpha) > \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \quad \text{für } \alpha \geq \delta > 0.$$

2) a)

$$b_1(\alpha) < \frac{e^\alpha}{\lambda \alpha^2} \quad \text{für } \alpha < 0.$$

b)

$$b_1(\alpha) < e^\delta \quad \text{für } \delta > 0, \quad \alpha \leq \delta.$$

c)

$$b_1(\alpha) < 1 + P_{12} \frac{\log(\lambda + 2)}{\lambda} \frac{e^\alpha}{\alpha^2} \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Beweis: 1)

$$b_1(\alpha) > \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda \alpha} (e^{v/\lambda} + e^{-v/\lambda}) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv.$$

2) a)

$$b_1(\alpha) < \frac{1}{\lambda^2 \alpha^2} \int_{-\infty}^{\lambda \alpha} e^{v/\lambda} dv = \frac{e^\alpha}{\lambda \alpha^2}.$$

b)

$$b_1(\alpha) < \frac{1}{\pi} e^\alpha \int_{-\infty}^{\lambda \alpha} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv < \frac{1}{\pi} e^\delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = e^\delta.$$

c)

$$b_1(\alpha) - 1 < \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda \alpha} (e^{v/\lambda} - 1) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv < \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda \alpha} (e^{v/\lambda} - 1) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^{4\lambda} (e^{v/\lambda} - 1) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv &< \frac{P_{13}}{\lambda} \int_0^{4\lambda} \frac{\sin^2 v}{v} dv < \frac{P_{14}}{\lambda} \log(\lambda + 2) \\ &< P_{15} \frac{\log(\lambda + 2)}{\lambda} \frac{e^\alpha}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Also sei o. B. d. A. $\alpha > 4$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{4\lambda}^{\lambda \alpha} (e^{v/\lambda} - 1) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv &< \int_{4\lambda}^{\lambda \alpha} \frac{e^{v/\lambda}}{v^2} dv = \frac{1}{\lambda} \int_4^\alpha \frac{e^w}{w^2} dw \leq \frac{1}{\lambda} \int_4^\alpha \left(2 \frac{e^w}{w^2} - 4 \frac{e^w}{w^3} \right) dw \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2e^\alpha}{\alpha^2} - \frac{2e^4}{4^2} \right) < P_{16} \frac{\log(\lambda + 2)}{\lambda} \frac{e^\alpha}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

1) Nach Satz 2 und Satz 3, 1) ist für $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{\lambda}(y - \lambda_n) \geq \overline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y-\delta} a_n b_{\lambda}(y - \lambda_n) \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \overline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y-\delta} a_n, \\ \overline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y} a_n &= \overline{\lim}_{y=\infty} e^{-(y-\delta)} \sum_{\lambda_n \leq y-\delta} a_n \leq \frac{e^{\delta}}{\frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv}. \end{aligned}$$

Setzt man $\delta = \lambda^{-1/2}$, so ist die rechte Seite $P_2(\lambda)$ mit

$$\lim_{\lambda=\infty} P_2(\lambda) = 1.$$

2) Nach Satz 2, Satz 3, 2) und Satz 1, 5) ist für $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \underline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{\lambda}(y - \lambda_n) \\ &\leq \underline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \left(\sum_{\lambda_n < y-\delta} a_n \left(1 + P_{12} \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda} \frac{e^{y-\lambda_n}}{(y-\lambda_n)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\lambda_n - y| \leq \delta} a_n e^{\delta} + \sum_{\lambda_n > y+\delta} a_n \frac{1}{\lambda} \frac{e^{y-\lambda_n}}{(y-\lambda_n)^2} \right) \\ &\leq \underline{\lim}_{y=\infty} e^{-(y+\delta)} e^{2\delta} \sum_{\lambda_n \leq y+\delta} a_n + P_{17} \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda \delta} \left(\frac{1}{\lambda \delta} + 1 \right), \\ &\quad \underline{\lim}_{y=\infty} e^{-y} \sum_{\lambda_n \leq y} a_n = \underline{\lim}_{y=\infty} e^{-(y+\delta)} \sum_{\lambda_n \leq y+\delta} a_n \\ &\geq e^{-2\delta} \left(1 - P_{17} \frac{\log(\lambda+2)}{\lambda \delta} \left(\frac{1}{\lambda \delta} + 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Für $\delta = P_{18}(\lambda)$ ist die Klammer rechts > 0 , also die rechte Seite > 0 . Für $\delta = \lambda^{-1/2}$ strebt die rechte Seite gegen 1 bei $\lambda \rightarrow \infty$. Also ist die rechte Seite für $\delta = P_{19}(\lambda)$ jedenfalls $P_3(\lambda)$ mit

$$\lim_{\lambda=\infty} P_3(\lambda) = 1.$$

Göttingen, den 17. Oktober 1932.

(Eingegangen am 18. Oktober 1932.)

Ein Satz über Potenzreihen.

Von

Hans Heilbronn und Edmund Landau in Göttingen.

Wir beweisen möglichst kurz einen Satz, der in dem Spezialfall $\lambda_n = n - 1$ des Hauptsatzes unserer vorstehenden Arbeit enthalten ist, uns aber bisher unbekannt war.

Satz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

konvergiere für $|x| < 1$; die c_n seien ≥ 0 ;

$$F(x) = f(x) - \frac{1}{1-x}$$

sei regulär in $x = 1$. Dann ist

$$c_n = O(1)$$

(also nach einem Fatouschen Satz in Acta Mathematica 30, S. 391, sogar

$$\sum_{v=0}^n c_v = n + O(1)).$$

Beweis: Man wähle $\lambda > 0$ und P so, daß

$$|F(re^{q i})| < P \quad \text{für} \quad 0 \leq r < 1, \quad -\lambda \leq q \leq \lambda.$$

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|q|}{\lambda}\right) e^{\alpha q i} d q = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha \lambda}{2}}{\alpha^2 \lambda} \leq \frac{4}{\alpha^2 \lambda} \quad \text{für } \alpha \geq 0.$$

$$2\lambda P \geq \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|q|}{\lambda}\right) e^{-n q i} F(re^{q i}) d q = \sum_{v=0}^{\infty} (c_v - 1) r^v \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|q|}{\lambda}\right) e^{(v-n) q i} d q$$

$$\geq (c_n - 1) r^n \lambda - \frac{4}{\lambda} \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(v-n)^2};$$

$r \rightarrow 1$ ergibt die Behauptung.

Göttingen, den 26. Oktober 1932.

(Eingegangen am 27. Oktober 1932.)

Anwendungen der N. Wiener'schen Methode.

Von

Hans Heilbronn und Edmund Landau in Göttingen.

In unserer vorvorstehenden Arbeit bewiesen wir u. a.:

Die Dirichlet'sche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

konvergiere für $\sigma > 1$; die a_n seien ≥ 0 . Es sei $f(s) = \frac{1}{s-1}$ für $s = 1$ regulär. Dann ist

$$(1) \quad A(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n = O(e^y).$$

[Übrigens lehrt ein Blick auf unseren Beweis, daß für diesen Spezialfall unseres Hauptsatzes die schwierigsten Hilfsbetrachtungen, insbesondere Satz 1, 4) und 5) und Satz 3, 2) unnötig sind.]

Aus (1) folgt

$$\sum_{n=1}^m a_n e^{-\lambda_n} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_m} A(u) e^{-u} du + A(\lambda_m) e^{-\lambda_m} = O(\lambda_m),$$
$$\sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n} = O(y).$$

Wir werden aber aus (1) und den Voraussetzungen sogar

$$(2) \quad \sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n} = y + O(1)$$

folgern.

Es ist erstaunlich, daß ein Satz sich selbst verschärfen kann. Unser Satz tut es gewissermaßen durch Kombination mit Teil 1) des folgenden Satzes von Herrn M. Riesz:

Es sei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_1 \rightarrow \infty,$$
$$B(y) = \sum_{\lambda_n \leq y} b_n = O(e^y),$$

also

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > 1$ konvergent. $g(s)$ sei in $s = 1$ regulär.

1) Dann ist

$$\sum_{\lambda_n \leq y} b_n e^{-\lambda_n} = O(1).$$

2) Wird sogar

$$B(y) = o(e^y)$$

vorausgesetzt, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n}.$$

Herr Riesz hat Teil 2) auf S. 350—354 des Bandes 40 der Acta Mathematica bewiesen. Teil 1) ergibt sich entsprechend einfacher aus seiner Methode; um es dem Leser leicht zu machen, führen wir dies im Anhang aus.

Teil 2) dient dazu, unter der ferneren Annahme, daß $f(s) - \frac{1}{s-1}$ für $\sigma = 1$ regulär ist, die Existenz von

$$(3) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n} - y \right)$$

zu beweisen. Hierbei kommt statt (1) der Ikeharasche Spezialfall des Hauptsatzes unserer vorvorstehenden Arbeit zur Anwendung.

§ 1.

Beweis von (2).

O. B. d. A. kommen unter den λ_n alle ganzen positiven Zahlen vor (sonst füge man die fehlenden mit verschwindenden Koeffizienten hinzu). Dann ist

$$g(s) = f(s) - \frac{1}{e^s - 1} = f(s) - \sum_{v=1}^{\infty} e^v e^{-vs} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > 1$ konvergent und in $s = 1$ regulär. Nach (1) ist

$$\sum_{\lambda_n \leq y} b_n = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n - \sum_{1 \leq v \leq y} e^v = O(e^y),$$

nach Teil 1) des Riesz'schen Satzes also

$$\sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n} = \sum_{\lambda_n \leq y} b_n e^{-\lambda_n} + \sum_{1 \leq v \leq y} 1 = y + O(1).$$

§ 2.

Beweis von (3).

O. B. d. A. kommen unter den λ_n die Logarithmen aller ganzen positiven Zahlen vor. Dann ist

$$g(s) = f(s) - \zeta(s) = f(s) - \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\log v \cdot s} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma > 1$ konvergent und für $\sigma = 1$ regulär. Nach Ikehara ist also

$$\sum_{\lambda_n \leq y} b_n = \sum_{\lambda_n \leq y} a_n - \sum_{1 \leq v \leq e^y} 1 = o(e^y).$$

Nach Teil 2) des Rieszschen Satzes konvergiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n} = c.$$

Also ist

$$\sum_{\lambda_n \leq y} a_n e^{-\lambda_n} = \sum_{\lambda_n \leq y} b_n e^{-\lambda_n} + \sum_{1 \leq v \leq e^y} \frac{1}{v} = y + c + C + o(1).$$

Anhang.**Beweis von Teil 1) des Rieszschen Satzes.**

Alle c -Konstanten sind > 0 und nur von g abhängig.

$$|B(y)| \leq c_1 e^y \quad \text{für} \quad y \geq 0.$$

$g(s)$ ist in einem Rechteck

$$(R) \quad 1 - c_2 \leq \sigma \leq 2, \quad |t| \leq c_3$$

regulär. Für ganzes $m \geq 1$ setze man auf R

$$g_m(s) = \left(g(s) - \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n s} \right) e^{\lambda_m(s-1)} (s-1-c_3 i)(s-1+c_3 i).$$

Auf dem Rand von R ist

$$|g_m(s)| \leq \left| g(s) - \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n s} \right| e^{\lambda_m(\sigma-1)} c_4 |\sigma-1|.$$

Auf dem zu $\sigma > 1$ gehörigen Randteil ist

$$\begin{aligned} \left| g(s) - \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n s} \right| &= \left| -B(\lambda_m) e^{-\lambda_m s} + s \int_{\lambda_m}^{\infty} B(u) e^{-us} du \right| \\ &\leq c_1 \left(e^{-\lambda_m(\sigma-1)} + |s| \int_{\lambda_m}^{\infty} e^{-u(\sigma-1)} du \right) < \frac{c_5}{\sigma-1} e^{-\lambda_m(\sigma-1)}. \end{aligned}$$

Auf dem zu $\sigma < 1$ gehörigen Randteil ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n s} \right| &= \left| B(\lambda_m) e^{-\lambda_m s} + s \int_{-\infty}^{\lambda_m} B(u) e^{-u s} du \right| \\ &\leq c_1 \left(e^{-\lambda_m(\sigma-1)} + |s| \int_{-\infty}^{\lambda_m} e^{-u(\sigma-1)} du \right) < \frac{c_6}{1-\sigma} e^{-\lambda_m(\sigma-1)}, \\ \left| g(s) - \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n s} \right| &< c_7 + \frac{c_6}{1-\sigma} e^{-\lambda_m(\sigma-1)} < \frac{c_8}{1-\sigma} e^{-\lambda_m(\sigma-1)}. \end{aligned}$$

Auf dem ganzen Rand von R ist also

$$|g_m(s)| < c_9.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left| g(1) - \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n} \right| c_3^2 &= |g_m(1)| < c_9, \\ \left| \sum_{n=1}^m b_n e^{-\lambda_n} \right| &< c_{10}. \end{aligned}$$

Göttingen, den 26. Oktober 1932.

(Eingegangen am 27. Oktober 1932.)

Über einen Satz von Herrn Dieudonné.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Herr Dieudonné hat den folgenden wichtigen (weil unverschärfbaren) Satz erst mit kurzer Beweisskizze in den Comptes rendus¹⁾ ausgesprochen und dann zu Beginn des Kap. 3 seiner Thèse²⁾ ausführlich bewiesen. Sein nicht ganz kurzer Beweis ist geometrisch. In seiner Thèse³⁾ erwähnt er, daß ich ihm (in einem Brief vom 6. 7. 1930) einen rein algebraischen Beweis jenes Satzes mitgeteilt hatte, dessen Wortlaut ich aus seiner C.R.-Note gelernt hatte. Daher will ich diesen Beweis hier mitteilen.

Der Dieudonné'sche Satz lautet: Für $|x| < 1$ sei $f(x)$ regulär und

$$|f(x)| \leq M.$$

Es sei

$$f(0) = 0, f'(0) = 1$$

(also $M \geq 1$). Es sei n eine ganze Zahl > 1 . Es sei r die Wurzel⁴⁾ von

$$(1) \quad \sum_{v=0}^{n-1} r^{2^v} = n M r^{n-1}, \quad 0 < r \leq 1.$$

Dann hat für jedes a die Funktion $f(x) - a$ in $|x| < r$ höchstens $n - 1$ Wurzeln.

Vorbemerkung⁵⁾: Für $M = 1$ ist $f(x) = x$, also die Behauptung für jedes $R > 0$ statt r trivial. Für $M > 1$ läßt sich r durch keine größere Funktion R von M und n ersetzen. Denn für $|x| < 1$ ist

$$\left| \frac{r-x}{1-rx} \right| < 1,$$

¹⁾ Sur les cercles de multivalence des fonctions bornées, 190, S. 1109—1111 (Sitzung vom 12. 5. 1930).

²⁾ Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, Paris (1931), 112 S. (S. 92—102).

³⁾ S. 102, Fußnote.

⁴⁾ Sie existiert, und zwar eindeutig. Denn $\frac{1}{x} + x$ fällt für $0 < x \leq 1$; also fällt

$$M(r) = \frac{1}{n} \left(\left(r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}} \right) + \left(r^{n-3} + \frac{1}{r^{n-3}} \right) + \dots + \left(r + \frac{1}{r} \text{ bzw. } 1 \right) \right)$$

für $0 < r \leq 1$. Wegen $M(+0) = \infty$, $M(1) = 1$ gibt es also genau ein r mit (1); für $M > 1$ ist $r < 1$.

⁵⁾ Dieudonné.

also

$$f(x) = M \frac{\left(\frac{r-x}{1-rx}\right)^n - r^n}{r^n \left(\frac{r-x}{1-rx}\right)^n - 1} = M \frac{(r-x)^n - r^n (1-rx)^n}{r^n (r-x)^n - (1-rx)^n}$$

$$= M \frac{-n r^{n-1} + n r^{n+1}}{r^{2n} - 1} x + \dots = x + \dots$$

regulär und

$$|f(x)| \leq M.$$

Ferner hat

$$f(x) - M r^n = M \frac{\left(\frac{r-x}{1-rx}\right)^n (1-r^{2n})}{r^n \left(\frac{r-x}{1-rx}\right)^n - 1}$$

in $x = r$ eine n -fache Wurzel.**Hilfssatz 1:** Es sei

$$n > 0 \text{ ganz,}$$

$$0 < A_\nu \leq r < 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

$$0 < A_0 \leq 1,$$

$$Q = \prod_{\nu=0}^n A_\nu.$$

Dann ist

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{1}{A_\nu} - A_\nu \right) \leq (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{r^{n-1}}{Q} - \frac{Q}{r^{n-1}}.$$

Beweis: Aus Symmetriegründen dürfen wir

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n$$

annehmen. Es ist

$$0 < Q \leq \prod_{\nu=1}^n A_\nu \leq r^n < r^{n-2}.$$

Die Ableitung der rechten Seite von (2) nach r ist

$$(n-1) \left(-\frac{1}{r^2} - 1 + \frac{r^{n-2}}{Q} + \frac{Q}{r^n} \right)$$

$$= (n-1) \frac{-r^{n-2}Q - r^nQ + r^{2n-2} + Q^2}{r^n Q} = (n-1) \frac{(r^n - Q)(r^{n-2} - Q)}{r^n Q} \geq 0.$$

Also dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$r = A_n$$

annehmen.

1) Ist $n = 1$, so ist

$$(1 - A_0)(1 - A_1) \geq 0,$$

$$A_0 + A_1 \leq 1 + A_0 A_1 = 1 + Q,$$

$$\frac{1}{A_0} - A_0 + \frac{1}{A_1} - A_1 = \frac{A_0 + A_1}{A_0 A_1} - (A_0 + A_1)$$

$$= (A_0 + A_1) \frac{1 - Q}{Q} \leq \frac{1 - Q^2}{Q} = \frac{1}{Q} - Q.$$

2) Ist $n > 1$ und die Behauptung für $n-1$ wahr, so ist
 (da $\prod_{v=0}^{n-1} A_v = \frac{Q}{r}$)

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n \left(\frac{1}{A_v} - A_v \right) &= \sum_{v=0}^{n-1} \left(\frac{1}{A_v} - A_v \right) + \left(\frac{1}{r} - r \right) \\ &\leq (n-2) \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{r^{n-2}}{\frac{Q}{r}} - \frac{r}{r^{n-2}} + \left(\frac{1}{r} - r \right) \\ &= (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{r^{n-1}}{Q} - \frac{Q}{r^{n-1}}. \end{aligned}$$

Hilfssatz 2: Ist $n > 1$ ganz, $0 < r < 1$, $M = \frac{1-r^{2n}}{(1-r^2)n r^{n-1}}$,
 so ist

$$1 - M r^{n-1} \geq r^{n+1} (M - r^{n-1})$$

(also⁶⁾)

$$M r^{n-1} < 1).$$

Beweis: Für $0 < s < 1$ ist

$$\begin{aligned} n(1+s^n) &= \sum_{v=1}^n (1+s^n) = \sum_{v=1}^n (s^v + s^{n-v} + (1-s^v)(1-s^{n-v})) \\ &\geq \sum_{v=1}^n (s^v + s^{n-v}) = (1+s) \sum_{v=0}^{n-1} s^v = (1+s) \frac{1-s^n}{1-s}, \\ 1+s^n - \frac{(1+s)(1-s^n)}{n(1-s)} &\geq 0 \end{aligned}$$

$s = r^2$ gibt

$$\begin{aligned} 1 + r^{2n} - (1+r^2) r^{n-1} M &= 1 + r^{2n} - \frac{(1+r^2)(1-r^{2n})}{n(1-r^2)} \geq 0, \\ 1 - M r^{n-1} &\geq r^{n+1} (M - r^{n-1}). \end{aligned}$$

Beweis des Dieudonné'schen Satzes: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M > 1$, also $r < 1$. Gesetzt, $f(x) - a$ habe in $|x| < r$ mindestens die Wurzeln $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Daraus ist ein Widerspruch herzuleiten.

1) Wäre $a = 0$, so sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein $\gamma_v = 0$ (also genau ein $\gamma_v = 0$); denn sonst ersetze man γ_n durch 0. Also sei in unserem ersten Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\gamma_n = 0.$$

⁶⁾ Dies folgt auch direkt aus

$$M r^{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} r^{2v} < 1.$$

Dann wäre

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \prod_{v=1}^{n-1} \frac{1 - \overline{\gamma_v} x}{\gamma_v - x}$$

für $|x| < 1$ regulär und hier

$$|g(x)| \leq M.$$

Also wäre

$$M \geq |g(0)| = \prod_{v=1}^{n-1} \frac{1}{|\gamma_v|} > \frac{1}{r^{n-1}} > M.$$

2) Wäre $a \neq 0$, so setzen wir

$$b = |a|,$$

so daß

$$0 < b < M;$$

wir setzen ferner

$$\lambda = \prod_{v=1}^n \gamma_v,$$

$$L = |\lambda|,$$

so daß

$$L > 0.$$

Wir setzen endlich

$$|\gamma_v| = A_v \text{ für } v = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu = \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_v} - \overline{\gamma_v} \right) = \sum_{v=1}^n \frac{1 - |\gamma_v|^2}{\gamma_v},$$

so daß

$$|\mu| \leq \sum_{v=1}^n \frac{1 - A_v^2}{A_v} = \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{A_v} - A_v \right).$$

Die Funktion

$$F(x) = \frac{\frac{a}{M} - \frac{f(x)}{M}}{1 - \frac{\bar{a}}{M} \frac{f(x)}{M}}$$

wäre für $|x| < 1$ regulär, und hier wäre

$$|F(x)| \leq 1.$$

Es wäre für kleine $|x|$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = - \frac{\frac{f'(x)}{M}}{\frac{a}{M} - \frac{f(x)}{M}} + \frac{\frac{\bar{a}}{M^2} f'(x)}{1 - \frac{\bar{a}}{M} \frac{f(x)}{M}},$$

$$\frac{F'(0)}{F(0)} = - \frac{1}{a} + \frac{\bar{a}}{M^2} = \frac{b^2 - M^2}{a M^2}.$$

Da $F(x)$ die Wurzeln $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ hätte, wäre

$$G(x) = F(x) \prod_{v=1}^n \frac{1 - \overline{\gamma_v} x}{\gamma_v - x}$$

für $|x| < 1$ regulär und hier

$$(3) \quad |G(x)| \leq 1,$$

also

$$|G(0)| = \left| F(0) \prod_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} \right| = \frac{b}{ML} \leq 1,$$

$$b \leq ML < M \prod_{v=1}^n r = M r^n.$$

Nun wäre für kleine $|x|$

$$\begin{aligned} \frac{G'}{G}(x) &= \frac{F'}{F}(x) + \sum_{v=1}^n \left(-\frac{\overline{\gamma_v}}{1 - \overline{\gamma_v} x} + \frac{1}{\gamma_v - x} \right), \\ \left| \frac{G'}{G}(0) \right| &= \left| \frac{F'}{F}(0) + \sum_{v=1}^n \left(-\overline{\gamma_v} + \frac{1}{\gamma_v} \right) \right| \\ &= \left| \frac{b^2 - M^2}{a M^2} + \mu \right| \geq \frac{M^2 - b^2}{b M^2} - \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{A_v} - A_v \right). \end{aligned}$$

Aus (3) folgt bekanntlich⁷⁾

$$|G'(0)| \leq 1 - |G(0)|^2;$$

also wäre

$$\begin{aligned} \left| \frac{G'}{G}(0) \right| &\leq \frac{1}{|G(0)|} - |G(0)|, \\ \frac{M^2 - b^2}{b M^2} &\leq \frac{ML}{b} - \frac{b}{ML} + \sum_{v=1}^n \left(\frac{1}{A_v} - A_v \right). \end{aligned}$$

Also wäre nach Hilfssatz 1 mit $A_0 = \frac{b}{ML}$ (also $Q = \frac{b}{M}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} - \frac{b}{M^2} &\leq (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) + \frac{M r^{n-1}}{b} - \frac{b}{M r^{n-1}}, \\ 0 &\leq (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) - \frac{M - r^{n-1}}{M^2 r^{n-1}} b - \frac{1 - M r^{n-1}}{b}. \end{aligned}$$

⁷⁾ Denn für $G(x) = a_0 + a_1 x + \dots$ ist im Falle $|a_0| = 1$

$$a_1 = 0;$$

im Falle $|a_0| < 1$, weil

$$\frac{G(x) - a_0}{1 - \overline{a_0} G(x)} = \frac{a_1}{1 - |a_0|^2} x + \dots$$

für $|x| < 1$ regulär und absolut ≤ 1 ist,

$$\frac{|a_1|}{1 - |a_0|^2} \leq 1.$$

Für $0 < b < M r^n$ stiege die rechte Seite mit b , da nach Hilfsatz 2 ihre Ableitung

$$\begin{aligned} -\frac{M - r^{n-1}}{M^2 r^{n-1}} + \frac{1 - M r^{n-1}}{b^2} &\geq -\frac{M - r^{n-1}}{M^2 r^{n-1}} + \frac{r^{n+1} (M - r^{n-1})}{b^2} \\ &> -\frac{M - r^{n-1}}{M^2 r^{n-1}} + \frac{r^{n+1} (M - r^{n-1})}{M^2 r^{2n}} = 0. \end{aligned}$$

Also wäre

$$\begin{aligned} 0 &< (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) - \frac{M - r^{n-1}}{M^2 r^{n-1}} M r^n - \frac{1 - M r^{n-1}}{M r^n} \\ &= (n-1) \left(\frac{1}{r} - r \right) - r + \frac{r^n}{M} - \frac{1}{M r^n} + \frac{1}{r} = n \frac{1 - r^2}{r} + \frac{r^{2n} - 1}{M r^n} = 0. \end{aligned}$$

Berlin, den 14. Oktober 1932.

(Eingegangen am 15. Oktober 1932.)

Der Paley'sche Satz über Charaktere.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Herr Paley¹⁾ bewies kürzlich folgenden wichtigen

Satz: *Es sei $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter mod k . Dann ist*

$$\sum_{n=1}^m \chi(n) = O(\sqrt{k} \log \log k).$$

D.h. es gibt ein $P > 0$ und unendlich viele k so, daß für passende zu k gehörige m, χ

$$\left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right| > P \sqrt{k} \log \log k.$$

In seinen historischen Vorbemerkungen ist zweierlei zu berichtigen.

1. Herr Pólya²⁾ hatte bewiesen: Für $k > 1$ ist

$$(1) \quad \left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right| < P_1 \sqrt{k} \log k.$$

Herr Paley meint irrtümlich, Herr Pólya habe dies nur für $k = \text{Primzahl}$ bewiesen, wenn auch seine Methode im allgemeinen Fall ohne weiteres anwendbar sei.

2. Nicht Herr Pólya (wie Herr Paley meint) hat (1) mit $P_1 = 1$ bewiesen, sondern zuerst Herr Schur (für beliebiges k) in der Arbeit, die unmittelbar hinter der Pólyaschen steht und ihm unbekannt blieb³⁾.

¹⁾ *A theorem on characters* [The Journal of The London Mathematical Society 7 (1932), S. 28—32].

²⁾ *Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1918, S. 21—29].

³⁾ *Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn G. Pólya: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste* [S. 30—36]. Vgl. auch § 1 [S. 79—86] meiner an beide Autoren anknüpfenden Arbeit im selben Band [S. 79—97]: *Ab-schätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen*.

Sachlich ist zu Herrn Paleys (völlig einwandfreiem) Beweis seines Satzes zu bemerken:

1. Er arbeitet wie Herr Pólya mit Fourierreihen statt wie Herr Schur mit endlichen Summen. Dadurch braucht er unnötigerweise seine in einer früheren Arbeit aufgestellte Formel (3. 3).

2. Auch seine Heranziehung des Fejérkerns läßt sich durch einen einfacheren Schluß (ältester Tauberscher Kunstgriff) ersetzen⁴⁾.

Im folgenden werde ich, ohne auf die Paleysche Arbeit Bezug zu nehmen, seinen Satz auf seinem namentlich in diesen zwei Hinsichten umgebauten Wege ab ovo beweisen.

Satz 1: Es seien q, N ganz, $q \geq N \geq 1$; $a_1, \dots, a_q$ reell. Auf jedem reellen Intervall der Länge π/q liege ein ϑ mit

$$(2) \quad \sum_{n=1}^q a_n \sin n \vartheta \leq A.$$

Es sei

$$n | a_n | \leq B \quad \text{für} \quad 1 \leq n \leq q.$$

Dann ist für jedes reelle φ

$$\sum_{n=1}^N a_n \sin n \varphi \leq A + 4B.$$

Beweis: Für jedes reelle φ gibt es ein reelles ϑ mit (2) und

$$|\varphi - \vartheta| \leq \frac{\pi}{2q}.$$

Für $1 \leq n \leq q$ ist

$$|\sin n \varphi - \sin n \vartheta| \leq n |\varphi - \vartheta| \leq \frac{\pi n}{2q} < \frac{2n}{q}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^q a_n \sin n \varphi &= \sum_{n=1}^q a_n \sin n \vartheta + \sum_{n=1}^q a_n (\sin n \varphi - \sin n \vartheta) \\ &\leq A + \sum_{n=1}^q \frac{B}{n} \frac{2n}{q} = A + 2B. \end{aligned}$$

Daher ist für jedes reelle φ und $0 \leq r < 1$

$$\sum_{n=1}^q a_n r^n \sin n \varphi \leq A + 2B.$$

⁴⁾ Vgl. Fußnote ¹²⁾ auf S. 83 meiner Arbeit.

Mit $r = 1 - \frac{1}{N}$ liefert dies

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \sin n \varphi &= \sum_{n=1}^N a_n (1 - r^n) \sin n \varphi + \sum_{n=1}^q a_n r^n \sin n \varphi - \sum_{n=N+1}^q a_n r^n \sin n \varphi \\ &\leq \sum_{n=1}^N \frac{B}{n} n (1 - r) + (A + 2B) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B}{N} r^n = A + 4B. \end{aligned}$$

Satz 2: Es sei $\chi(n)$ ein eigentlicher reeller Charakter mod k ,

$$\chi(-1) = 1,$$

$$M = \max_{m \geq 1} \left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right|,$$

N ganz,

$$1 \leq N \leq q = \left[\frac{k}{2} \right],$$

φ reell.

Dann ist

$$\sum_{n=1}^N \frac{\chi(n)}{\sin \frac{\pi n}{k}} \sin n \varphi \leq M \sqrt{k} + 2k.$$

Beweis: Setzt man $\varrho = e^{2\pi i/k}$, so ist bekanntlich

$$\sum_{n=-q}^q \chi(n) \varrho^{nl} = \chi(l) \tau_\chi, \quad |\tau_\chi| = \sqrt{k},$$

also für jedes ganze $m \geq 1$

$$\begin{aligned} M \sqrt{k} &\geq \tau_\chi \sum_{l=0}^m \chi(l) = \sum_{n=-q}^q \chi(n) \sum_{l=0}^m \varrho^{nl} = \sum_{\substack{n=-q \\ n \neq 0}}^q \chi(n) \frac{1 - \varrho^{n(m+1)}}{1 - \varrho^n} \\ &= \sum_{n=1}^q \chi(n) \left(\frac{1 - \varrho^{n(m+1)}}{1 - \varrho^n} + \frac{1 - \varrho^{-n(m+1)}}{1 - \varrho^{-n}} \right) = \sum_{n=1}^q \chi(n) \frac{\varrho^{n(m+1)} - 1 + \varrho^n - \varrho^{-nm}}{\varrho^n - 1} \\ &= \sum_{n=1}^q \chi(n) \frac{\varrho^{n(m+1)} - \varrho^{-nm}}{\varrho^n - 1} = \sum_{n=1}^q \frac{\chi(n)}{\sin \frac{\pi n}{k}} \sin \frac{2\pi n(m + \frac{1}{2})}{k}. \end{aligned}$$

Satz 1 mit

$$a_n = \frac{\chi(n)}{\sin \frac{\pi n}{k}}, \quad A = M \sqrt{k}, \quad B = \frac{k}{2}$$

gibt die Behauptung wegen

$$\frac{2\pi(m + \frac{1}{2})}{k} - \frac{2\pi(m - \frac{1}{2})}{k} = \frac{2\pi}{k} \leq \frac{\pi}{q}.$$

Satz 3: Es sei $k > 1$, $\chi(n)$ ein eigentlicher reeller Charakter mod k ,

$$\chi(-1) = 1,$$

$$M = \max_{m \geq 1} \left| \sum_{n=1}^m \chi(n) \right|,$$

$$\chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{für } 1 \leq n \leq \sqrt{\log k}, \quad 2 \nmid n.$$

Dann ist

$$M > P \sqrt{k} \log \log k.$$

Beweis: Aus Satz 2 mit

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad N = [\sqrt{\log k}] \left(\leq [\sqrt{k}] \leq \left[\frac{k}{2} \right] \right)$$

folgt

$$M \sqrt{k} \geq -2k + \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^N \frac{1}{\sin \frac{\pi n}{k}} \geq -2k + \frac{k}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ 2 \nmid n}}^N \frac{1}{n}.$$

Die rechte Seite ist

$$\sim \frac{k}{2\pi} \log N \sim \frac{k}{4\pi} \log \log k;$$

also ist

$$M > \frac{1}{5\pi} \sqrt{k} \log \log k \quad \text{für } k > P_2,$$

also stets

$$M > P \sqrt{k} \log \log k.$$

Hauptsatz: Für unendlich viele k gibt es ein eigentliches χ mit

$$M > P \sqrt{k} \log \log k.$$

Beweis: Für ganzes $x \geq 3$ setze man

$$T = 4 \prod_{2 < p \leq x} p \left(\leq 4 \prod_{2 < n \leq x} x = 4 x^{x-2} < x^x = e^{x \log x} < e^{x^2} \right)$$

und wähle $K = K(x)$ mit

$$\begin{cases} K \equiv 1 \pmod{4}, \\ K \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \quad \text{für } 2 < p \leq x, \\ 1 \leq K \leq T. \end{cases}$$

K ist kein Quadrat wegen $K \equiv -1 \pmod{3}$, also Diskriminante wegen $K \equiv 1 \pmod{4}$, also von der Form

$K = g^2 k$, $g = g(x)$ ganz, $k = k(x)$ positive Fundamentaldiskriminante.

Kein $p \leq x$ teilt K ; also ist $k > x$. Es ist

$$\left(\frac{K}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{für } 2 < p \leq x;$$

also gilt für den eigentlichen Charakter $\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right) \bmod k$

$$\chi(n) = \left(\frac{g^2 k}{n}\right) = \left(\frac{K}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für } 1 \leq n \leq x, 2 \nmid n,$$

also (da $k \leq K \leq T < e^{x^2}$)

$$\chi(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{ für } 1 \leq n \leq \sqrt{\log k}, 2 \nmid n.$$

Wegen $k > 0$, $k \equiv 1 \pmod{4}$ ist

$$\chi(-1) = 1.$$

Satz 3 lehrt also

$$M > P \sqrt{k} \log \log k$$

für ein $k > x$, also für unendlich viele k .

Berlin, den 14. Oktober 1932.

(Eingegangen am 15. Oktober 1932.)

Über ungerade schlichte Funktionen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Die Herren Littlewood und Paley¹⁾ bewiesen kürzlich:

Ist $a_1 = 1$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < 1$ regulär, ungerade und schlicht, so ist

$$|a_n| \leq p.$$

Das kam mir sehr unerwartet; denn seit einigen Jahren weiß ich aus mündlicher Tradition Fekete-Szegö, daß nicht

$$|a_5| \leq 1;$$

so daß die Vermutung

$$|a_n| \leq 1$$

der Herren Littlewood und Paley²⁾ sicher unzutreffend ist.

Ich lege eine kleine Umarbeitung des Littlewood-Paleyschen Beweises vor, die mit Potenzreihen statt Integralen arbeitet und insbesondere den von den Autoren aus einer älteren Littlewoodschen Arbeit übernommenen Satz (3) (den sie übrigens nur für $\lambda = 2/3$ anwenden) nicht voraussetzt.

Auch ich stütze mich auf den

Hilfssatz: Ist

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n x^n$$

¹⁾ A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients [The Journal of The London Mathematical Society 7 (1932), S. 167–169].

²⁾ L. c., S. 167, zweite Fußnote.

für $|x| < 1$ regulär und schlicht, so ist für $0 \leq r < 1$

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n} \leq \text{Max}_{|x|=r}^2 |g(x)|.$$

(Beweis bekanntlich:

$$\pi \text{Max}^2 \geq \text{Bildinhalt von } |x| \leq r.)$$

Auch ich benutze die Bieberbachsche Ungleichung

$$(2) \quad |g(x)| \leq \frac{|x|}{(1-|x|)^2} \text{ für } e_1 = 1.$$

Beweis des Littlewood-Paleyschen Satzes: Bekanntlich ist

$$F(x) = (f(\sqrt{x}))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (b_1 = 1)$$

für $|x| < 1$ regulär-schlicht, also desgleichen

$$\sqrt[3]{F(x^3)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad c_1 = 1,$$

und

$$\sqrt[6]{F(x^6)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \quad d_1 = 1.$$

Für $|x| < 1$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n \right)^3,$$

also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{3n-1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n d_n x^{n-1}, \\ n a_n &= \sum_{2\mu + \nu = 3n} c_{\mu} \nu d_{\nu}, \end{aligned}$$

$$(3) \quad n^3 |a_n|^3 \leq \sum_{\mu \leq \frac{3}{2}n} |c_{\mu}|^2 \sum_{\nu \leq 3n} \nu^2 |d_{\nu}|^2 \leq 3n \sum_{\mu \leq 2n} |c_{\mu}|^2 \sum_{\nu \leq 3n} \nu |d_{\nu}|^2.$$

Für $0 \leq r < 1$ ist nach (1) und (2) bei ganzem $m > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n |c_n|^2 r^{2n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n} \leq \text{Max}_{|x|=r}^{2/3} |F(x^3)| \\ &\leq (r^3 (1-r^3)^{-2})^{2/3} < (1-r)^{-4/3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m n |d_n|^2 r^{2n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n |d_n|^2 r^{2n} \leq \text{Max}_{|x|=r}^{2/6} |F(x^6)| \\ &\leq (r^6 (1-r^6)^{-2})^{1/3} < (1-r)^{-2/3}, \end{aligned}$$

also, $r = e^{-1/m}$ eingesetzt,

$$C_m = \sum_{n=1}^m n |c_n|^2 < e^2 (1-r)^{-4/3} < p_1 m^{4/3},$$

$$\sum_{n=1}^m n |d_n|^2 < e^2 (1-r)^{-2/3} < p_2 m^{2/3},$$

also mit $C_0 = 0$

$$\sum_{n=1}^m |c_n|^2 = \sum_{n=1}^m \frac{C_n - C_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{m-1} C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{C_m}{m} < p_3 m^{1/3}.$$

Nach (3) ist also

$$\begin{aligned} n^2 |a_n|^2 &< 3 n p_3 (2 n)^{1/3} p_2 (3 n)^{2/3}, \\ |a_n| &< p. \end{aligned}$$

Berlin, den 14. Oktober 1932.

(Eingegangen am 15. Oktober 1932.)

Über eine trigonometrische Ungleichung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Die Fejérsche Vermutung

$$S_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} > 0 \text{ für } 0 < x < \pi$$

wurde zuerst 1911 unabhängig von den Herren Jackson und Gronwall bewiesen. Folgender Beweis ist kürzer als alle bekannten.

Es sei $n > 1$ und der Satz für $n-1$ wahr. Aus

$$0 = 2 \sin \frac{x}{2} S'_n(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}$$

folgt für $0 < x < \pi$

$$\sin nx = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \sin \frac{x}{2} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ oder} \\ \sin x \end{Bmatrix} \geq 0,$$

$$S_n(x) \geq S_{n-1}(x) > 0.$$

$S_n(x)$ hat also für $0 < x < \pi$ kein Minimum ≤ 0 , also keinen Wert ≤ 0 .

Göttingen, den 1. November 1932.

(Eingegangen am 2. November 1932.)

Zu dem Integralsatz von Cauchy.

Von

Hans Heilbronn in Göttingen.

In einer kürzlich erschienenen gleichnamigen Arbeit¹⁾ macht Herr Kamke darauf aufmerksam, daß bisher für die folgende Fassung des Cauchyschen Satzes noch kein Beweis bekannt ist.

Satz: Ist $\mathfrak{C}$ eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve und ist die Funktion $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{C}$ regulär und auf dem aus dem Innern von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}$ selber bestehenden abgeschlossenen Bereich stetig, so gilt

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z) dz = 0,$$

wenn die Kurve $\mathfrak{C}$ in positivem Sinn durchlaufen wird.

Für diesen Satz gebe ich im folgenden einen Beweis, der sich stützt

1. auf den Riemannschen Abbildungssatz mit der Carathéodoryschen Verschärfung über die Ränderzuordnung²⁾,

2. auf den Fejérschen Satz, daß eine für $|x| \leq 1$ stetige und für $|x| < 1$ reguläre Funktion für $|x| = 1$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann³⁾,

3. auf die einfachsten Sätze über Stieltjes-Integrale⁴⁾.

Beweis: Es sei G das Innere von $\mathfrak{C}$ und $\bar{G} = G + \mathfrak{C}$. Dann gibt es nach Riemann, Carathéodory eine Funktion $g(x)$, die den abgeschlossenen Einheitskreis schlicht und stetig auf $\bar{G}$ und den offenen Einheitskreis

¹⁾ Mathem. Zeitschr. Bd. 35 (1932), S. 539—543.

²⁾ Siehe etwa Hurwitz-Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionen-theorie, 3. Aufl. (1929), S. 400—405.

³⁾ Siehe Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Mathem. Ann., Bd. 58 (1904), S. 51—69. Der dort bewiesene Satz besagt: Die Fouriersche Reihe einer stetigen Funktion der Periode 2π ist gleichmäßig $(C, 1)$ summabel. Wegen der formalen Gleichheit der Fourierreihe mit der Potenzreihe folgt hieraus, daß in unserem Falle die Potenzreihe auf dem Rand des Einheitskreises gleichmäßig $(C, 1)$ summabel ist, was den im Text genannten Satz enthält.

⁴⁾ Die gebrauchten Sätze stehen z. B. bei Perron, Die Lehre von den Ketten-brüchen, 2. Aufl. (1929), S. 362—367.

konform auf G abbildet. Also ist $f(g(x))$ eine Funktion, die für $|x| \leq 1$ stetig und für $|x| < 1$ regulär ist. Nach der Definition des komplexen Integrals ist

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) dz = \int_{|x|=1} f(g(x)) dg(x),$$

wo das rechtsstehende Stieltjes-Integral über den Einheitskreis zu nehmen ist. Die Frage, in welcher Richtung der Einheitskreis durchlaufen wird, ist für das Folgende belanglos, doch sei der Umlaufssinn von nun an fest. Nach dem Gesagten ist $f(g(x))$ für $|x| = 1$ gleichmäßig durch Polynome in x approximierbar, es genügt also zu zeigen, für jedes Polynom $P(x)$ ist

$$\int_{|x|=1} P(x) dg(x) = 0.$$

Da $P(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen von beschränkter Variation sind, ist

$$\int_{|x|=1} P(x) dg(x) = - \int_{|x|=1} g(x) dP(x) = - \int_{|x|=1} g(x) P'(x) dx = 0,$$

da $g(x)$ nach Fejér für $|x| = 1$ gleichmäßig durch Polynome $Q(x)$ approximierbar ist, und der Cauchysche Satz für das Polynom $Q(x) P'(x)$ trivial ist.

Zusatz bei der Korrektur: Ich bemerke, daß der im Text bewiesene Satz bereits bei Herrn Pollard, On the conditions for Cauchys theorem, Proc. of the Lond. Math. Soc. 21 (1923), S. 456—482, steht. Der dort angegebene Beweis ist elementar, aber komplizierter als der meinige.

(Eingegangen am 12. Juli 1932.)

Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

In verschiedenen Arbeiten¹⁾ habe ich einige Probleme aus dem Gebiet der abstrakten Verknüpfungen behandelt; dabei verstehe ich unter einer abstrakten Verknüpfung eine solche, bei der von jeder inhaltlichen Bedeutung der verknüpften Elemente und der verknüpfenden Operationen abgesehen wird. Hiernach sind z. B. die Theorie der abstrakten Gruppen und die moderne abstrakte Algebra Zweige der angegebenen Disziplin.

Gegenstand der früheren Arbeiten wie auch der vorliegenden ist die Untersuchung von Axiomensystemen, die die formal darstellbaren Eigenschaften einiger im Gebiet der gesamten Mathematik bedeutungsvollen Verknüpfungen zum Ausdruck bringen. Diese Verknüpfungen treten entweder paarweise, und dann durch ein distributives Gesetz miteinander verbunden, oder einzeln auf. Als wichtige Realisierungen der paarweise auftretenden Verknüpfungen sind anzusehen die Disjunktion $\mathfrak{D}(a, b)$ und die Konjunktion $\mathfrak{K}(a, b)$ der Aussagen a und b , die Vereinigung $V(a, b)$ und der Durchschnitt $D(a, b)$ der Mengen a und b , das Maximum $\max(a, b)$ und das Minimum $\min(a, b)$ der reellen Zahlen a und b , das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $v(a, b)$ und der größte gemeinschaftliche Teiler $t(a, b)$ der natürlichen Zahlen a und b . Wichtige Realisierungen der an zweiter Stelle genannten Verknüpfungen stellen die gewöhnliche Addition und Multiplikation dar, wobei die verknüpften Elemente natür-

¹⁾ Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik, Jahresber. d. D. Math. Ver. **38** (1929), S. 35—40; Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Ann. **105** (1931), S. 308—323 (Abkürzung: A. V. I); Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Ann. **106** (1932), S. 114—130 (Abkürzung: A. V. II).

Bei dieser Gelegenheit spreche ich Herrn A. Schmidt in Göttingen, der das Manuskript der vorliegenden Arbeit vor der Drucklegung eingesehen hat, für eine Reihe von Abänderungsvorschlägen meinen besten Dank aus.

liche Zahlen, aber auch gewisse algebraische Bereiche, z. B. bei der Multiplikation Ideale, sein können²⁾).

Insbesondere soll im folgenden gezeigt werden, daß die Axiomensysteme, die zur Erklärung der eben beschriebenen Verknüpfungen dienen, zu je zweien *gekoppelt* sind. Dabei nenne ich zwei Axiomensysteme A und B gekoppelt, wenn in jeder Menge, deren Elemente sich dem System A gemäß verknüpfen lassen, dem System B genügende Verknüpfungen konstruiert werden können und umgekehrt. Ebenfalls mögen derartig voneinander abhängige Verknüpfungen gekoppelt heißen. Eine bedeutsame Rolle bei der Lösung dieses Äquivalenzproblems spielt der bereits in A. V. II aufgestellte Zerlegungssatz, der den zugrunde gelegten Axiomensystemen entsprechend in drei verschiedenen Fassungen auftritt. Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz das von allen materialen Bestandteilen befreite formal-logische Gerüst des Hauptsatzes der elementaren Zahlen- und Idealtheorie darstellt, da er bei passender inhaltlicher Deutung der Elemente und Verknüpfungen in den letzteren übergeht³⁾.

§ 1.

Allgemeine Bemerkungen über zwei- und dreigliedrige Beziehungen.

1. Gleichheit und Ungleichheit. Daß das Element a gleich dem Element b bzw. ungleich dem Element b ist⁴⁾, werde durch $a = b$ bzw. $a \neq b$ ausgedrückt. Axiome:

I, 1. Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.

²⁾ Vgl. A. V. I, § 2 und A. V. II, § 1.

³⁾ Schon Dedekind ist bestrebt, bei der Theorie der Moduln und Ideale eine Trennung zwischen dem formalen Apparat und dem inhaltlichen Kern herbeizuführen; vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. (1894), Suppl. XI, S. 493 ff. (Abk.: Z. XI); Dedekind, Über eine Erweiterung des Symbols (a, b) in der Theorie der Moduln, Ges. Werke II (1931), Abh. XXVI, S. 59—85 (Abk.: W. XXVI); Derselbe, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, Ges. Werke II, Abh. XXVIII, S. 103—147 (Abk.: W. XXVIII); Derselbe, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Ges. Werke II, Abh. XXX, S. 236—271 (Abk.: W. XXX). Von neueren Arbeiten sei erwähnt: W. Krull, Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 481—503.

⁴⁾ Über das logische Verhältnis zwischen Identität und Verschiedenheit einerseits, Gleichheit und Ungleichheit andererseits ist folgendes zu bemerken. Die zuerst genannten Begriffe, ohne die kein formaler Apparat möglich ist und die darum selbst nicht rein formaler Natur sind, können in der Hauptsache nur inhaltlich, anschaulich, intuitiv eingeführt werden. Im Gegensatz dazu sind die an zweiter Stelle genannten Begriffe durchaus formal konstruierte. Die trotz aller Wesensverschiedenheit bestehende Verwandtschaft zwischen den zuerst und zuletzt genannten Begriffen beruht darauf, daß sich Identität und Verschiedenheit in ihren

I, 2. In bezug auf zwei beliebige⁵⁾ Elemente a und b gilt genau eine der Beziehungen $a = b$ und $a \neq b$.

I, 3. Für jedes Element a gilt $a = a$.

I, 4. Aus $a = b$ folgt $b = a$.

2. Zweigliedrige Beziehungen. Daß das Element a zu dem Element b in der Beziehung R steht, werde durch $a R b$ ausgedrückt. *Bereich* der Beziehung R heiße die Menge der geordneten Paare (a, b) , für die $a R b$ gilt. Axiome⁶⁾:

II, 1. Aus $a = a'$ und $a R b$ folgt $a' R b$.

II, 2. Aus $b = b'$ und $a R b$ folgt $a R b'$.

Zwei zweigliedrige Beziehungen R und S sind identisch, wenn sie in ihren Bereichen übereinstimmen.

3. Verknüpfungen. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b einer Menge M werde mit $a \circ b$ bezeichnet. Daß das Verknüpfungsergebnis wieder der Menge M angehört, werde durch

$$(1) \quad a \circ b = c$$

ausgedrückt. Zur Vermeidung von Mißverständnissen werde darauf hingewiesen, daß das Element c auf Grund der Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung *eindeutig* durch (1) bestimmt ist. *Bereich* der Verknüpfung $\circ$ heiße die Menge der geordneten Tripel $(a, b; c)$, für die (1) gilt. Axiome:

III, 1. Aus $a = a'$ folgt $a \circ b = a' \circ b$.

III, 2. Aus $b = b'$ folgt $a \circ b = a \circ b'$.

Zwei Verknüpfungen $\circ$ und $\wedge$ sind identisch, wenn sie in ihren Bereichen übereinstimmen.

4. Wir geben noch eine spezielle zweigliedrige Beziehung an, für die also die Axiome I, 1 bis I, 4 und II, 1 bis II, 2 verbindlich sind; die Aufstellung spezieller Verknüpfungen, für die entsprechend die Axiome I, 1 bis I, 4 und III, 1 bis III, 2 verbindlich sind, macht den Hauptteil der Arbeit aus.

formalen Eigenschaften vollständig wie Gleichheit und Ungleichheit verhalten. Das macht auch erklärlich, daß vielfach nicht zwischen Identität und Gleichheit bzw. Verschiedenheit und Ungleichheit zu unterschieden werden braucht.

Zu beachten ist ferner, daß die Gleichheit eine Vorzugsstellung vor den übrigen formal konstruierten Beziehungen einnimmt, insofern nämlich die letzteren erst relativ zur Gleichheit definiert werden, wie die Axiome II, 1 und II, 2, III, 1 und III, 2 zeigen. So hat auch die Eindeutigkeit einer Zuordnung erst Sinn in bezug auf eine vorgegebene Gleichheitsbeziehung. Vgl. A. V. I, § 1.

⁵⁾ Ist von „beliebigen“ Elementen die Rede, so können sich die Elementsymbole sowohl auf dasselbe als auch auf verschiedene Elemente beziehen.

⁶⁾ Ersichtlich genügen auch die Beziehungen der Gleichheit und Ungleichheit den Axiomen II, 1 und II, 2, so daß also kein Widerspruch mit den Axiomen I, 1 bis I, 4 vorliegt.

Beziehung zwischen Teil und Ganzem. Daß b Teil von a ist, werde durch $a > b$ ausgedrückt. Axiome:

IV, 1. Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.

IV, 2. Aus $a > b$, $b > a$ folgt $a = b$ und umgekehrt.

§ 2.

Die A-Menge.

Die Elemente $a, b, \dots$ einer Menge M seien einer Gleichheitsbeziehung und einer Verknüpfung fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit ab bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfung dient das folgende System von Axiomen⁷⁾, Lehrsätzen und Erklärungen.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c , so daß gilt $ab = c$.

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt $ab = ba$.

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$(ab)c = a(bc).$$

IV. Aus $ab = ab'$ folgt $b = b'$.

V. Es gibt ein Element e , so daß für jedes a gilt⁸⁾

$$ae = a.$$

VI. Aus $ab = e$ folgt $a = b = e$.

VII. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y , die bei festem a der Gleichung $xy = a$ genügen.

Erklärung. Das durch II, IV und V eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes Element* oder *Einheitselement*.

Hinsichtlich der Unabhängigkeit der Axiome I bis VII gilt folgendes:

IV ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei eine endliche Menge reeller Zahlen. ab bedeute $\max(a, b)$. Dann sind die Axiome I bis III und V bis VII erfüllt; die kleinste Zahl der Menge ist das ausgezeichnete Element. IV ist dagegen nicht in Kraft, denn aus

$$\max(a, b) = \max(a, b')$$

folgt nicht notwendigerweise $b = b'$.

⁷⁾ Axiome werden auch weiterhin durch römische Ziffern kenntlich gemacht.

⁸⁾ Es gibt also zu jedem a mindestens ein b , z. B. $b = ae$, so daß gilt $a = b$. Dann folgt aber in § 1 das Reflexivitätsgesetz der Gleichheit (I, 3) aus den Gesetzen der Transitivität (I, 1) und Symmetrie (I, 4).

V und VI sind von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind; ab bedeute das gewöhnliche Produkt.

VI ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei eine endliche abelsche Gruppe mit mehr als einem Element, z. B. ein Restklassensystem; ab bedeute die Verknüpfung der Elemente a und b in der Gruppe.

VII ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der reellen Zahlen r , für die im Sinn der Arithmetik $0 < r \leq 1$ gilt. ab bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b . Dann sind die Axiome I bis VI erfüllt; 1 ist das ausgezeichnete Element. VII ist dagegen nicht in Kraft, denn für $a < 1$ hat die Gleichung $xy = a$ unendlich viele Lösungen (x, y) , da für jedes x mit $a < x < 1$ stets ein der Gleichung genügendes y vorhanden ist.

Erklärung. Die Gleichung $a = bc$ sei mit $a > b$, also auch mit $a > c$ gleichbedeutend. a heiße *Oberelement* von b und c , jedes der letzteren *Unterelement* von a .

Die Beziehung $>$ ist vom Typus der zwischen Teil und Ganzem bestehenden Relation⁹⁾; für jedes a gilt insbesondere $a > a$ und $a > e$. Darüber hinaus kommen ihr die in den nachstehenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c , z. B. $c = ab$, so daß gilt $c > a$ und $c > b$; es gilt also stets

$$ab > a, \quad ab > b.$$

Satz 2. Aus $a_1 > b_1$ und $a_2 > b_2$ folgt

$$a_1 a_2 > b_1 b_2.$$

Satz 3. Ist $a > b$ und $a \neq b$, so hat b weniger Unterelemente als a .

Beweis: Jedes Unterelement von b ist auch Unterelement von a . Umgekehrt ist a nicht Unterelement von b .

⁹⁾ Daß z. B. das Axiom IV, 2 (§ 1) gilt, ergibt sich so:

Aus

$$a > b, \text{ d. h. } a = bx$$

und

$$b > a, \text{ d. h. } b = ay$$

folgt

$$a = axy,$$

also nach IV, V und VI

$$xy = e, \quad x = y = e, \quad a = b.$$

Anmerkung. Erwähnung verdient die nachstehende, hier aber nicht weiter benötigte Folgerung: Ist $a \neq e$ und b beliebig, so hat b weniger Unterelemente als ab . Wegen $ab > b$ und $ab \neq b$ sind nämlich die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt.

Satz 4. Ist $a \neq e$, so gibt es mindestens ein von e verschiedenes Unterelement p von a , das genau zwei Unterelemente, nämlich e und p , aufweist.

Beweis: Unter allen von e verschiedenen Unterelementen von a sei p eines mit einem Minimum von Unterelementen. Wegen VII gibt es derartige Elemente. Hätte nun p mehr als zwei Unterelemente, so gäbe es ein von e und p verschiedenes Unterelement von p , das Unterelement von a wäre und nach Satz 3 weniger Unterelemente als p hätte.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $xy = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e, y = a$ bzw. $x = a, y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a , so heiße a *Primelement*.

Der Satz 4 besagt dann, daß jedes von e verschiedene a mindestens ein Primelement als Unterelement hat. Primelemente sind also vorhanden, sobald die Anzahl der Elemente von M größer als 1 ist.

Satz 5. Für jedes von e verschiedene a existiert mindestens eine Darstellung von der Form

$$a = p_1 \dots p_n,$$

wo die Elemente $p_1, \dots, p_n$ Primelemente sind.

Beweis: Nach Satz 4 und IV gilt

$$a = p_1 a_1, a \neq a_1.$$

Ist $a_1 \neq e$, so verfährt man mit a_1 entsprechend. Das damit eingeleitete Verfahren kommt wegen Satz 3 nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Abschluß.

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = xy, b = xz$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, y = a, z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b , also auch b fremd zu a .

e ist zu jedem Element fremd. Ist p Primelement und a beliebig, so gilt entweder $a > p$, oder a und p sind fremd zueinander. Zwei verschiedene Primelemente sind fremd zueinander.

VIII. Ist ab Oberelement von c , und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: Es sei g eine von 1 verschiedene natürliche Zahl. Die Menge M bestehe aus 1 und allen Potenzen von g mit natürlichen Exponenten, mit Ausnahme von g selbst. ab bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b . Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII erfüllt; 1 ist das ausgezeichnete Element. VIII ist aber nicht durchweg in Kraft. Es sei nämlich

$$a = g^2, \quad b = g^4, \quad c = g^3.$$

Dann gilt $ab = c^2$, d. h. $ab > c$; ferner hat das Gleichungssystem

$$a = xy, \quad c = xz$$

die einzige Lösung

$$x = 1, \quad y = a, \quad z = c,$$

so daß c fremd zu a ist. Es ist aber nicht $b > c$.

Die Axiome I bis VIII sind miteinander verträglich.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfung.

Erklärung. Eine Menge mit einer den Axiomen I bis VIII genügenden Elementverknüpfung heiße A-Menge.

Satz 6. Ist a fremd zu b und fremd zu c , so ist a auch fremd zu bc .

Beweis: Es sei a nicht fremd zu bc . Dann gibt es ein Element x , so daß gilt

$$(2) \quad a > x, \quad bc > x, \quad x \neq e.$$

Nach Satz 4 gibt es ein Primelement p , das Unterelement von x ist, so daß also stattfindet

$$a > p, \quad bc > p.$$

Nun gilt entweder $b > p$, oder b und p sind fremd zueinander. Im ersten Fall wäre p gemeinsames Unterelement von a und b und im zweiten Fall nach VIII gemeinsames Unterelement von a und c ; beides verstößt gegen die Voraussetzung¹⁰⁾.

Satz 7. Sind $p, p_1, \dots, p_m$ Primelemente und gilt

$$p_1 \dots p_m > p,$$

so ist p gleich mindestens einem p_μ .

Beweis: Es sei $p \neq p_m$, also p fremd zu p_m . Nach VIII folgt

$$p_1 \dots p_{m-1} > p.$$

¹⁰⁾ Ohne Verwendung des Begriffs des Primelements läßt sich (2) so widerlegen: Entweder ist b fremd zu x , oder b und x haben ein von e verschiedenes gemeinsames Unterelement. Im ersten Fall folgt $c > x$, also c nicht fremd zu a ; im zweiten Fall ist b nicht fremd zu a . Beides widerspricht der Voraussetzung.

Ist dann $p \neq p_{m-1}$, so folgt weiter

$$p_1 \dots p_{m-2} > p.$$

Das Schlußverfahren bricht dadurch ab, daß sich einmal $p = p_\mu$ ergibt.

Satz 8. Sind $p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_n$ Primelemente und gilt

$$p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_n,$$

so stimmt die Gesamtheit der p_μ mit der Gesamtheit der q_ν überein.

Beweis: Nach Satz 7 ist p_m gleich mindestens einem q_ν ; es sei etwa $p_m = q_n$. Wegen IV folgt

$$p_1 \dots p_{m-1} = q_1 \dots q_{n-1},$$

so daß entsprechend weiter geschlossen werden kann.

Die Vereinigung der Sätze 5 und 8 ergibt den für die Elemente einer A-Menge geltenden Zerlegungssatz, nämlich

Satz 9. Für jedes von e verschiedene a gilt

$$(3) \quad a = p_1^{\delta_1} \dots p_n^{\delta_n},$$

wobei $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primelemente, $\delta_1, \dots, \delta_n$ natürliche Zahlen sind und p^δ angibt, daß p genau δ -mal mit sich selbst verknüpft werden soll; diese Darstellung — sie möge als *kanonische* bezeichnet werden — ist eindeutig, wenn von der Reihenfolge der Elemente abgesehen wird.

Satz 10. Für ein Element a mit der kanonischen Darstellung (3) durchläuft der Ausdruck

$$(4) \quad p_1^{\epsilon_1} \dots p_n^{\epsilon_n}$$

die Gesamtheit aller Unterelemente, wenn unabhängig voneinander jedes ϵ_ν die zugehörige Reihe $0, 1, \dots, \delta_\nu$ durchläuft, wobei $p_\nu^0 = e$ zu setzen ist. Die Anzahl aller Unterelemente von a ist somit $\prod_{\nu=1}^n (\delta_\nu + 1)$.

Beweis: Jedes Element (4) ist Unterelement von a . Umgekehrt ist jedes von e verschiedene Unterelement von a in der Form (4) enthalten. Wäre letzteres nämlich nicht der Fall für ein Unterelement u , so müßte u entweder ein nicht der Reihe $p_1, \dots, p_n$ angehörendes Primelement als Unterelement besitzen oder aber ein solches, etwa p_ν , das in einer höheren als der δ_ν -ten Potenz vorhanden wäre. Beides widerspricht der Eindeutigkeit der kanonischen Darstellung von a .

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = e$.

Satz 11. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

so findet statt

$$ab = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots p_m^{\alpha_m + \beta_m}.$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Satz 12. Eine A-Menge besteht entweder aus einem einzigen oder aus unendlich vielen Elementen, und zwar sind beide Möglichkeiten realisiert.

Beweis: α) Die aus der Zahl 1 bestehende Menge M stellt eine A-Menge dar, wenn die gewöhnliche Multiplikation als Verknüpfungsvorschrift genommen wird.

β) Die Anzahl der Elemente von M sei endlich, etwa gleich n mit $n > 1$; $a_1, \dots, a_n$ seien die verschiedenen Elemente. Das Element $a_1 \dots a_n$ gehört der Menge an; die Bezeichnung kann so gewählt werden, daß gilt

$$a_1 \dots a_n = a_n.$$

Daraus folgt nach V und IV

$$a_1 \dots a_{n-1} = e,$$

also nach VI

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = e.$$

Daß auch $a_n = e$ ist, ergibt sich so: Entweder gilt

$$a_n a_n = a_n$$

oder

$$a_n a_n = e.$$

Jede dieser Gleichungen zieht aber $a_n = e$ nach sich.

§ 3.

Die B-Menge.

Wie in § 2 seien die Elemente der zugrunde gelegten Menge M einer Gleichheitsbeziehung und einer Verknüpfung fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit $a \circ b$ bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfung dient das folgende System von Axiomen, Lehrsätzen und Erklärungen.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c , so daß gilt

$$a \circ b = c.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

IV. Für jedes Element a gilt

$$a \circ a = a.$$

V. Es gibt ein Element e , so daß für jedes a gilt

$$a \circ e = a.$$

VI. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y , die bei festem a der Gleichung $x \circ y = a$ genügen.

Erklärung. Das durch II und V eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes Element* oder *Einheitselement*.

Hinsichtlich der Unabhängigkeit der Axiome I bis VI gilt folgendes:

IV ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen. $a \circ b$ bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b , so daß 1 das ausgezeichnete Element ist.

V ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der von 1 verschiedenen Teiler einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

VI ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: Es sei ϱ eine feste reelle Zahl. M sei die Menge der reellen Zahlen r , für die im Sinn der Arithmetik gilt $r \geq \varrho$. Unter $a \circ b$ werde $\max(a, b)$ verstanden, so daß ϱ das ausgezeichnete Element ist.

Erklärung. Die Gleichung $a = b \circ c$ sei mit $a > b$, also auch mit $a > c$ gleichbedeutend¹¹⁾. a heiße *Oberelement* von b und c , jedes der letzteren *Unterelement* von a .

Die Beziehung $>$ ist vom Typus der zwischen Teil und Ganzem bestehenden Relation¹²⁾; für jedes a gilt insbesondere $a > a$ und $a > e$. Darüber hinaus kommen ihr die in den nachstehenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c , z. B. $c = a \circ b$, so daß gilt $c > a$ und $c > b$; es gilt also stets

$$a \circ b > a, a \circ b > b.$$

¹¹⁾ An Stelle der Definitionsgleichung $a = b \circ c$ kann auch wie in A. V. II, § 1 die formal einfachere $a = a \circ b$ genommen werden.

¹²⁾ Daß z. B. das Axiom IV, 2 (§ 1) gilt, ergibt sich so: aus

$$a > b, \text{ d. h. } a = b \circ x$$

und

$$b > a, \text{ d. h. } b = a \circ y$$

folgt nach IV

$$a \circ b = b \circ x = a, a \circ b = a \circ y = b.$$

Satz 2. Aus $a_1 > b_1$ und $a_2 > b_2$ folgt

$$a_1 \circ a_2 > b_1 \circ b_2;$$

insbesondere folgt aus $a > b$ und $a > c$ stets

$$a > b \circ c.$$

Satz 3. Ist $a > b$ und $a \neq b$, so hat b weniger Unterelemente als a .

Beweis: Vgl. § 2, Satz 3.

Satz 4. Ist $a \neq e$, so gibt es mindestens ein von e verschiedenes Unterelement p von a , das genau zwei Unterelemente aufweist, nämlich e und p .

Beweis: Vgl. § 2, Satz 4.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $x \circ y = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e, y = a$ bzw. $x = a, y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a , so heiße a *Primelement*.

Der Satz 4 besagt dann, daß jedes von e verschiedene a mindestens ein Primelement als Unterelement hat.

Zu dem Satz 5 des § 2, der wesentlich von dem dortigen Eindeutigkeitsaxiom IV abhängt, gibt es kein Analogon.

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = x \circ y, \quad b = x \circ z$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, \quad y = a, \quad z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b , also auch b fremd zu a .

e ist zu jedem Element fremd. Ist p Primelement und a beliebig, so gilt entweder $a > p$, oder a und p sind fremd zueinander. Zwei verschiedene Primelemente sind fremd zueinander.

VII. Ist $a \circ b$ Oberelement von c , und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: p, q und r seien verschiedene Primzahlen. M bestehe aus den im Sinn der Arithmetik gebildeten Zahlen

$$a = pq, \quad b = pr, \quad c = qr, \quad d = pqr$$

und dem ausgezeichneten Element $e = 1$. Unter $x \circ y$ werde $v(x, y)$ verstanden. Dann sind die Axiome I bis VI in Geltung; $x > y$ besagt, daß x Vielfaches von y ist. VII ist aber nicht durchweg in Kraft, denn obwohl

$$a \circ b > c$$

gilt, ist c sowohl fremd zu a als auch fremd zu b .

Der Unabhngigkeitsbeweis kann auch mit der etwas komplizierter gebauten Menge geführt werden, die im Anschluß an Satz 5 Verwendung

findet. Die Feststellung, daß bereits drei Primzahlen zur Herstellung einer geeigneten Menge ausreichen, verdanke ich Herrn A. Schmidt.

Satz 5. Ist a fremd zu b und fremd zu c , so ist a auch fremd zu $b \circ c$.

Beweis: Vgl. § 2, Satz 6.

Der Satz 5 ist nicht mit VII gleichwertig. Zwar folgt dieser Satz, wie eben angegeben, aus I bis VII; umgekehrt ist aber VII, wie sofort gezeigt werden soll, keine Folge von I bis VI und Satz 5. Offenbar genügt es, eine Menge zu konstruieren, für die I bis VI und Satz 5 in Kraft sind, während VII nicht erfüllt wird¹³⁾. Es seien p , q , r und s verschiedene Primzahlen. M bestehe aus den im Sinn der Arithmetik gebildeten Zahlen

$$a = pr, \quad b = qs, \quad c = qrs, \quad d = pqrs$$

und dem ausgezeichneten Element $e = 1$. Unter $x \circ y$ werde $v(x, y)$ verstanden. Dann sind die Axiome I bis VI in Geltung. Daß auch Satz 5 gilt, zeigt eine vollständige Aufzählung der Paare fremder Elemente. e ist fremd zu allen Elementen; a ist nur fremd zu e , b und c ; b ist nur fremd zu e und a ; c ist nur fremd zu e und a ; d ist nur zu e fremd. In allen nach dieser Übersicht möglichen Fällen ist Satz 5 in Kraft. Dagegen wird VII nicht erfüllt; trotzdem nämlich $a \circ b > c$ stattfindet und c fremd zu a ist, gilt nicht $b > c$, sondern $c > b$.

Erklärung. Ist in der Menge aller Unterelemente von a genau ein Primelement vorhanden — dasselbe sei mit p bezeichnet —, so heiße a *Primärelement* über p .

Der Grund zur Bildung dieses Begriffes, der eine natürliche Weiterentwicklung des Begriffs des Primelements darstellt, liegt in seiner Bedeutung für die Formulierung des in M gültigen Zerlegungssatzes¹⁴⁾.

Satz 6. Ist a Primärelement über p , $a > b$ und $b \neq e$; dann ist auch b Primärelement über p .

Beweis: Wäre b nicht Primärelement über p , so gäbe es ein von p verschiedenes Primelement q , so daß gilt $b > q$, also $a > q$, was unzulässig ist.

Folgerung. $\alpha)$ Ist a Primärelement über p und b ein beliebiges Element, so sind entweder a und b fremd zueinander, oder die a und b

¹³⁾ Das leistet die dem vorhergehenden Unabhängigkeitsbeweis zugrunde gelegte Menge nicht, denn dort ist a zwar fremd zu b und fremd zu c , es ist aber nicht a fremd zu $b \circ c$, so daß Satz 5 nicht gilt.

¹⁴⁾ Vermittelt derselben Definition läßt sich auch in einer A-Menge der Begriff des Primärelements aufstellen; doch ist bei einer solchen Menge diese Einführung überflüssig, da zur Formulierung des Zerlegungssatzes der Begriff des Primelements vollständig ausreicht.

gemeinsamen und von e verschiedenen Unterelemente sind Primärelemente über p .

β) Primärelemente über verschiedenen Primelementen sind fremd zueinander; zueinander fremde Primärelemente gehören zu verschiedenen Primelementen.

Satz 7. Sind a und b Primärelemente über p , dann ist auch $a \circ b$ Primärelement über p .

Beweis: Es ist $a \circ b \neq e$. Wäre $a \circ b$ nicht Primärelement über p , so gäbe es ein von p verschiedenes Primelement q , so daß gilt $a \circ b > q$. Diese Beziehung kann nicht stattfinden, da q fremd zu a und b , also nach Satz 5 auch fremd zu $a \circ b$ ist.

Satz 8. Ist c Primärelement über p , sind a und b fremd zueinander und gilt $a \circ b > c$, so ist c Unterelement von genau einem der Elemente a und b .

Beweis: Nach Satz 6, Folgerung α) sind a und c entweder fremd zueinander oder haben p als gemeinsames Unterelement. Dasselbe gilt in bezug auf b und c . So ergeben sich hinsichtlich des Verhaltens von c zu a und b vier Möglichkeiten, von denen aber die beiden folgenden ausscheiden: Wegen Satz 5 kann c nicht zugleich fremd zu a und b sein; ferner kann p auch nicht gemeinsames Unterelement von a , b und c sein. c muß also zu genau einem der Elemente a und b fremd und nach VII Unterelement des anderen sein.

Satz 9. Ist b Primärelement über p , sind die Elemente

$$(5) \quad a_1, \dots, a_n \quad (n > 1)$$

zu je zweien fremd und gilt

$$a_1 \circ \dots \circ a_n > b,$$

so ist b Unterelement von genau einem der Elemente (5).

Satz 10. Es seien $b_1, \dots, b_m$ Primärelemente über nicht notwendigerweise verschiedenen Primelementen. Es seien die Elemente (5) zu je zweien fremd. Gilt dann

$$a_1 \circ \dots \circ a_n > b_1 \circ \dots \circ b_m,$$

so ist jedes b_μ Unterelement von genau einem der Elemente (5).

Satz 11. Es seien $p_1, \dots, p_l$ verschiedene Primelemente; es sei a_λ Primärelement über p_λ für $\lambda = 1, \dots, l$. Es seien $q_1, \dots, q_m$ verschiedene Primelemente; es sei b_μ Primärelement über q_μ für $\mu = 1, \dots, m$. Gilt dann

$$a_1 \circ \dots \circ a_l = b_1 \circ \dots \circ b_m,$$

so stimmt die Gesamtheit der a_λ mit der Gesamtheit der b_μ überein; d. h. die Darstellung

$$(6) \quad a = a_1 \circ \dots \circ a_l$$

des Elements a , wobei die a_i Primärelemente über verschiedenen Primelementen sind, ist, abgesehen von der Anordnung, eindeutig, wenn sie überhaupt möglich ist.

VIII. Wenn $a \neq e$ und a kein Primärelement ist, gibt es zwei von a verschiedene Elemente b und c , so daß gilt $a = b \circ c$.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: α, β', β'' und γ seien verschiedene Punkte. M habe zu Elementen die Punktmenge

$$(\alpha), (\alpha, \beta'), (\alpha, \beta''), (\alpha, \beta', \beta''), (\alpha, \beta', \beta'', \gamma).$$

$a \circ b$ bedeute $V(a, b)$. Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII in Kraft; (α) ist ausgezeichnetes Element; (α, β') und (α, β'') sind Primelemente. VIII ist nicht in Kraft, denn für das Element

$$a = (\alpha, \beta', \beta'', \gamma),$$

das von e verschieden und kein Primärelement ist, gibt es keine Darstellung

$$a = b \circ c, \quad a \neq b, \quad a \neq c.$$

Satz 12. Jedes von e verschiedene Element a läßt sich in der Form (6) darstellen.

Beweis: Ist a Primärelement, so gilt der Satz. Ist a kein Primärelement, so gibt es nach VIII eine Zerlegung

$$a = b \circ c, \quad a \neq b, \quad a \neq c;$$

nach Satz 3 haben dabei b und c weniger Unterelemente als a . Wie vorher mit a wird nun mit b und c verfahren. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten entsteht auf diese Weise eine Gleichung von der Form

$$a = a_1 \circ \dots \circ a_n,$$

wobei die a_i Primärelemente sind, allerdings nicht notwendigerweise über verschiedenen Primelementen. Nach Satz 7 lassen sich aber alle Primärelemente über demselben Primelement zu einem Primärelement zusammenfassen, womit eine Zerlegung (6) erreicht ist.

Die Vereinigung der Sätze 11 und 12 ergibt den für die Elemente von M geltenden Zerlegungssatz, nämlich

Satz 13. Jedes von e verschiedene Element a läßt sich eindeutig in der Form (6) darstellen, wenn von der Anordnung abgesehen wird.

IX. Sind a und b verschiedene Primärelemente über demselben Primelement, so gilt entweder $a > b$ oder $b > a$.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: α, β, γ' und γ'' seien verschiedene Punkte. M habe zu Elementen die Punktmenge

$$(\alpha), (\alpha, \beta), (\alpha, \beta, \gamma'), (\alpha, \beta, \gamma''), (\alpha, \beta, \gamma', \gamma'').$$

$a \circ b$ bedeute $V(a, b)$. Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII in Kraft; (α) ist ausgezeichnetes Element; (α, β) ist Primelement; die übrigen Elemente sind Primärelemente über (α, β) , so daß auch dem nichts über Primärelemente aussagenden Axiom VIII nicht widersprochen wird. IX ist jedoch nicht in Kraft, denn es gilt weder

$$(\alpha, \beta, \gamma') > (\alpha, \beta, \gamma'')$$

noch

$$(\alpha, \beta, \gamma'') > (\alpha, \beta, \gamma').$$

Satz 14. Für ein Primärelement a über p ist charakteristisch, daß sich die Unterelemente nach der Beziehung $>$ linear ordnen lassen, und zwar kann die Bezeichnung so gewählt werden, daß gilt

$$p^{(\delta)} > \dots > p^{(1)} > p^{(0)},$$

wobei jedes Element nur einmal vorkommt, δ eine natürliche Zahl und

$$p^{(\delta)} = a, \quad p^{(1)} = p, \quad p^{(0)} = e$$

ist.

Beweis: Daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, folgt aus der Erklärung des Primärelements; die Notwendigkeit folgt aus IX.

Satz 15. Für jedes von e verschiedene a gilt

$$(7) \quad a = p_1^{(\delta_1)} \circ \dots \circ p_n^{(\delta_n)},$$

wobei $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primelemente und $\delta_1, \dots, \delta_n$ natürliche Zahlen sind; diese Darstellung — sie möge als *kanonische* bezeichnet werden — ist eindeutig, wenn von der Reihenfolge der Elemente abgesehen wird.

Beweis: Satz 13 und 14.

Satz 16. Für ein Element a mit der kanonischen Darstellung (7) durchläuft der Ausdruck

$$(8) \quad p_1^{(\varepsilon_1)} \circ \dots \circ p_n^{(\varepsilon_n)}$$

die Gesamtheit aller Unterelemente, wenn unabhängig voneinander jedes ε , die zugehörige Reihe $0, 1, \dots, \delta_v$ durchläuft. Die Anzahl aller Unterelemente von a ist somit $\prod_{v=1}^n (\delta_v + 1)$.

Beweis: Jedes Element (8) ist Unterelement von a . Umgekehrt kann kein Unterelement u von a andere Primelemente wie a enthalten, auch kann u kein Primärelement $p_v^{(\varepsilon_v)}$ mit $\varepsilon_v > \delta_v$ enthalten. Bei kanonischer Darstellung ist u also von der Form (8).

Satz 17. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\alpha_m)} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\beta_m)} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

so findet statt

$$a \circ b = p_1^{(\delta_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\delta_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Der Beweis ergibt sich vermittelt der Sätze 13 und 7 dieses Paragraphen und der nach Axiom IX für $\alpha \geq \beta$ bestehenden Gleichung

$$p^{(\alpha)} \circ p^{(\beta)} = p^{(\alpha)}.$$

X. Über jedem Primelement gibt es beliebig viele Primärelemente. Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden *unabhängig*.

Beweis: M sei die Menge der Teiler einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

Die Axiome I—X sind miteinander *verträglich*.

Beweis: M habe zu Elementen 1 und alle Zahlen g^n , wenn g eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl ist und n die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

Erklärung. Eine Menge mit einer den Axiomen I—X genügenden Elementverknüpfung heiße B-Menge.

§ 4.

Die B'-Menge.

Die Elemente der zugrunde gelegten Menge M seien einer Gleichheitsbeziehung und *zweier* Verknüpfungen fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit $a \cup b$ bzw. $a \cap b$ bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfungen dient das folgende System von Axiomen, Lehrsätzen und Erklärungen¹⁵⁾. Eingehend sind diese Verknüpfungen in A. V. II behandelt, so daß an dieser Stelle nur so viel darüber gebracht zu werden braucht, wie zur Erreichung des eingangs gesetzten Zieles erforderlich ist.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c , so daß gilt

$$a \cup b = c,$$

¹⁵⁾ Ein ähnliches Axiomensystem ist Gegenstand einer Untersuchung von Herrn K. Menger, vgl. dessen Bemerkungen zu Grundlagenfragen IV, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 37 (1928), S. 309 ff.

und ein Element d , so daß gilt

$$a \cap b = d.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt

$$a \cup b = b \cup a, \quad a \cap b = b \cap a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c), \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c).$$

IV. Aus $a \cup b = a$ folgt $a \cap b = b$ und umgekehrt.

V. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c).$$

VI. Für jedes Element a gilt $a \cup a = a$.

VII. Es gibt ein Element e , so daß für jedes a gilt $a \cup e = a$.

VIII. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y , die bei festem a der Gleichung $x \cup y = a$ genügen.

Erklärung. Das durch VII gekennzeichnete und durch II eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes Element* oder *Einheits-element*.

Erklärung. Die Gleichung $a = b \cup c$ sei mit $a > b$, also auch mit $a > c$ gleichbedeutend. a heiße *Oberelement* von b und c , jedes der letzteren *Unterelement* von a .

Die Beziehung $>$ besitzt dieselben Eigenschaften wie die in § 3 erklärte; insbesondere gelten die dortigen Sätze 1—4.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $x \cup y = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$, $y = a$ bzw. $x = a$, $y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a , so heiße a *Primelement*.

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = x \cup y, \quad b = x \cup z$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, \quad y = a, \quad z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b , also auch b fremd zu a .

Satz. Ist $a \cup b$ Oberelement von c , und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Der Beweis dieses Satzes (vgl. A. V. II, § 4, Satz 16), der sowohl in einer A-Menge als auch in einer B-Menge unbeweisbar ist, beruht wesentlich auf dem distributiven Gesetz V, dessen Bedeutung für den Aufbau des Systems damit in ein helles Licht gerückt wird.

Hiermit ist der Anschluß an § 3 erreicht, so daß auch der dortige Satz 5 gilt.

Erklärung. Ist in der Menge aller Unterelemente von a genau ein Primelement vorhanden — dasselbe sei mit p bezeichnet —, so heiße a *Primärelement* über p .

Es gelten also die Sätze 6—11 des § 3.

IX. Wenn $a \neq e$ und a kein Primärelement ist, gibt es zwei von a verschiedene Elemente b und c , so daß gilt $a = b \cup c$.

Es gelten also die Sätze 12 und 13 des § 3.

X. Sind a und b verschiedene Primärelemente über demselben Primelement, so gilt entweder $a > b$ oder $b > a$.

Es gelten also die Sätze 14—16 des § 3. Der Satz 17 des § 3 ist ebenfalls in Kraft, daneben das auf die Verknüpfung $\cap$ bezügliche Gegenstück; beide lassen sich zu dem folgenden Satz zusammenfassen:

Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\alpha_m)} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\beta_m)} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

so findet statt

$$(9) \quad a \cup b = p_1^{(\delta_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\delta_m)}$$

$$(9') \quad a \cap b = p_1^{(\varepsilon_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\varepsilon_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Zum Beweis der Gleichung (9') ist das distributive Gesetz heranzuziehen.

XI. Über jedem Primelement gibt es beliebig viele Primärelemente.

Daß dieses Axiom von den vorhergehenden unabhängig als auch damit verträglich ist, wird ähnlich wie bei einer B-Menge gezeigt.

Erklärung. Eine Menge mit zwei den Axiomen I—XI genügenden Elementverknüpfungen heiße B' -Menge.

Zum Abschluß dieses Paragraphen mögen noch einige Sätze Erwähnung finden, die, obwohl sie zur Lösung des eingangs gestellten Problems nicht benötigt werden, zur Klärung der zwischen den Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ bestehenden Verwandtschaftsverhältnisse beitragen. Überdies sind diese Sätze für die Dedekindsche Theorie der Moduln und Ideale von Bedeutung; insbesondere stellt der erste derselben die Gültigkeit des nicht postulierten dualen Gegenstücks zu V fest. Es sei noch bemerkt, daß zur Herleitung dieser Sätze nicht alle hier vorausgesetzten Axiome erforderlich sind.

1. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt¹⁶⁾

$$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c).$$

Beweis: Für $a = b = c$ ist der Satz richtig. Ist mindestens eins der Elemente a , b und c von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a , b und c ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\alpha_m)} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\beta_m)} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

$$c = p_1^{(\gamma_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\gamma_m)} \quad (\gamma_\mu \geq 0),$$

so findet statt

$$(a \cap b) \cup c = p_1^{(\delta_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\delta_m)},$$

$$(a \cup c) \cap (b \cup c) = p_1^{(\epsilon_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\epsilon_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max [\min (\alpha_\mu, \beta_\mu), \gamma_\mu],$$

$$\epsilon_\mu = \min [\max (\alpha_\mu, \gamma_\mu), \max (\beta_\mu, \gamma_\mu)].$$

Wegen der Gleichheit der rechts stehenden Ausdrücke ist damit die Behauptung bewiesen.

2. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt¹⁷⁾

$$(a \cup c) \cap (b \cup c) = c \cup [a \cap (b \cup c)],$$

$$(a \cap c) \cup (b \cap c) = c \cap [a \cup (b \cap c)].$$

Die Richtigkeit dieser dual sich entsprechenden Formeln ergibt sich dadurch, daß man die rechten Seiten auf Grund der distributiven Gesetze umformt.

3. Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt¹⁸⁾

$$[a \cup (b \cap c)] \cap (b \cup c) = [a \cap (b \cup c)] \cup (b \cap c).$$

Es ist beachtenswert, daß zum Beweis dieses Satzes nur eines der beiden distributiven Gesetze herangezogen zu werden braucht.

4. Ist a beliebig, so bedingen sich die Gleichungen¹⁹⁾

$$(10) \quad b = b \cup c,$$

$$(11) \quad b \cap (a \cup c) = (b \cap a) \cup c$$

gegenseitig.

¹⁶⁾ W. XXVIII, S. 110.

¹⁷⁾ Z. XI, S. 499 und W. XXVIII, S. 110—111.

¹⁸⁾ W. XXVIII, S. 115 und W. XXX, S. 239.

¹⁹⁾ Z. XI, S. 498 und W. XXX, S. 239.

Beweis: Aus (10) folgt (11), wie sich aus

$$(b \cap a) \cup c = (b \cup c) \cap (a \cup c)$$

unter Berücksichtigung von (10) ergibt. Aus (11) folgt (10), wie sich aus den für zwei beliebige Elemente x und y geltenden Beziehungen

$$b > b \cap x, \quad y \cup c > c$$

für

$$x = a \cup c, \quad y = b \cap a$$

unter Berücksichtigung von (11) ergibt.

Das duale Gegenstück dieses Satzes erhält man, wenn man b mit c vertauscht.

§ 5.

Die Koppelung der Axiomensysteme.

Nach diesen Vorbereitungen ist das Äquivalenzproblem schnell erledigt. Die Behandlung geschieht in der Weise, daß innerhalb jeder der betrachteten Mengen geeignete Verknüpfungen erklärt werden derart, daß jeweils die den beiden anderen Mengen unterlegten Axiome befriedigt werden. Auf den im allgemeinen leicht zu erbringenden Nachweis, daß dabei den Axiomen des § 1 und den jeweils in Frage kommenden speziellen Axiomen der §§ 2—4 genügt wird, gehen wir nur an einer Stelle näher ein.

1. Jede B' -Menge ist offenbar hinsichtlich der Verknüpfung $\cup$ eine B -Menge. Umgekehrt läßt sich jede B -Menge folgendermaßen zu einer B' -Menge ausbauen. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\alpha_m)} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\beta_m)} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

so werde gesetzt

$$a \cup b = p_1^{(\delta_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\delta_m)},$$

$$a \cap b = p_1^{(\varepsilon_1)} \circ \dots \circ p_m^{(\varepsilon_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m);$$

im Falle $a = b = e$ werde gesetzt

$$e \cup e = e \cap e = e.$$

Es gilt also, wie es auch sein muß,

$$a \cup b = a \circ b.$$

2. Jede B' -Menge, also auch jede B -Menge, kann folgendermaßen als A -Menge interpretiert werden. Unter denselben Voraussetzungen wie oben werde gesetzt²⁰⁾

$$a \circ b = p_1^{(\alpha_1 + \beta_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\alpha_m + \beta_m)}, \quad e \circ e = e.$$

Daß z. B. das Axiom VIII des § 2 in Kraft ist, ergibt sich wie folgt. Es sei

$$c = p_1^{(\gamma_1)} \cup \dots \cup p_m^{(\gamma_m)} \quad (\gamma_\mu \geq 0).$$

Ist nun $a \circ b$ Oberelement von c , so gilt

$$\gamma_\mu \leq \alpha_\mu + \beta_\mu \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Ist ferner c fremd zu a , so haben c und a keine gemeinsamen Unter-elemente außer e , d. h. wenn $\gamma_\mu > 0$ ist, ist $\alpha_\mu = 0$. Folglich gilt für alle Exponenten

$$\gamma_\mu \leq \beta_\mu,$$

so daß c Unterelement von b ist.

Umgekehrt kann folgendermaßen jede A -Menge als B' -Menge und damit auch als B -Menge interpretiert werden. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \dots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

so werde gesetzt

$$a \cup b = p_1^{\delta_1} \dots p_m^{\delta_m},$$

$$a \cap b = p_1^{\varepsilon_1} \dots p_m^{\varepsilon_m}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \quad (\mu = 1, \dots, m);$$

im Fall $a = b = e$ werde gesetzt

$$e \cup e = e \cap e = e.$$

3. Gekoppelte Verknüpfungen hängen vermöge eines distributiver Gesetzes zusammen; es besteht nämlich der Satz:

Für drei beliebige Elemente a , b und c gilt

$$a(b \cup c) = ab \cup ac \quad \text{und} \quad a(b \cap c) = ab \cap ac.$$

²⁰⁾ Die Existenz von $p_u^{(\alpha_u + \beta_u)}$ gewährleistet XI in § 4.

Zum Beweise setze man

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \quad (\alpha_\mu \geq 0),$$

$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} \quad (\beta_\mu \geq 0),$$

$$c = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} \quad (\gamma_\mu \geq 0)$$

und berücksichtige

$$\alpha_\mu + \max(\beta_\mu, \gamma_\mu) = \max(\alpha_\mu + \beta_\mu, \alpha_\mu + \gamma_\mu),$$

$$\alpha_\mu + \min(\beta_\mu, \gamma_\mu) = \min(\alpha_\mu + \beta_\mu, \alpha_\mu + \gamma_\mu).$$

Noch einige Bemerkungen. Die Eigenschaft, Einheitselement bzw. Primelement bzw. Primärelement zu sein, kommt einem Element absolut zu, d. h. unabhängig davon, ob M im Sinne der hier dargelegten Kopplung als A-, B- oder B'-Menge aufgefaßt wird; p^{δ} und $p^{(\delta)}$ bedeuten also dasselbe Element. In gleicher Weise gelten auch die Beziehungen absolut: a ist Oberelement von b bzw. b ist Unterelement von a , a und b sind fremd zueinander. Während jedoch die Verknüpfungen $\circ$ und $\cup$ identisch sind, gilt im allgemeinen nur

$$ab > a \cup b,$$

wobei

$$ab = a \cup b$$

dann und nur dann stattfindet, wenn a und b fremd zueinander sind.

(Eingegangen am 3. August 1931.)

Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze.

Von

L. Berwald in Prag.

Die Herren Egerváry¹⁾ und Lipka²⁾ haben vor kurzem zu dem bekannten Satz von Kakeya³⁾, daß die Nullstellen eines Polynoms

$$(A) \quad f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

alle absolut größer als Eins sind, wenn $c_0 > c_1 > \dots > c_n > 0$, ein Gegenstück angegeben, das folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Das Polynom $f(x)$ hat keine Nullstelle auf dem Rand und k Nullstellen im Innern des Einheitskreises, wenn

$$(B) \quad \begin{aligned} c_{\nu-1} - 2c_\nu + c_{\nu+1} &> 0 \\ (\nu = -1, 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n, n+1; \\ c_\sigma &= 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n). \end{aligned}$$

Während Herr Egerváry diesen Satz mittels eines Satzes von Pellet⁵⁾ direkt beweist, führt ihn Herr Lipka auf ein allgemeineres Theorem (Satz 1 der vorliegenden Arbeit) zurück, das er mit Hilfe eines einfachen

¹⁾ E. Egerváry, On a generalisation of a theorem of Kakeya. Acta Litterarum ac Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae 5 (1931), S. 78—82.

²⁾ St. Lipka, Zur Theorie der algebraischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten. Ebenda, S. 69—77.

³⁾ S. Kakeya, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhoku Math. Journ. 2 (1912), S. 140—142.

⁴⁾ Im folgenden wird der Grad n eines Polynoms immer > 1 vorausgesetzt und $x = \infty$ als $n - m$ -fache Nullstelle gerechnet, wenn

$$c_m \neq 0, c_{m+1} = c_{m+2} = \dots = c_n = 0. \quad (m \geq 1).$$

⁵⁾ A. E. Pellet, Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange. Bull. sc. math. (2) 5 (1881), S. 393—395. — Vgl. auch Egerváry¹⁾ und J. L. Walsh, On Pellet's theorem concerning the roots of a polynomial. Annals of Math. (2) 26 (1924), S. 59—64.

funktionentheoretischen Hilfssatzes aus den Ergebnissen des Herrn Fejér⁶⁾ über Kosinuspolynome mit konvexem Koeffizientenpolygon gewinnt. Bei dem Versuch, das Theorem des Herrn Lipka möglichst elementar zu beweisen, bemerkte ich, daß es nur ein erstes Glied aus einer Reihe ganz ähnlicher Sätze ist, die alle ihre Quelle in den Fejérschen Resultaten haben.

Im folgenden werden die einfachsten dieser Sätze abgeleitet (Sätze 2, 4, 6), von denen einer (Satz 2) eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von Kakeya darstellt. Der gemeinsame Grundzug dieser Sätze besteht darin, daß aus gewissen in den Koeffizienten eines Polynoms linearen Ungleichungen Aussagen über die Anzahl der Nullstellen des Polynoms im Innern des Einheitskreises und auf seinem Rand gefolgert werden. Sie ergeben sich durch ganz einfache Betrachtungen aus einigen Hilfssätzen über reziproke Gleichungen, die unmittelbar aus einem der Fejérschen Ergebnisse folgen, mit Hilfe eines mit dem Satze von Rouché⁷⁾ verwandten Hilfssatzes (Hilfssatz 5).

Insbesondere wird unter anderem ein mit dem angeführten Satz von Egerváry und Lipka verwandtes Theorem (Satz 5) aufgestellt und ein Resultat von Lipka verschärft (Satz 7).

Durch die angewandte Methode wird der Satz von Kakeya und die mit ihm verwandten Sätze *in einheitlicher Weise* auf die Fejérschen Ergebnisse über Kosinuspolynome mit konvexem Koeffizientenpolygon zurückgeführt.

§ 1.

Hilfssätze.

1. Unseren Ausgangspunkt bildet folgender Satz von Fejér⁸⁾:
Das reelle Kosinuspolynom

$$(1) \quad A(\varphi) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2 \varphi + \dots + A_m \cos m \varphi$$

ist beständig positiv, wenn die Folge der Zahlen

$$(2) \quad A_0, A_1, A_2, \dots, A_m, 0, 0$$

⁶⁾ L. Fejér, Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeyaschen Satzes. Jahresber. D. Math.-Ver. **38** (1929), S. 231—238. Vgl. auch: Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. (Erste Mitteilung.) Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae **2** (1925), S. 75—86.

⁷⁾ E. Rouché, Mémoire sur la série de Lagrange. Journ. de l'école polytechnique **22** (cahier 39), (1862), S. 193—224.

⁸⁾ a. a. O. ⁶⁾, Satz 4.

eigentlich konvex ist, d. h. wenn

$$(3) \quad A_{v-1} - 2A_v + A_{v+1} > 0 \\ (\nu = 1, 2, \dots, m+1; A_{m+1} = A_{m+2} = 0)$$

gilt.

Wir wenden zunächst diesen Satz an, um für die verschiedenen Typen von reellen *reziproken Polynomen* (d. h. solchen Polynomen, bei denen zwei gleich weit von den Enden entfernte Koeffizienten stets gleich oder stets entgegengesetzt gleich sind) Aussagen über das Verschwinden am Rande des Einheitskreises zu gewinnen.

Für ein reelles Polynom von der Gestalt

$$(4) \quad \Re(x) = a_m + a_{m-1}x + \dots + a_1x^{m-1} + a_0x^m + a_1x^{m+1} + \dots + a_mx^{2m}$$

gilt, wenn $a_\nu = A_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$) gesetzt wird:

$$(5) \quad \Re(e^{i\varphi}) = 2e^{im\varphi} A(\varphi),$$

wo $A(\varphi)$ das Kosinuspolynom (1) bedeutet. Wir können also den Satz von Fejér auch in folgender Weise aussprechen:

Hilfssatz 1. Wenn die Folge

$$(6) \quad a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0 \quad (m \geq 1)$$

eigentlich konvex ist, so hat das reelle reziproke Polynom (4) keine Nullstelle auf dem Rande des Einheitskreises.

Ein Polynom der Form

$$(7) \quad a_m + a_{m-1}x + \dots + a_0x^m + a_0x^{m+1} + \dots + a_{m-1}x^{2m} + a_mx^{2m+1}$$

gibt, durch $1+x$ dividiert, das Polynom

$$(8) \quad A_m + A_{m-1}x + \dots + A_1x^{m-1} + A_0x^m + A_1x^{m+1} + \dots + A_mx^{2m},$$

wo

$$(9) \quad A_m = a_m, A_{m-1} = a_{m-1} - a_m, \dots, \\ A_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^m a_m.$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes 1 auf das Polynom (8) erhalten wir den auch für $m=0$ richtigen

Hilfssatz 2. Wenn die Folge

$$(10) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^m a_m, \\ a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{m-1} a_m, \dots, a_{m-1} - a_m, a_m, 0, 0$$

eigentlich konvex ist, so hat das reelle reziproke Polynom (7) auf dem Rande des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x = -1$. Die Voraussetzung ist gewiß erfüllt, wenn

$$(11) \quad a_0 \geq 3a_1, a_1 \geq 3a_2, \dots, a_{m-2} \geq 3a_{m-1}, a_{m-1} > 3a_m > 0.$$

Die letzte Aussage folgt leicht aus den Bedingungen

$$(12) \quad \begin{cases} a_\nu - 3a_{\nu+1} + 4(a_{\nu+2} - a_{\nu+3} + \dots + (-1)^{m-\nu} a_m) > 0, \\ (\nu = 0, 1, \dots, m; a_\varrho = 0 \text{ für } \varrho > m) \end{cases}$$

für die eigentliche Konvexität der Folge (10)⁹⁾.

Ein Polynom von der Gestalt

$$(13) \quad a_m + a_{m-1}x + \dots + a_0x^m - a_0x^{m+1} - \dots - a_{m-1}x^{2m} - a_mx^{2m+1}$$

gibt, durch $1-x$ dividiert ein Polynom (8) mit

$$(14) \quad A_m = a_m, A_{m-1} = a_{m-1} + a_m, \dots, A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

Die Forderung (3) bedeutet für die Folge der a_ν ($\nu = 0, 1, \dots, m$):

$$(15) \quad a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_m > 0.$$

Hieraus folgt der auch für $m=0$ richtige

Hilfssatz 3. Wenn die Folge

$$(16) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, 0$$

im eigentlichen Sinne monoton abnimmt, so hat das reelle reziproke Polynom (13) auf dem Rande des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x=1$.

Endlich gibt ein reziprokes Polynom vom Typus

$$(17) \quad a_m + a_{m-1}x + \dots + a_1x^{m-1} - a_1x^{m+1} - \dots - a_{m-1}x^{2m-1} - a_mx^{2m},$$

durch $1-x^2$ dividiert, ein Polynom der Gestalt (8) vom Grade $2m-2$ mit den Koeffizienten

$$(18) \quad \begin{cases} A_{m-1} = a_m, A_{m-2} = a_{m-1}, A_{m-3} = a_{m-2} + a_m, \\ A_{m-4} = a_{m-3} + a_{m-1}, \\ A_{m-5} = a_{m-4} + a_{m-2} + a_m, \dots, A_0 = a_1 + a_3 + a_5 + \dots; \\ (a_\varrho = 0 \text{ für } \varrho > m). \end{cases}$$

Die Anwendung des Hilfssatzes 1 auf dieses Polynom ergibt für das Polynom (17) den

Hilfssatz 4. Wenn die Folge

$$(19) \quad \begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots, a_2 + a_4 + a_6 + \dots, \\ a_3 + a_5 + \dots, a_4 + a_6 + \dots, \\ \dots, a_{m-1}, a_m, 0, 0; (a_\varrho = 0 \text{ für } \varrho > m; m \geq 1) \end{cases}$$

⁹⁾ Aus (9) ergibt sich ferner:

$$a_0 = A_0 + A_1, a_1 = A_1 + A_2, \dots, a_{m-1} = A_{m-1} + A_m, a_m = A_m.$$

Die Folge $a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0$ ist also sicher eigentlich konvex, wenn es die Folge (10) ist. Die Umkehrung gilt nicht.

eigentlich konvex ist, so hat das reelle reziproke Polynom (17) auf dem Rande des Einheitskreises nur die beiden einfachen Nullstellen $x = 1$ und $x = -1$. Die Voraussetzung ist gewiß erfüllt, wenn

$$(20) \quad a_1 \geq 2a_2, \quad a_2 \geq 2a_3, \quad \dots, \quad a_{m-2} \geq 2a_{m-1}, \quad a_{m-1} > 2a_m > 0.$$

Die letzte Aussage folgt leicht aus den Bedingungen

$$(21) \quad \begin{cases} a_r - 2(a_{r+1} - a_{r+2} + \dots + (-1)^{m-r+1} a_m) > 0 \\ (\nu = 1, 2, \dots, m; a_\varrho = 0 \text{ für } \varrho > m) \end{cases}$$

für die eigentliche Konvexität der Folge (19).

2. Um aus diesen Hilfssätzen über reziproke Polynome Sätze über die Anzahl der Nullstellen eines reellen Polynoms im Innern und am Rande des Einheitskreises zu gewinnen, benutzen wir den folgenden

Hilfssatz 5. Wenn für zwei Polynome $\varphi(x)$, $\psi(x)$ auf dem Rande eines Kreises K beständig

$$(22) \quad |\varphi(x)| = |\psi(x)| \neq 0$$

ist, und

$$\varphi(x) + \psi(x)$$

i Nullstellen im Innern und r Nullstellen auf dem Rande von K hat, so haben $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mindestens i und höchstens $i + r$ Nullstellen im Innern (und keine Nullstelle auf dem Rande von K)¹⁰).

Dieser Satz, in dem die Voraussetzung, daß $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Polynome sind und daß das betrachtete Gebiet ein Kreis ist, übrigens durch eine allgemeinere ersetzt werden könnte, läßt sich als eine Ergänzung zu dem bekannten Satz von Rouché⁷⁾ ansehen.

Beweis: Wir betrachten die Schar von Polynomen

$$\Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda) \varphi(x) + \psi(x) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Für $0 < \lambda \leq 1$ kann $\Phi(x, \lambda)$ auf dem Rande von K nicht verschwinden. Für $\lambda = 1$ ist es durch die Voraussetzung (22) ausgeschlossen. Wäre aber für $0 < \lambda < 1$ und einen Randpunkt x_0 $\Phi(x_0, \lambda) = 0$, so würde daraus

$$|\varphi(x_0)| > |(1 - \lambda) \varphi(x_0)| = |\psi(x_0)|$$

folgen, was der Voraussetzung (22) widerspricht.

Läßt man also λ von Null ausgehend stetig gegen Eins wachsen, so kann — weil die Nullstellen eines Polynoms stetige Funktionen der

¹⁰⁾ Im Falle $r = 0$ kann die Voraussetzung (22) durch

$$(22^0) \quad |\varphi(x)| = |\psi(x)|$$

auf dem Rande von K ersetzt werden, weil an einer gemeinsamen Nullstelle von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf dem Rande von K auch $\varphi(x) + \psi(x)$ Null wäre.

Koeffizienten sind -- die Anzahl der Nullstellen von $\Phi(x, \lambda)$ im Innern von K sich nur im ersten Augenblick ändern, indem eine gewisse Anzahl von Nullstellen des Polynoms $\Phi(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x)$ vom Rande des Kreises K ins Innere treten (während die übrigen auf dem Rande liegenden Nullstellen notwendigerweise in das Äußere des Kreises K rücken). Da das Polynom $\varphi(x) + \psi(x)$ nach Voraussetzung r Nullstellen auf dem Rande von K hat, so ist diese Anzahl mindestens Null und höchstens r .

Das Polynom

$$\Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda) \varphi(x) + \psi(x) \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

hat also mindestens i und höchstens $i + r$ Nullstellen im Innern des Kreises K und keine auf dem Rande. Damit ist der Satz für

$$\Phi(x, 1) = \psi(x)$$

bewiesen. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind aber offenbar gleichberechtigt.

§ 2.

Sätze über die Anzahl der Nullstellen reeller Polynome im Einheitskreis.

3. Wir gehen nun zu den Sätzen über reelle Polynome über, die sich mittels des Hilfssatzes 5 aus den vorhergehenden Hilfssätzen ableiten lassen.

Satz 1 (von Lipka)¹¹⁾. Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

ein reelles Polynom, k eine ganze Zahl, so daß $0 \leq k \leq n$, ferner $m = \text{Max}(k, n - k)$ und

$$(23) \quad a_v = c_{k+v} + c_{k-v} \quad (0 \leq v \leq m; c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n).$$

Wenn die Folge

$$(24) \quad a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0$$

eigentlich konvex ist, so hat das Polynom $f(x)$ k Nullstellen innerhalb und $n - k$ Nullstellen außerhalb des Einheitskreises.

Beweis: Wir setzen

$$(25) \quad x^{m+k} f\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x), \quad x^{m-k} f(x) = \psi(x)$$

¹¹⁾ a. a. O.²⁾, Satz 4. Der Satz gilt auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten, wenn die jetzt durch

$$a_v = c_{k+v} + \bar{c}_{k-v}$$

zu erklärenden Zahlen a_v reell sind. (Überstreichen bedeutet den Übergang zu der konjugiert komplexen Zahl.)

und ordnen dem Polynom $f(x)$ und der ganzen Zahl k das reziproke Polynom

$$(26) \quad R(x) = \varphi(x) + \psi(x) = a_m + a_{m-1}x + \dots \\ + a_1 x^{m-1} + a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \dots + a_m x^{2m}$$

zu.

Wegen der Voraussetzung über die Folge (24) hat nach Hilfssatz 1 $R(x)$ keine Nullstelle auf dem Rande des Einheitskreises. Hieraus folgt, daß

$$(27) \quad |\varphi(x)| = |\psi(x)| \neq 0 \quad (\text{für } |x| = 1).$$

Denn $f(x)$ ist nach Voraussetzung ein reelles Polynom; also gilt für $|x| = 1$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(\bar{x}) = \overline{f(x)},$$

und daher nach (25) $|\varphi(x)| = |\psi(x)|$ für $|x| = 1$. $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ für $|x| = 1$ ist ausgeschlossen, da $R(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises nicht verschwindet.

$R(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ hat m Nullstellen im Innern und keine Nullstelle auf dem Rande des Einheitskreises. Nach Hilfssatz 5 besitzt also $\varphi(x)$ gleichfalls m Nullstellen im Innern und keine Nullstelle auf dem Rande des Einheitskreises. Aus der zweiten Gleichung (25) ergibt sich jetzt Satz 1.

Aus Satz 1 folgt, wie Herr Lipka²⁾ gezeigt hat, fast unmittelbar der in der Einleitung ausgesprochene Satz von Egerváry und Lipka.

4. Satz 2 (Verallgemeinerung des Satzes von Kakeya).
Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

ein reelles Polynom, k eine ganze Zahl, so daß $0 \leq k \leq n+1$, und $m = \text{Max}(k-1, n-k)$. Die Zahlen

$$(28) \quad a_\nu = c_{k+\nu} - c_{k-\nu-1} \quad (0 \leq \nu \leq m; c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n)$$

seien positiv und monoton abnehmend:

$$(29) \quad a_0 > a_1 > \dots > a_m > 0.$$

Dann hat das Polynom $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die einfache Nullstelle $x = 1$ und im Innern des Einheitskreises k oder $k-1$ Nullstellen, je nachdem $f(1) > 0$ oder ≤ 0 .

Beweis: Wir setzen

$$(30) \quad x^{m+k} f\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x), \quad -x^{m+1-k} f(x) = \psi(x)$$

und ordnen dem Polynom $f(x)$ und der ganzen Zahl k das reziproke Polynom

$$(31) \quad R(x) = \varphi(x) + \psi(x) = a_m + a_{m-1}x + \dots \\ + a_0 x^m - a_0 x^{m+1} - \dots - a_{m-1} x^{2m} - a_m x^{2m+1}$$

zu. Wegen (29) hat $R(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x = 1$ (Hilfssatz 3). Da wieder $|\varphi(x)| = |\psi(x)|$ für $|x| = 1$, so können auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die Nullstelle $x = 1$ haben.

Es sei zunächst $f(1) \neq 0$. Dann gilt wieder (27). Somit hat nach Hilfssatz 5 $\psi(x)$ innerhalb des Einheitskreises entweder m oder $m+1$, $f(x) = -x^{k-1-m} \psi(x)$ entweder $k-1$ oder k , $\varphi(x) = x^{m+k} f\left(\frac{1}{x}\right)$ entweder $m+1$ oder m Nullstellen, wobei einander die ersten Möglichkeiten entsprechen und ebenso die zweiten. Nach dem Beweis des Hilfssatzes 5 tritt die erste oder zweite Möglichkeit ein, je nachdem in der Schar von Polynomen

$$(32) \quad \Phi(x, \lambda) = (1 - \lambda) \varphi(x) + \psi(x) = R(x) - \lambda \varphi(x), \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

die Nullstelle $x = 1$ des Polynoms $\Phi(x, 0) = R(x)$ in das Äußere oder Innere des Einheitskreises rückt, wenn λ von Null aus stetig wächst. Es handelt sich darum, festzustellen, wann jeder der beiden Fälle eintritt.

Dazu schlagen wir um den Punkt $x = 1$ als Mittelpunkt einen Kreis $\mathfrak{R}$, dessen Radius $r < 1$ so klein ist, daß

$$1. \text{ alle Nullstellen von } \Phi(x, 0) = R(x) \text{ außer } x = 1 \text{ außerhalb } \mathfrak{R} \text{ liegen, und} \\ 2. \text{ sgn } f(x) = \text{sgn } f(1) \text{ für } \frac{1}{1+r} < x < 1+r.$$

Hierauf wählen wir ein λ_0 ($0 < \lambda_0 < 1$) so klein, daß die der Nullstelle $x = 1$ von $\Phi(x, 0)$ entsprechende Nullstelle x_1 von $\Phi(x, \lambda_0)$ innerhalb eines Kreises $\mathfrak{R}^*$ um $x = 1$ als Mittelpunkt mit dem Radius $\frac{r}{1+r}$ liegt, während alle anderen Nullstellen von $\Phi(x, \lambda_0)$ außerhalb $\mathfrak{R}^*$ liegen. Eine solche Wahl ist möglich, weil die Nullstellen der Polynome $\Phi(x, \lambda)$ von den Koeffizienten und daher auch von dem Parameter λ in stetiger Weise abhängen.

Der Kreis $\mathfrak{R}^*$ ist zur reellen Achse symmetrisch. Das Polynom $\Phi(x, \lambda_0)$ ist reell und x_1 die einzige Nullstelle von $\Phi(x, \lambda_0)$ innerhalb $\mathfrak{R}^*$. Also ist x_1 reell. Wegen

$$\Phi(1, \lambda_0) = -\lambda_0 f(1) \neq 0$$

ist ferner $x_1 \neq 1$. Somit gilt

$$(33) \quad \frac{1}{1+r} < x_1 < 1 + \frac{r}{1+r} < 1+r, \quad (x_1 \neq 1).$$

x_1 liegt in demjenigen der beiden Intervalle

$$(34) \quad \frac{1}{1+r} < x < 1, \quad 1 < x < 1+r,$$

in dem die Bedingung

$$(35) \quad \operatorname{sgn} (R(x) \varphi(x)) = 1$$

erfüllt ist, die für das Verschwinden von $\Phi(x, \lambda_0) = R(x) - \lambda_0 \varphi(x)$ notwendig ist.

Nach der Definition von $\varphi(x)$ und der zweiten Annahme über den Kreis $\mathfrak{K}$ ist in beiden Intervallen (34)

$$\operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn} f(1).$$

Andererseits ist wegen (29)

$$R'(1) = -a_0 - 3a_1 - 5a_2 - \dots - (2m+1)a_m < 0.$$

Aus der ersten Annahme über den Kreis $\mathfrak{K}$ und aus $R(1) = 0$ folgt also

$$R(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } \frac{1}{1+r} < x < 1, \\ < 0 & \text{für } 1 < x < 1+r, \end{cases}$$

und daher

$$(36) \quad \operatorname{sgn} (R(x) \varphi(x)) = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(1) & \text{für } \frac{1}{1+r} < x < 1, \\ -\operatorname{sgn} f(1) & \text{für } 1 < x < 1+r. \end{cases}$$

Die Nullstelle $x = 1$ von $R(x)$ rückt somit in das Innere des Einheitskreises, wenn $f(1) > 0$, in das Äußere, wenn $f(1) < 0$.

Wenn $f(1) = 0$, so ist nach (30) auch $\varphi(1) = \psi(1) = 0$. Aus (30) folgt weiter

$$\varphi'(1) = \psi'(1) = -f'(1)$$

und aus (31)

$$\varphi'(x) + \psi'(x) = R'(x).$$

Nun ist $R'(1) \neq 0$. Also ist $\varphi'(1) = \psi'(1) = -f'(1) \neq 0$, und daher

$$\Phi'(1, \lambda) = (1 - \lambda) \varphi'(1) + \psi'(1) = (\lambda - 2) f'(1) \neq 0, \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Alle Polynome $\Phi(x, \lambda)$ der Schar (32) haben also jetzt die *einfache* Nullstelle $x = 1$. Von den übrigen $2m$ Nullstellen von $\Phi(x, 0) = R(x)$ liegen m Nullstellen innerhalb, m außerhalb des Einheitskreises. Daran kann sich nichts ändern, wenn λ von Null bis Eins wächst, weil für $0 \leq \lambda \leq 1$ $x = 1$ eine *einfache* Nullstelle von $\Phi(x, \lambda)$ und für alle Randpunkte außer $x = 1$ $|\varphi(x)| = |\psi(x)| \neq 0$, daher auch $\Phi(x, \lambda) \neq 0$ ist. Somit hat auch $\Phi(x, 1) = \varphi(x)$ m Nullstellen, $f(x)$ $k-1$ Nullstellen innerhalb des Einheitskreises und auf den Rand des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x = 1$.

Der Fall $f(1) = 0$ läßt sich übrigens auch auf Satz 1 zurückführen. Die Bedingungen (29) für die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ sind

nämlich identisch mit den Bedingungen für die eigentliche Konvexität der a ,-Folge (24), die gemäß (23) — nur mit $k-1$ an Stelle von k — aus den Koeffizienten des Polynoms $\frac{f(x)}{x-1}$ gebildet wird. Nach Satz 1 hat also das Polynom $\frac{f(x)}{x-1}$ $k-1$ Nullstellen innerhalb und $n-k$ Nullstellen außerhalb des Einheitskreises, w. z. b. w.

Der Satz von Kakeya ist in Satz 2 für $k=0$, also $m=n$ enthalten. Er folgt ohne jede weitere Betrachtung aus den Hilfssätzen 3 und 5, da von der durch Hilfssatz 5 offen gelassenen Alternative, daß $x^{n+1}f(x) = -\psi(x)$ n oder $n+1$ Nullstellen innerhalb des Einheitskreises hat, die erste Möglichkeit ausscheidet.

Aus Satz 2 folgt insbesondere:

Satz 3. Wenn für die Koeffizienten des reellen Polynoms

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

die Ungleichungen

$$(29^*) \quad 0 > c_0 > c_1 > \dots > c_{k-1}; \quad c_k > c_{k+1} > \dots > c_n > 0, \\ (0 \leq k \leq n+1; \quad c_{-1} = c_{n+1} = 0)$$

gelten, so hat das Polynom $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die einfache Nullstelle $x=1$ und im Innern des Einheitskreises k oder $k-1$ Nullstellen, je nachdem $f(1) > 0$ oder ≤ 0 .

Beiläufig sei bemerkt, daß für $1 \leq k \leq n$ Satz 3 zu folgender Aussage verschärft werden kann, die sich mit Hilfe des in der Einleitung genannten Satzes von Pellet⁵⁾ leicht beweisen läßt:

Für die Koeffizienten des reellen Polynoms $f(x)$ gelte (29*) mit $1 \leq k \leq n$. Ferner sei p die einzige positive Nullstelle von $f(x)$. Dann sind $k-1$ Nullstellen von $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als die kleinere, und $n-k$ Nullstellen ihrem Betrage nach größer als die größere der Zahlen 1, p .

5. Satz 4. Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

ein reelles Polynom, k eine ganze Zahl, so daß $0 \leq k \leq n+1$, und $m = \text{Max}(k-1, n-k)$. Für die Zahlen

$$(37) \quad a_v = c_{k+v} + c_{k-v-1} \quad (0 \leq v \leq m; \quad c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n)$$

$$(38) \quad a_0 \geq 3a_1, \quad a_1 \geq 3a_2, \quad \dots \quad a_{m-2} \geq 3a_{m-1}, \quad a_{m-1} > 3a_m > 0.$$

Dann hat das Polynom $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die einfache Nullstelle $x=-1$, und im Innern des Einheitskreises k oder $k-1$ Nullstellen, je nachdem $(-1)^k f(-1) > 0$ oder ≤ 0 .

Die Voraussetzungen (38) können auch durch (12) ersetzt werden.

Den Beweis des Satzes 4 skizzieren wir nur soweit als notwendig, weil er im Einzelnen ganz analog zu führen ist, wie der Beweis des Satzes 2.

Wir setzen jetzt

$$(39) \quad x^{m+k} f\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x), \quad x^{m+1-k} f(x) = \psi(x),$$

und ordnen den Polynom $f(x)$ und der ganzen Zahl k das reziproke Polynom

$$(40) \quad R(x) = \varphi(x) + \psi(x) = a_m + a_{m-1}x + \dots + a_0x^m \\ + a_0x^{m+1} + \dots + a_mx^{2m+1}$$

zu, das wegen (38) nach Hilfssatz 2 auf dem Rande des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x = -1$ hat.

Ebenso wie beim Beweis des Satzes 2 schließt man, daß im Falle $f(-1) \neq 0$ das Polynom $f(x)$ k oder $k-1$ Nullstellen innerhalb des Einheitskreises hat, je nachdem in der Schar von Polynomen (32) — wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $R(x)$ jetzt durch (39) bzw. (40) definiert sind — die Nullstelle $x = -1$ des Polynoms $R(x)$ in das Innere oder in das Äußere des Einheitskreises rückt, wenn λ von Null ausgehend stetig wächst. Man überlegt, wie dort, daß die Nullstelle $x = -1$ zunächst auf der reellen Achse bleibt.

Für das Verschwinden von (32) für hinreichend wenig von -1 verschiedene reelle x ist wieder die Bedingung (35) notwendig. Nun ist für solche x

$$\operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn} (-1)^{m+k} f(-1)$$

und

$$\operatorname{sgn} R(x) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{wenn } x > -1, \\ (-1)^{m-1}, & \text{wenn } x < -1. \end{cases}$$

Die letzte Bedingung folgt daraus, daß $R(-1) = 0$, und daß in $R'(-1) = (-1)^m [a_0 - 3a_1 + 5a_2 - 7a_3 + \dots + (-1)^m (2m+1)a_m]$ rechts in der eckigen Klammer eine positive Zahl steht¹²⁾.

¹²⁾ Es ist

$$\begin{aligned} & a_0 - 3a_1 + 5a_2 - 7a_3 + 9a_4 - 11a_5 + \dots + (-1)^m (2m+1)a_m \\ = & a_0 - 3a_1 + 4a_2 - 4a_3 + 4a_4 - 4a_5 + \dots + (-1)^m 4a_m \\ & + a_2 - 3a_3 + 4a_4 - 4a_5 + \dots + (-1)^m 4a_m \\ & + a_4 - 3a_5 + \dots + (-1)^m 4a_m \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Hier sind die Summen in den einzelnen Zeilen nach (12) positiv.

Es ist also für hinreichend wenig von -1 abweichende reelle x

$$(41) \quad \operatorname{sgn}(R(x) \varphi(x)) = \begin{cases} (-1)^k f(-1), & \text{wenn } x > -1, \\ (-1)^{k-1} f(-1), & \text{wenn } x < -1, \end{cases}$$

woraus die Behauptung für $f(-1) \neq 0$ folgt.

Im Falle $f(-1) = 0$ zeigt man ähnlich wie beim Beweis des Satzes 2, daß $f(x)$ und alle Polynome (32) auf dem Rande des Einheitskreises nur die einfache Nullstelle $x = -1$ haben. Hieraus schließt man wieder, daß $\varphi(x)$ innerhalb des Einheitskreises m , $f(x) = x^{k-m-1} \varphi(x)$ also $k-1$ Nullstellen hat. Man kann auch Satz 1 benutzen.

Aus Satz 4 folgt insbesondere:

Satz 5. Wenn in einem Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

die Koeffizienten von beiden Enden aus gegen die Mitte zu so ansteigen, daß

$$(42) \quad \begin{cases} 0 < 3c_0 < c_1, & 3c_1 \leq c_2, \dots, 3c_{k-2} \leq c_{k-1}; \\ c_k \geq 3c_{k+1}, \dots, c_{n-2} \geq 3c_{n-1}, & c_{n-1} > 3c_n > 0 \end{cases}$$

($1 \leq k \leq n$), so hat das Polynom $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die einfache Nullstelle $x = -1$ und im Innern des Einheitskreises k oder $k-1$ Nullstellen, je nachdem $(-1)^k f(-1) > 0$ oder ≤ 0 .

6. Satz 6. Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

ein reelles Polynom, k eine ganze Zahl, so daß $0 \leq k \leq n$, und $m = \operatorname{Max}(k, n-k)$. Für die Zahlen

$$(43) \quad a_v = c_{k+v} - c_{k-v} \quad (1 \leq v \leq m; \quad c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n)$$

gelte

$$(44) \quad a_1 \geq 2a_2, \quad a_2 \geq 2a_3, \dots, \quad a_{m-2} \geq 2a_{m-1}, \quad a_{m-1} > 2a_m > 0.$$

Dann hat das Polynom $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die einfachen Nullstellen $x = +1$ und $x = -1$, und im Innern des Einheitskreises

$k+1$ Nullstellen, wenn $f(1) > 0$, $(-1)^k f(-1) < 0$,

k Nullstellen, wenn $f(1) > 0$, $(-1)^k f(-1) \geq 0$,

oder $f(1) \leq 0$, $(-1)^k f(-1) < 0$,

$k-1$ Nullstellen, wenn $f(1) \leq 0$, $(-1)^k f(-1) \geq 0$.

Die Bedingungen (44) können auch durch (21) ersetzt werden.

Auch hier beschränken wir uns darauf, den Gang des Beweises zu skizzieren, da er ganz analog ist, wie der Beweis des Satzes 2.

Wir setzen

$$(45) \quad x^{m+k} f\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x), \quad -x^{m-k} f(x) = \psi(x),$$

und ordnen dem Polynom $f(x)$ und der ganzen Zahl k das reziproke Polynom

$$(46) \quad R(x) = \varphi(x) + \psi(x) = a_m + a_{m-1}x + \dots + a_1x^{m-1} \\ - a_1x^{m+1} - \dots - a_mx^{2m}$$

zu.

Es sei zunächst $f(1) \cdot f(-1) \neq 0$. Je nachdem in der Schar (32) von Polynomen — wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $R(x)$ jetzt durch (45), (46) erklärt sind — beide Nullstellen $x = \pm 1$ des Polynoms $R(x)$ oder nur eine oder keine von ihnen in das Innere des Einheitskreises rücken, wenn λ von Null ausgehend stetig wächst, hat $f(x)$ $k+1$, k oder $k-1$ Nullstellen im Innern des Einheitskreises (und keine Nullstelle auf seinem Rand). Für hinreichend kleine positive λ bleiben ferner die beiden $x = \pm 1$ entsprechenden Nullstellen von $\Phi(x, \lambda)$ auf der reellen Achse.

Dafür, daß für hinreichend wenig von $x = \pm 1$ verschiedene reelle x das Polynom (32) verschwindet, ist wieder (35) notwendig.

Für hinreichend wenig von $x = 1$ verschiedene reelle x ist nun

$$\operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn} f(1)$$

und

$$(47) \quad \operatorname{sgn} R(x) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } x < 1, \\ -1, & \text{wenn } x > 1, \end{cases}$$

also

$$(48) \quad \operatorname{sgn}(R(x) \varphi(x)) = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(1), & \text{wenn } x < 1, \\ -\operatorname{sgn} f(1), & \text{wenn } x > 1. \end{cases}$$

Die Nullstelle $x = +1$ von $R(x)$ rückt also in das Innere des Einheitskreises, wenn $f(1) > 0$, in das Äußere, wenn $f(1) < 0$.

Die Behauptung (47) ergibt sich aus $R(1) = 0$ und

$$R'(1) = -2(a_1 + 2a_2 + \dots + ma_m) < 0.$$

Für hinreichend wenig von $x = -1$ verschiedene reelle x ist

$$\operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn} (-1)^{m+k} f(-1)$$

und

$$(49) \quad \operatorname{sgn} R(x) = \begin{cases} (-1)^{m+1} & \text{für } x > -1, \\ (-1)^m & \text{für } x < -1, \end{cases}$$

also

$$(50) \quad \operatorname{sgn}(R(x) \varphi(x)) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} (-1)^k f(-1) & \text{für } x > -1, \\ \operatorname{sgn} (-1)^k f(-1) & \text{für } x < -1. \end{cases}$$

Die Nullstelle $x = -1$ von $R(x)$ rückt daher in das Innere des Einheitskreises, wenn $(-1)^k f(-1) < 0$, in das Äußere, wenn $(-1)^k f(-1) > 0$.

Die Behauptung (49) ergibt sich aus $R(-1) = 0$ und

$$R'(-1) = 2(-1)^{m+1} [a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \dots + (-1)^{m-1} m a_m],$$

da der Ausdruck in der eckigen Klammer positiv ist¹³⁾.

Ebenso wie beim Beweis des Satzes 2 zeigt man weiter, daß $f(x)$ auf dem Rande des Einheitskreises höchstens die beiden einfachen Nullstellen $x = 1$ und $x = -1$ haben kann, und daß $f(1) = 0$ bzw. $f(-1) = 0$ für die Anzahl der Nullstellen im Innern des Einheitskreises dasselbe bedeutet, wie das Hinausrücken der Nullstelle $x = 1$ bzw. $x = -1$ von $R(x)$ in das Äußere des Einheitskreises im Fall $f(1) \cdot f(-1) \neq 0$.

Satz 6 gestattet es, einen Satz des Herrn Lipka¹⁴⁾ in folgender Weise zu verschärfen:

Satz 7. *Wenn die Koeffizienten des Polynoms*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

den Bedingungen

$$(51) \quad c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 2c_2, \quad c_2 \geq 2c_3, \quad \dots, \quad c_{n-1} \geq 2c_n > 0$$

genügen, so hat das Polynom $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ höchstens eine Nullstelle.

Wenn $c_{n-1} > 2c_n$, so folgt dieser Satz (für $k = 0$) unmittelbar aus Satz 6, weil $f(1) > 0$. Um ihn auch für $c_{n-1} = 2c_n$ zu beweisen, lassen wir bei beliebigen, aber festen $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, die den Ungleichungen

$$c_0 \geq 0, \quad c_1 \geq 2c_2, \quad c_2 \geq 2c_3, \quad \dots, \quad c_{n-2} \geq 2c_{n-1} > 0$$

genügen, den letzten Koeffizienten $c_n > 0$ von Seite der kleineren Zahlen gegen $c_{n-1}/2$ konvergieren. Dabei kann es eintreten, daß für einen bestimmten Wert von c_n $f(-1)$ verschwindet. Für hinlänglich wenig von $c_{n-1}/2$ verschiedene $c_n < \frac{c_{n-1}}{2}$ ist aber sicher stets $f(-1) \neq 0$. Da $f(1) > 0$, so liegen für solche c_n nach Satz 6 n oder $n-1$ Nullstellen außerhalb (und keine Nullstelle auf dem Rande) des Einheitskreises. Diese können in der Grenze höchstens auf den Rand des Einheitskreises treten.

Somit hat $f(x)$ für $c_n = \frac{c_{n-1}}{2}$ gewiß nicht mehr als eine Nullstelle im Innern des Einheitskreises.

¹³⁾ Es ist

$$\begin{aligned} & a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5 - 6a_6 + \dots + (-1)^{m-1} m a_m \\ &= a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + \dots + (-1)^{m-1} 2a_m \\ & \quad + a_3 - 2a_4 + 2a_5 - 2a_6 + \dots + (-1)^{m-1} 2a_m \\ & \quad + a_5 - 2a_6 + \dots + (-1)^{m-1} 2a_m \\ & \quad + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Hier steht nach (21) in jeder Zeile eine positive Zahl.

¹⁴⁾ A. a. O.²⁾, Satz I.

Da $f(1) > 0$, so liegt im Innern des Einheitskreises eine oder keine Nullstelle von $f(x)$, je nachdem $f(-1) < 0$ oder ≥ 0 . Es sei auch noch hervorgehoben, daß die Bedingung $c_0 \geq 0$ in (51) durch eine schwächere ersetzt werden kann. Z. B. reicht schon

$$c_0 > -(2^n - 1)c_n$$

hin.

Endlich ergibt sich aus Satz 6 — analog wie Satz 3 aus Satz 2 folgt — ein Satz über Polynome mit teils positiven, teils negativen Koeffizienten, den wir nicht formulieren, weil sein Wortlaut etwas komplizierter ist.

§ 3.

Verschiedene Bemerkungen.

7. An Stelle der in § 1 benutzten Formulierung des Satzes von Fejér hätten wir unseren Betrachtungen auch folgende weniger verlangende Fassung¹⁵⁾ zugrunde legen können:

Das reelle Kosinuspolynom (1) ist beständig positiv, wenn

$$(3^*) \quad A_m > 0, \quad A_{v-1} - 2A_v + A_{v+1} \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m; A_{m+1} = 0),$$

wofern nur in (3) für mindestens ein zu $m+1$ teilerfremdes v das Ungleichheitszeichen gilt.*

Es hätten sich dann etwas allgemeinere Fassungen für einzelne Sätze des § 2 ergeben, auf deren explizite Formulierung verzichtet werde.

8. Allgemein entspringen aus jedem Satz, der eine hinreichende Bedingung für das Nichtverschwinden des Kosinuspolynoms (1) ausspricht, vermöge ganz analoger Überlegungen, wie wir sie durchgeführt haben — Übergang zu reziproken Polynomen und Anwendung des Hilfssatzes 5 — Sätze über die Anzahl der Nullstellen eines reellen Polynoms im Innern und auf dem Rande des Einheitskreises.

Ein derartiger Satz möge noch angegeben werden, weil er praktisch sehr brauchbar ist:

Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

ein reelles Polynom, k eine ganze Zahl, so daß $0 \leq k \leq n$, und $m = \text{Max}(k, n-k)$. Wenn

$$52) \quad |c_k| > \sum_{\nu=1}^m |c_{k+\nu} + c_{k-\nu}|, \quad (c_\sigma = 0 \text{ für } \sigma < 0 \text{ und } \sigma > n),$$

¹⁵⁾ Vgl. a. a. O.⁶⁾, Satz 3.

so hat das Polynom $f(x)$ k Nullstellen im Innern des Einheitskreises und keine Nullstelle auf seinem Rand¹⁶⁾.

Der Beweis dieses Satzes kann in der soeben angedeuteten Weise geführt werden, wenn man den naheliegenden Hilfssatz benutzt:

Ein Kosinuspolynom (1), für das

$$(53) \quad \frac{|A_0|}{2} > |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|,$$

ist für alle Werte von φ ungleich Null¹⁷⁾.

¹⁶⁾ Daß die mehr verlangende Bedingung

$$|c_k| > |c_0| + |c_1| + \dots + |c_{k-1}| + |c_{k+1}| + \dots + |c_n|$$

dazu hinreicht, ist bekannt. Vgl. D. E. Mayer, Sur les équations algébriques. Nouv. Ann. math. (3) 10 (1891), S. 111–124; A. Cohn, Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 110–148, bes. S. 123.

¹⁷⁾ Es ist:

$$\begin{aligned} |A(\varphi)| &\geq \frac{|A_0|}{2} - |A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots + A_m \cos m\varphi| \\ &\geq \frac{|A_0|}{2} - |A_1| |\cos \varphi| - |A_2| |\cos 2\varphi| - \dots - |A_m| |\cos m\varphi| \\ &> \frac{|A_0|}{2} - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_m|. \end{aligned}$$

(Eingegangen am 10. Januar 1932.)

Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen. II.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Die vorliegende Note beschäftigt sich mit Limitierungsverfahren für Doppelfolgen, die definiert sind durch zwei Schemata

$$\begin{array}{ll} \text{A. } a_{00}, & \text{B. } b_{00}, \\ a_{10} \ a_{11}, & b_{10} \ b_{11}, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m0} \ a_{m1} \cdot \cdot \cdot \ a_{mm}, & b_{m0} \ b_{m1} \cdot \cdot \cdot \ b_{mm}, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array}$$

welche den Toeplitzschen Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_{mp} \rightarrow 0, \quad b_{mp} \rightarrow 0 & \text{für festes } p \text{ und } m \rightarrow \infty, \\ \text{b) } \sum_{p=0}^m |a_{mp}| < K, \quad \sum_{p=0}^m |b_{mp}| < K & \text{für } m = 0, 1, 2, \dots, \\ \text{c) } \sum_{p=0}^m a_{mp} \rightarrow 1, \quad \sum_{p=0}^m b_{mp} \rightarrow 1 & \text{für } m \rightarrow \infty. \end{array}$$

Einer Doppelfolge

$$s_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

wird mit Hilfe dieser Schemata eine neue Doppelfolge

$$S_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

zugeordnet und die ursprüngliche Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt „ $\{A, B\}$ -limitierbar“ zum Wert s , wenn

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = s$$

ist. s heißt der „ $\{A, B\}$ -Limes“ der Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$.

In einer kürzlich unter gleichem Titel erschienenen Note des Verfassers¹⁾ wurde gezeigt, daß eine gegen s konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$,

¹⁾ F. Lösch, Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen, Math. Zeitschr. 34 (1931), S. 281—290.

für die (S_{mn}) beschränkt ist, auch den $\{A, B\}$ -Limes s besitzt. Umgekehrt wurde für einen Teil der in Rede stehenden Limitierungsverfahren bewiesen, daß eine Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ auch nur dann zugleich konvergent und $\{A, B\}$ -limitierbar sein kann, wenn (S_{mn}) beschränkt ist. Im ersten Teil der vorliegenden Note soll nun gezeigt werden, daß durch eine leichte Abänderung der in der zitierten Note benutzten Schlußweise eine Bedingung für die $\{A, B\}$ -Limitierbarkeit einer konvergenten Doppelfolge angegeben werden kann, die für alle in Rede stehenden Limitierungsverfahren zugleich notwendig und hinreichend ist. Im zweiten Teil wird dieselbe Bedingung für das Verfahren der arithmetischen Mittel auf wesentlich einfachere Art bewiesen und überdies gezeigt, daß sie — sinngemäß abgeändert — bei diesem Verfahren auch im Falle nur restringierter Konvergenz gilt.

I.

Satz 1: Eine konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ ist dann und nur dann zugleich $\{A, B\}$ -limitierbar, wenn die Bedingung

$$(I) \quad \overline{\lim}_{m, n \rightarrow \infty} |S_{mn}| < \infty$$

erfüllt ist.

Ist die Bedingung (I) erfüllt, so stimmen überdies Grenzwert und $\{A, B\}$ -Limes überein.

Beweis: 1. Daß die Bedingung (I) für die Existenz eines $\{A, B\}$ -Limes der Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ notwendig ist, ist ohne weiteres klar. Weiterhin genügt es wegen des linearen Charakters der $\{A, B\}$ -Verfahren, zu zeigen, daß aus $s_{\mu\nu} \rightarrow 0$ folgt $S_{mn} \rightarrow 0$ falls (I) erfüllt ist, da wegen c) die konstante Folge $s_{\mu\nu} \equiv s$ den $\{A, B\}$ -Limes s hat.

2. Gibt man $\varepsilon > 0$ beliebig vor, so folgt aus $s_{\mu\nu} \rightarrow 0$ und (I) die Existenz einer Konstanten C und zweier Indizes m_0, n_0 derart, daß

$$(1) \quad |s_{\mu\nu}| < \varepsilon \quad \text{für } \mu > m_0, \nu > n_0,$$

$$(2) \quad |S_{mn}| < C \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

Wir schreiben dann für $m > m_0, n > n_0$

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \left\{ \sum_{\mu=0}^{m_0} \sum_{\nu=0}^{n_0} + \sum_{\mu=m_0+1}^m \sum_{\nu=n_0+1}^n + \sum_{\mu=m_0+1}^m \sum_{\nu=0}^{n_0} + \sum_{\mu=0}^{m_0} \sum_{\nu=n_0+1}^n \right\} a_{m\mu} b_{n\nu} s_{\mu\nu} \\ &= S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(2)} + S_{mn}^{(3)} + S_{mn}^{(4)} \end{aligned}$$

und schätzen diese vier Summen nacheinander ab:

3. Nach Voraussetzung a) ist für genügend großes m_1, n_1 ($m_1 > m_0, n_1 > n_0$)

$$(3) \quad |S_{mn}^{(1)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_1, n > n_1.$$

Weiter ist nach Voraussetzung b) und (1)

$$(4) \quad |S_{m\,n}^{(2)}| < K^2 \varepsilon \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

4. Der Abschätzung von $S_{m\,n}^{(3)}$ und $S_{m\,n}^{(4)}$ schicken wir folgende Überlegung voraus: Es ist

$$S_{m\,n} = \sum_{\nu=0}^n b_{n\,\nu} S_m^{(\nu)} \quad \text{mit} \quad S_m^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^m a_{m\,\mu} s_{\mu\,\nu},$$

also nach (2)

$$(5) \quad |S_{m\,n}| = \left| \sum_{\nu=0}^n b_{n\,\nu} S_m^{(\nu)} \right| < C \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

Weiter ist für $\nu > n_0$ und jedes m

$$|S_m^{(\nu)}| = \left| \sum_{\mu=0}^m a_{m\,\mu} s_{\mu\,\nu} \right| < K \cdot \text{Max} (|s_{0\,\nu}|, |s_{1\,\nu}|, \dots, |s_{m_0\,\nu}|; \varepsilon) = c_\nu$$

und damit

$$(6) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n b_{n\,\nu} S_m^{(\nu)} \right| < K \cdot \text{Max} (c_{n_0+1}, c_{n_0+2}, \dots, c_n) = c'_n \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(7) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n b_{n\,\nu} S_m^{(\nu)} \right| < C_n \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

5. Damit läßt sich $S_{m\,n}^{(3)}$ folgendermaßen abschätzen: Es ist für $m > m_0, n > n_0$

$$(8) \quad S_{m\,n}^{(1)} + S_{m\,n}^{(3)} = \sum_{\nu=0}^{n_0} b_{n\,\nu} S_m^{(\nu)}.$$

Sind daher alle Größen des unendlichen Schemas

$$(9) \quad \|b_{p\,q}\| \quad \left(\begin{array}{l} p = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \\ q = 0, 1, \dots, n_0 \end{array} \right)$$

gleich Null, so ist auch

$$(10) \quad S_{m\,n}^{(1)} + S_{m\,n}^{(3)} = 0 \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

Andernfalls gibt es eine Zahl k mit $0 < k \leq n_0 + 1$ so, daß sich aus dem Schema (9) mindestens eine nicht verschwindende k -reihige Determinante

$$(11) \quad \left| \begin{array}{cccc} b_{\sigma_1 \tau_1} & b_{\sigma_1 \tau_2} & \dots & b_{\sigma_1 \tau_k} \\ b_{\sigma_2 \tau_1} & b_{\sigma_2 \tau_2} & \dots & b_{\sigma_2 \tau_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\sigma_k \tau_1} & b_{\sigma_k \tau_2} & \dots & b_{\sigma_k \tau_k} \end{array} \right| \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k \leq n_0 \\ n_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k \end{array} \right)$$

bilden läßt, während alle $(k+1)$ -reihigen Determinanten verschwinden. Dann existiert aber für jedes $n > n_0$ ein System von Größen

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_k^{(n)},$$

das die $n_0 + 1$ Gleichungen

$$(12) \quad b_{\sigma_1 \varrho} \lambda_1^{(n)} + b_{\sigma_2 \varrho} \lambda_2^{(n)} + \dots + b_{\sigma_k \varrho} \lambda_k^{(n)} = b_{n \varrho} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \dots, n_0)$$

erfüllt, und dabei ist

$$\lambda_i^{(n)} = d_{i0} b_{n0} + d_{i1} b_{n1} + \dots + d_{in_0} b_{nn_0} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Die Größen d_{ip} hängen nur von den festen Größen in der Determinante (11), nicht aber von n ab, daher gilt nach Voraussetzung a)

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Nun ist aber nach (8) und (12)

$$S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(3)} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{(n)} (S_{m\sigma_i}^{(1)} + S_{m\sigma_i}^{(3)}) \quad \text{für } m > m_0, n > n_0,$$

also nach (8) und (7):

$$|S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(3)}| < \sum_{i=1}^k |\lambda_i^{(n)}| C_{\sigma_i} \quad \text{für } m > m_0, n > n_0.$$

Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es daher nach (13) einen Index $n_2 > n_0$, mit dem

$$(14) \quad |S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(3)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_0, n > n_2$$

gilt.

Völlig analog zeigt man, daß es einen Index $m_2 > m_0$ gibt, mit dem

$$(15) \quad |S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(4)}| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_2, n > n_0$$

ist.

6. Setzt man $M = \text{Max}(m_1, m_2)$, $N = \text{Max}(n_1, n_2)$, so folgt aus den Abschätzungen (3), (4), (10), (14) und (15)

$$|S_{mn}| \leq |S_{mn}^{(1)}| + |S_{mn}^{(2)}| + |S_{mn}^{(3)}| + |S_{mn}^{(4)}| < \varepsilon (3 + K^2) \quad \text{für } m > M, n > N.$$

Damit ist der Beweis fertig.

Als unmittelbare Folge des vorstehenden Satzes 1 ergibt sich der *Permanenzsatz* in der bereits in der unter¹⁾ zitierten Note bewiesenen Fassung:

Satz 2: *Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich konvergent gegen s und $\{A, B\}$ -limitierbar zum Wert S , so ist stets*

$$S = s.$$

Beweis: Ist $(s_{\mu\nu})$ konvergent und $\{A, B\}$ -limitierbar, so muß nach Satz 1 die Relation (I) erfüllt sein. Ist aber (I) erfüllt, so hat wieder nach Satz 1 die gegen s konvergente Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ auch den $\{A, B\}$ -Limes s . Somit muß $S = s$ sein.

II.

Wir beschäftigen uns weiterhin ausschließlich mit dem Verfahren der arithmetischen Mittel, kurz „*M-Verfahren*“ genannt. Es sei also künftig:

$$S_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n s_{\mu\nu}.$$

1. Da das M -Verfahren zu den unter I. behandelten $\{A, B\}$ -Verfahren gehört, sind Satz 1 und 2 ohne weiteres auf dasselbe anwendbar. Es soll jedoch zunächst noch ein sehr einfacher, auf das M -Verfahren zugeschnittener Beweis des Satzes 1 angegeben werden. Genauer werden wir — indem wir uns auf die Bemerkungen am Anfang des Beweises von Satz 1 beziehen — beweisen:

Satz 1a: Konvergiert die Doppelfolge $s_{\mu\nu} \rightarrow 0$ und ist die Bedingung

$$(Ia) \quad \overline{\lim}_{m, n \rightarrow \infty} |S_{mn}| < \infty$$

erfüllt, so ist $(s_{\mu\nu})$ auch M -limitierbar zum Wert Null.

Beweis: Die Voraussetzungen besagen, daß es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante K und zwei Indizes m_0, n_0 gibt derart, daß

$$(16) \quad |s_{\mu\nu}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } \mu \geq m_0, \nu \geq n_0,$$

$$(17) \quad |S_{mn}| < K \quad \text{für } m \geq m_0, n \geq n_0$$

gilt. Wählt man nun $M > m_0, N > n_0$ so, daß

$$(18) \quad \frac{m_0 + 1}{M + 1} < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad \frac{n_0 + 1}{N + 1} < \frac{\varepsilon}{4K}$$

ist, und zerlegt weiterhin S_{mn} für $m > M, n > N$ in

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left\{ \sum_{\mu=0}^{m_0} \sum_{\nu=0}^{n_0} + \sum_{\mu=m_0+1}^m \sum_{\nu=0}^{n_0} + \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=n_0+1}^n + \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=n_0+1}^n \right\} s_{\mu\nu}, \\ &= S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(2)} + S_{mn}^{(3)} + S_{mn}^{(4)}, \end{aligned}$$

so kann man vermöge (16), (17) und (18) wie folgt abschätzen:

$$|S_{mn}^{(1)}| = \frac{m_0 + 1}{m + 1} \cdot \frac{n_0 + 1}{n + 1} |S_{m_0 n_0}| < \frac{m_0 + 1}{M + 1} |S_{m_0 n_0}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|S_{mn}^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(3)}| = \frac{n_0 + 1}{n + 1} |S_{mn_0}| < \frac{n_0 + 1}{N + 1} |S_{mn_0}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(4)}| = \frac{m_0 + 1}{m + 1} |S_{m_0 n}| < \frac{m_0 + 1}{M + 1} |S_{m_0 n}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daraus folgt aber offensichtlich

$$|S_{mn}| < \varepsilon \quad \text{für } m > M, n > N.$$

2. Die vorstehende Beweisordnung ermöglicht es, beim M -Verfahren die Sätze 1 und 2 auf den Fall restringierter Konvergenz zu übertragen. Die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ heißt „restringiert konvergent“²⁾ gegen den

²⁾ Vgl. C. N. Moore, On the Summability of the Double Fourier's Series of Discontinuous Functions, Math. Annalen 74 (1913), S. 555–572, insbes. S. 567.

Grenzwert s , wofür kurz

$$[\lim]_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv} = s$$

geschrieben werden soll, wenn bei jedem Paar positiver Zahlen $\eta_1 < \eta_2$ diejenigen s_{uv} , deren Indizes den Ungleichungen $\eta_1 \mu < \nu < \eta_2 \mu$ genügen gegen s konvergieren. Analog heißt die Doppelfolge (s_{uv}) „restringiert M -limitierbar“ zum Wert S , wenn

$$[\lim]_{m, n \rightarrow \infty} s_{mn} = S$$

gilt.

Es empfiehlt sich, noch eine weitere Bezeichnung einzuführen. Ist $\eta_1 < \eta_2$ ein beliebiges Paar positiver Zahlen und ist für diejenigen Glieder der Doppelfolge (s_{uv}) , deren Indizes den Ungleichungen $\eta_1 \mu < \nu < \eta_2 \mu$ genügen

$$\overline{\lim}_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv} = K_{\eta_1, \eta_2},$$

so sei

$$[\overline{\lim}]_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv}$$

die obere Grenze der Menge der Zahlen K_{η_1, η_2} ($0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$). Entsprechend soll

$$[\lim]_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv}$$

definiert sein.

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen kann nun der folgende, dem Satz 1 völlig analoge Satz ausgesprochen werden:

Satz 3: Eine restringiert konvergente Doppelfolge (s_{uv}) ist dann und nur dann zugleich restringiert M -limitierbar, wenn die Bedingung

$$(II) \quad [\overline{\lim}]_{m, n \rightarrow \infty} |S_{mn}| = K < \infty$$

erfüllt ist.

Ist die Bedingung (II) erfüllt, so gilt überdies

$$[\lim]_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv} = [\lim]_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn}.$$

Beweis: 1. Daß die Bedingung (II) für die Existenz des restringierten M -Limes der Doppelfolge (s_{uv}) notwendig ist, ist ohne weiteres klar. Weiterhin genügt es wegen des linearen Charakters des M -Verfahrens und weil die konstante Folge $s_{uv} \equiv s$ den M -Limes s hat, zu zeigen, daß aus

$$(19) \quad [\lim]_{u, v \rightarrow \infty} s_{uv} = 0,$$

falls (II) erfüllt ist, folgt:

$$(20) \quad [\lim]_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = 0.$$

Wir weisen dies nach, indem wir zeigen, daß sich unter den Voraussetzungen (19) und (II) bei beliebig aber fest vorgegebenen Zahlen Θ_1, Θ_2 mit $0 < \Theta_1 < 1$, $0 < \Theta_2 < 1$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ zwei Indizes M, N angeben lassen derart, daß

$$(21) \quad |S_{mn}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \begin{matrix} m > M, & n > N \\ (n+1) > \Theta_1(m+1), & (m+1) > \Theta_2(n+1) \end{matrix}$$

ausfällt.

2. Dazu wählen wir zunächst die positiven Zahlen ϑ_1, ϑ_2 so klein, daß

$$(22) \quad \frac{\vartheta_1}{\Theta_1} < \text{Min} \left(1, \frac{\varepsilon}{4(K+1)} \right), \quad \frac{\vartheta_2}{\Theta_2} < \text{Min} \left(1, \frac{\varepsilon}{4(K+1)} \right)$$

ist. Nach (19) und (II) gibt es sodann zwei Indizes m_0, n_0 derart, daß

$$(23) \quad |s_{uv}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \mu \geq m_0, & \nu \geq n_0 \\ (\nu+2) \geq \vartheta_1(\mu+1), & (\mu+2) \geq \vartheta_2(\nu+1) \end{matrix}$$

und

$$(24) \quad |S_{mn}| < K+1 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} m \geq m_0, & n \geq n_0 \\ (n+2) \geq \vartheta_1(m+1), & (m+2) \geq \vartheta_2(n+1) \end{matrix}$$

gilt. Endlich wählen wir die Zahlen M, N so groß, daß

$$(25) \quad \frac{n_0+1}{M+1} \leq \vartheta_1, \quad \frac{m_0+1}{N+1} \leq \vartheta_2$$

ist.

Um S_{mn} mit $m > M$, $n > N$ und $(n+1) > \Theta_1(m+1)$, $(m+1) > \Theta_2(n+1)$ abzuschätzen, führen wir zwei Hilfszahlen m', n' ein, die definiert sind vermöge

$$(26) \quad m' + 1 = [\vartheta_2(n+1)], \quad n' + 1 = [\vartheta_1(m+1)].$$

Wie man leicht nachrechnet, genügen m', n' den folgenden Größenbeziehungen:

$$(27a) \quad m \geq m' \geq m_0, \quad n \geq n' \geq n_0,$$

$$(27b) \quad n+2 \geq n'+2 \geq \vartheta_1(m+1) \geq \vartheta_1(m'+1),$$

$$(27c) \quad m+2 \geq m'+2 \geq \vartheta_2(n+1) \geq \vartheta_2(n'+1),$$

$$(27d) \quad \frac{m'+1}{m+1} < \frac{\vartheta_2}{\Theta_2} < 1, \quad \frac{n'+1}{n+1} < \frac{\vartheta_1}{\Theta_1} < 1.$$

Mit Hilfe der Zahlen m', n' zerlegen wir S_{mn} in folgender Weise:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \left\{ \sum_{\mu=0}^{m'} \sum_{\nu=0}^{n'} + \sum_{\mu=m'+1}^m \sum_{\nu=n'+1}^n + \sum_{\mu=0}^{m'} \sum_{\nu=n'+1}^n + \sum_{\mu=m'+1}^m \sum_{\nu=0}^{n'} \right\} s_{\mu\nu} \\ &= S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(2)} + S_{mn}^{(3)} + S_{mn}^{(4)} \end{aligned}$$

und können nun so abschätzen: Nach (24) und (27) gilt:

$$(28) \quad |S_{mn}^{(1)}| = \frac{(m'+1)(n'+1)}{(m+1)(n+1)} |S_{m'n'}| \leq \frac{m'+1}{m+1} |S_{m'n'}| < \frac{\vartheta_2}{\Theta_2} (K+1).$$

Weiter folgt aus (23) und (27):

$$(29) \quad |S_{mn}^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Und schließlich gilt wieder nach (24) und (27):

$$(30) \quad |S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(3)}| = \frac{n'+1}{n+1} |S_{m'n'}| < \frac{\theta_1}{\Theta_1} (K+1),$$

$$(31) \quad |S_{mn}^{(1)} + S_{mn}^{(4)}| = \frac{m'+1}{m+1} |S_{m'n'}| < \frac{\theta_2}{\Theta_2} (K+1).$$

Berücksichtigt man noch (22), so ersieht man aus den Abschätzungen (28) bis (31) in der Tat die Richtigkeit der Behauptung (21).

Genau in derselben Weise wie Satz 2 aus Satz 1 gefolgert wurde, läßt sich aus Satz 3 der Satz folgern³⁾:

Satz 4: *Ist die Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ zugleich restringiert konvergent gegen s und restringiert M -limitierbar zum Wert S , so ist stets*

$$s = S.$$

Stuttgart, 12. 2. 1932.

³⁾ Vgl. S. Bochner, Über die Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 122—126.

(Eingegangen am 25. Februar 1932.)

Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises. III.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Die folgenden Bemerkungen schließen sich unmittelbar an die gleichbetitelte Note in Band 33 dieser Zeitschrift¹⁾ an. Herr W. Vesper, Heidelberg, hat mich in freundlicher Weise auf ein Versehen beim Beweis des Satzes in Abschnitt I der genannten Note hingewiesen. Danach ist die Ungleichung Seite 793, Zeile 9—10 zu ersetzen durch

$$0 < \arccos \frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{i\varphi}} = \varphi + \arctan \frac{\sin \varphi}{2 - \cos \varphi} < 2\varphi.$$

Der im folgenden wesentlich auf der zitierten falschen Ungleichung beruhende Beweis wird damit hinfällig und es ist fraglich, ob der Satz in der in der Note ausgesprochenen Fassung gilt. Leichte Abänderungen des Beweises zeigen jedoch, daß sich die Behauptung des Satzes aufrecht erhalten läßt, wenn nur Voraussetzung 2 ersetzt wird durch

$$2. \text{ Für ein } \tau > 0 \text{ strebt } \sum_{\alpha \leq n \leq \alpha^1 + \tau} |a_n| \rightarrow 0 \text{ für } \alpha \rightarrow \infty.$$

Darüber hinaus soll im ersten Teil der vorliegenden Note gezeigt werden, daß diese neue Voraussetzung schon allein ausreicht, um die Behauptung des Satzes zu sichern.

Der zweite Teil enthält ein neues Beispiel einer Potenzreihe, die am Rande des Konvergenzkreises gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert, das insofern wesentlich einfacher ist als das in der eingangs zitierten Note angegebene, als es sich nur auf die Stolz'sche Verallgemeinerung des Abelschen Grenzwertsatzes stützt.

¹⁾ F. Lösch, Über das Verhalten der Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises, Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 791—795.

I.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig im Innern und auf dem Rand jedes den Kreis $|x| = 1$ im Punkt $+1$ von innen berührenden Kreises, falls für ein $\tau > 0$

$$(1) \quad \delta_{\alpha}^{(\tau)} = \sum_{\alpha \leq n \leq \alpha^{1+\tau}} |a_n| \rightarrow 0$$

strebt für $\alpha \rightarrow \infty$.

Beweis: 1. Aus (1) folgt für beliebiges $\sigma > 0$

$$\delta_{\alpha}^{(\sigma)} = \sum_{\alpha \leq n \leq \alpha^{1+\sigma}} |a_n| \rightarrow 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow \infty.$$

Wählt man nämlich $\varrho \geq \left[\frac{\log(1+\sigma)}{\log(1+\tau)} \right]$, so gilt:

$$0 \leq \delta_{\alpha}^{(\sigma)} \leq \delta_{\alpha}^{(\tau)} + \delta_{\alpha^{(1+\tau)}}^{(\tau)} + \dots + \delta_{\alpha^{(1+\tau)^{\varrho}}}^{(\tau)} \rightarrow 0.$$

2. Der Beweis soll geführt werden für den Kreis mit Mittelpunkt p ($0 < p < 1$) und Radius $1-p$:

$$x = p + (1-p)e^{i\varphi} \quad (-\pi \leq \varphi \leq +\pi).$$

Es genügt daher, zu zeigen, daß die Reihe

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (p + (1-p)e^{i\varphi})^n$$

für alle φ mit $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ gleichmäßig konvergiert.

3. Beschränkt man $|\varphi|$ auf ein genügend kleines Intervall $0 < |\varphi| < \varphi_0$, so gelten die folgenden Abschätzungen:

$$(3a) \quad |p + (1-p)e^{i\varphi}|^n = (1 - \tfrac{1}{2}p(1-p)\varphi^2 + \dots)^n < (1 - q\varphi^2)^{\frac{1}{2} \cdot \varphi^2 n} < e^{-q_1 \cdot \varphi^2 n},$$

$$(3b) \quad > (1 - r\varphi^2)^{\frac{1}{2} \cdot \varphi^2 n} > e^{-r_1 \cdot \varphi^2 n},$$

$$(0 < q_1 < q < \tfrac{1}{2}p(1-p); \quad r_1 > r > \tfrac{1}{2}p(1-p))$$

und

$$(4) \quad 0 < |\operatorname{arc}(p + (1-p)e^{i\varphi})^n| < n|\varphi|.$$

4. Diese Abschätzungen liefern für jedes φ mit $0 < |\varphi| < \varphi_0$ un- mittelbar:

$$(5) \quad |p + (1-p)e^{i\varphi}|^n < e^{-q_1 \sqrt{n}} \quad \text{für } n \geq |\varphi|^{-4},$$

$$(6) \quad 1 > |p + (1-p)e^{i\varphi}|^n > e^{-r_1 \cdot \frac{1}{n^5}} > 1 - \frac{K}{n^5} \quad \text{für } n \leq |\varphi|^{-1/3},$$

wobei K eine passende Konstante bedeutet, und

$$(7) \quad 0 < |\operatorname{arc}(p + (1-p)e^{i\varphi})^n| < \frac{1}{n^3} \quad \text{für } n \leq |\varphi|^{-1/3}.$$

Die Glieder von (2) lassen sich daher für alle in Rede stehenden φ wie folgt abschätzen:

Für die Glieder mit $n \leq |\varphi|^{-1/3}$ gilt nach (6) und (7):

$$(8) \quad a_n(p + (1-p)e^{i\varphi})^n = a_n + r_n(\varphi) \text{ mit } |r_n(\varphi)| < \frac{K|a_n|}{n^5} + \frac{|a_n|}{n^2}.$$

Die Summe der Absolutbeträge der Glieder mit Indizes zwischen $|\varphi|^{-1/3}$ und $|\varphi|^{-1/4}$ ist kleiner als

$$(9) \quad \sum_{|\varphi|^{-1/3} < n < |\varphi|^{-1/4}} |a_n| = \delta_{|\varphi|^{-1/3}}^{(11)}.$$

Für die Glieder mit Indizes $n \geq |\varphi|^{-1/4}$ endlich gilt nach (5):

$$(10) \quad |a_n(p + (1-p)e^{i\varphi})^n| < |a_n|e^{-q_1\sqrt{n}}.$$

5. Man kann somit bei willkürlichen n_1, n_2 ($0 < n_1 < n_2$) für alle φ mit $0 < |\varphi| < \varphi_0$ die gleichmäßige Abschätzung geben:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n(p + (1-p)e^{i\varphi})^n \right| &\leq \text{Max}_{n_1 \leq n \leq n_2} \left| \sum_{r=n_1}^n a_r \right| + \sum_{n=n_1}^{n_2} \left(\frac{K|a_n|}{n^5} + \frac{|a_n|}{n^2} \right) \\ &\quad + \text{Max}_{n_1 \leq \alpha \leq n_2} \delta_{\alpha}^{(11)} + \sum_{n=n_1}^{n_2} |a_n|e^{-q_1\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Hieraus ersieht man die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2) für $0 < |\varphi| < \varphi_0$. Für $\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \pi$ folgt ihre gleichmäßige Konvergenz aus der der Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Teil ihres Konvergenzbereichs. Da endlich für $\varphi = 0$ Konvergenz vorhanden ist, ist der Beweis fertig.

Bemerkung: Die Voraussetzungen des Satzes sind gewiß erfüllt für „Lückenreihen“

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n' x^{u_n},$$

die in $x = 1$ konvergieren, falls nur die Lücken so groß sind, daß für ein $\tau > 0$

$$\mu_{n+1} > \mu_n^{1+\tau} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gilt.

II.

Die in Abschnitt II der unter ¹⁾ zitierten Note benutzte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} y^{1^n}$$

genügt den Voraussetzungen des in I bewiesenen Satzes nicht. Dagegen genügt, wie man unmittelbar erkennt, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} y^{2^{2^n}},$$

denn dies ist eine „Lückenreihe“ der in der Schlußbemerkung zu I genannten Art. Aus ihr bekommt man als Beispiel einer Potenzreihe, die am Rande des Konvergenzkreises gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert, die Reihe, die aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{1}{2} x (1+x) \right]^{2^n}$$

entsteht, wenn die Polynome in ihre Glieder zerlegt werden.

Daß es Potenzreihen gibt, die am Rande des Konvergenzkreises gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren, kann man sehr einfach allein unter Zuhilfenahme der Stolzschen Verallgemeinerung des Abelschen Grenzwertsatzes einsehen:

1. Die auf $|z| = 1$ stetige Funktion

$$w = E(z) = 1 - \sqrt{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \binom{1/2}{n} z^n$$

bildet den Kreis $|z| = 1$ ab auf eine zur reellen Achse der w -Ebene symmetrische Kurve, die ganz in $|w| \leq 1$ liegt, mit $|w| = 1$ nur den Punkt $+1$ gemein hat und von diesem Punkt unter dem Winkel $\frac{3\pi}{4}$ gegen die reelle Achse ausläuft. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz für den Winkelraum konvergiert daher die mit einer beliebigen monoton wachsenden Folge ganzer positiver Zahlen k_n ($n = 1, 2, \dots$) gebildete Reihe

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} E^{k_n}(z)$$

auf $|z| = 1$ gleichmäßig.

2. Da die Potenzreihenentwicklung der Funktion $E(z)$, und damit auch die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen

$$E^{k_n}(z) = \sum_{v=k_n}^{\infty} a_v^{(n)} z^v \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

auf $|z| = 1$ absolut und somit gleichmäßig konvergieren, läßt sich zu jedem k_n ein k'_n finden, derart, daß das Polynom

$$P_n(z) = \sum_{v=k_n}^{k'_n} a_v^{(n)} z^v$$

für alle z auf $|z| = 1$ die Ungleichung

$$(12) \quad |E^{k_n}(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n}$$

erfüllt. Die mit diesen Polynomen $P_n(z)$ gebildete Reihe

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} P_n(z)$$

konvergiert wegen (12) ebenso wie (11) auf $|z| = 1$ gleichmäßig.

3. Denkt man sich die Zahlen k_n so gewählt, daß für jedes n

$$(14) \quad k_{n+1} > k'_n$$

ist, so erhält man aus (13) durch Zerlegung der Polynome in ihre einzelnen Glieder eine Potenzreihe, die auf $|z| = 1$ ebenfalls gleichmäßig konvergiert, was unmittelbar daraus hervorgeht, daß die Koeffizienten in den $P_n(z)$ alle positiv sind und $P_n(1) \leq 1$ ist. Diese Potenzreihe kann aber auf $|z| = 1$ nicht absolut konvergieren, da (11) und damit (13) in $z = 1$ wegen $E(1) = 1$ schon nicht absolut konvergieren.

Stuttgart, 8. 3. 1932.

(Eingegangen am 3. April 1932.)

Über die Untergruppen der freien Gruppen.

[2. Mitteilung¹⁾.]

Von

Friedrich Levi in Leipzig.

Die Theorie der freien Gruppen wird in dieser Mitteilung nach drei Richtungen hin ausgebaut: Es werden die charakteristischen Untergruppen untersucht, dann die vollinvarianten (d. h. für jeden Operatorenbereich zulässigen) Untergruppen, und zuletzt werden die Anzahlen der Erzeugenden, der erzeugenden Relationen und der freien Erzeugenden in eine einfache Beziehung gebracht.

§ 1.

Charakteristische Untergruppen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ eine unendliche Folge von Gruppen und zwar sei $\mathfrak{F}_1$ eine freie Gruppe, $\mathfrak{F}_{i+1}$ eine echte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}_i$. Dann hat der Durchschnitt der Folge die Ordnung 1.*

Beweis: Es sei $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ ein System von freien Erzeugenden von $\mathfrak{F}_1$. Drückt man die von 1 verschiedenen Elemente von $\mathfrak{F}_i$ durch die a_k aus, so gibt es unter ihnen solche von kleinster (a) -Länge m_i ; ebenso gehört zu $\mathfrak{F}_{i+1}$ eine kleinste (a) -Länge m_{i+1} . Da $\mathfrak{F}_{i+1}$ eine echte charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}_i$ ist, kann es kein Element enthalten, das zu einem System freier Erzeugender von $\mathfrak{F}_i$ gehört. Man kann nun²⁾ in $\mathfrak{F}_i$ die freien Erzeugenden $b_1, b_2, \dots, b_j, \dots$ so bestimmen, daß in jedem reduzierten (b) -Produkt nach Einsetzen der entsprechenden (a) -Produkte von jedem b_j (bzw. b_j^{-1}) von links (bzw. rechts) her nur höchstens die Hälfte seiner (a) -Länge, von rechts (bzw. links) her nur weniger als die Hälfte seiner (a) -Länge weggekürzt werden kann. Von allen reduzierten (b) -Produkten können deshalb nur Elemente b_j und $b_j^{-1} b_k$ die (a) -Länge m_i haben. Da aber solche Elemente als Erzeugende von $\mathfrak{F}_i$

¹⁾ Vgl. Math. Zeitschr. Bd. 32, S. 315—318 (1930).

²⁾ Nach einem in der unter Anm. ¹⁾ zitierten Arbeit entwickelten Verfahren.

gewählt werden können und deshalb nicht zu $\mathfrak{F}_{i+1}$ gehören, ist $m_{i+1} > m_i$. Die kleinsten (a) -Längen wachsen also in der Folge $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ monoton; der Durchschnitt der Folge kann deshalb kein Element $\neq 1$ enthalten.

Man kann diesen Satz auch so formulieren: Die Länge einer Kette von charakteristischen Untergruppen, die sich zwischen eine freie Gruppe $\mathfrak{F}$ und eine feste charakteristische Untergruppe $\mathfrak{U}$ einschieben läßt, ist durch $\mathfrak{U}$ beschränkt. Man erhält sogar schon eine Schranke durch die (a) -Länge eines beliebigen Elementes von $\mathfrak{U}$. Ist diese $= q$, so lassen sich höchstens $q - 2$ Untergruppen einschieben, von denen jede eine echte charakteristische Untergruppe der vorangehenden ist. Dagegen kann es sehr wohl vorkommen, daß man eine unendliche Kette von charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{F}$ einschieben kann, die jeweils Untergruppen (aber nicht alle charakteristische) der vorangehenden sind. Es gilt³⁾

Satz 2. *Jede charakteristische Untergruppe einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$, welche die Kommutatorgruppe enthält, ist eine Gruppe $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{F})$, d. h. eine Gruppe, die durch die Kommutatoren und die m -ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{F}$ erzeugt wird.*

Beweis: Es sei $a_1, \dots, a_k, \dots$ ein System freier Erzeugender von $\mathfrak{F}$; dann entsteht $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{F})$ aus den (a) -Produkten, deren Exponentensummen für jedes a_k durch m teilbar sind. Ist $\mathfrak{F}_n$ die von $a_1, \dots, a_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{F}$, so läßt sich jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}_n$ zu einem von $\mathfrak{F}$ erweitern. Der Durchschnitt einer charakteristischen Untergruppe von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F}_n$ ist daher eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}_n$. Ist $N > n$, so ist der Durchschnitt von $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{F}_N)$ mit $\mathfrak{F}_n$ die Gruppe $\mathfrak{U}_m(\mathfrak{F}_n)$. Ist also für alle k der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{F}_k$ die Gruppe $\mathfrak{U}_{m_k}(\mathfrak{F}_k)$, so sind alle $m_k = m$ und es ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_m(\mathfrak{F})$. Es genügt deshalb, Satz 2 für Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden zu beweisen. Es sei $\mathfrak{U}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{F}_n$, welche die Kommutatorgruppe $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}_n$ enthält. $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}/\mathfrak{R}$ ist dann abelsch und wird erzeugt von n Restklassen der Faktorgruppe, aus denen man als Repräsentanten die Elemente

$$b = a_1^{c_1^i} \dots a_n^{c_n^i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

von $\mathfrak{U}$ auswählen kann. Die Matrix $C = (c_k^i)$ läßt sich zerlegen in

$$C = \prod_i E_i D \prod_j E_j',$$

wobei D eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen d_k ist und E_i, E_j' Elementarmatrizen sind. Diese Elementarmatrizen lassen sich als Zeilen-

³⁾ Meinen ursprünglichen Beweis konnte ich, freundlichen Vorschlägen von Herrn B. L. van der Waerden folgend, wesentlich vereinfachen.

bzw. Spaltenadditionen oder Vertauschungen deuten. Jeder solchen Matrizenoperation entspricht ein (1)-Automorphismus von $\mathfrak{F}_n$ bzw. von $\mathfrak{B}$. Man kann daher diese Gruppe mit Hilfe neuer Erzeugender a'_i bzw. b'_i darstellen, so daß $(a'_i)^{d_i} = b'_i$ wird, und zwar kann man dabei o. E. $d_i \geq 0$ annehmen.

Ist $d_i \neq 0$, so ist diese Zahl die niedrigste positive Potenz von a'_i , die zu $\mathfrak{U}$ gehört; ist $d_i = 0$, so gehört keine positive Potenz von a'_i zu $\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ charakteristische Untergruppe ist, müssen alle d_i gleich sein. Im Falle $d_i = 0$, ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}$; für $d_i = m > 0$, ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_m$, w. z. b. w.

§ 2.

Vollinvariante Untergruppen.

Die Untergruppe $\mathfrak{U}$ soll *vollinvariante Untergruppe* von $\mathfrak{G}$ heißen, wenn $\mathfrak{U}$ bei allen (beliebig-stufigen) Automorphismen von $\mathfrak{G}$ invariant bleibt, d. h. wenn $\mathfrak{U}$ eine für jeden Operatorenbereich zulässige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Jede vollinvariante Untergruppe ist also zugleich charakteristische Untergruppe. Die meisten bisher untersuchten charakteristischen Untergruppen sind vollinvariant (höhere Kommutatorgruppen, von den m -ten Potenzen erzeugte Gruppen). Jedoch ist nicht bei allen Gruppen das Zentrum vollinvariant.

Beispiel: Erzeugende a, b mit der Relation $ba^2b^{-1}a^{-2} = 1$. Zentrum ist der Zyklus von a^2 . Dieser geht durch $a \rightarrow b, b \rightarrow a^3$ in den Zyklus von b^3 über.

Aus Satz 2 geht hervor, daß jede charakteristische Untergruppe einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$, welche die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$ enthält, auch vollinvariant ist.

Sind a_i freie Erzeugende, α_i beliebige Elemente von $\mathfrak{F}$, so ist $a_i \rightarrow \alpha_i$ ein Automorphismus von $\mathfrak{F}$ und es läßt sich andererseits auch jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}$ in dieser Form schreiben. Man kann daher vollinvariante Untergruppen nach folgender Vorschrift bilden: Aus einer beliebigen Menge von Buchstaben $z_1, z_2, \dots, z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots$ bilde man *reduzierte z -Wörter*, $Z_1, Z_2, \dots$, in denen niemals z_i und z_i^{-1} nebeneinander stehen dürfen. In den Z_k denke man sich für jedes z_i nacheinander sämtliche Elemente von $\mathfrak{F}$ und für z_i^{-1} jeweils das inverse Element eingesetzt. Die so aus den Z -Wörtern entstandenen Gruppenelemente erzeugen dann eine vollinvariante Untergruppe. Daß sich aber auch jede vollinvariante Untergruppe auf diese Art erzeugen läßt, erkennt man aus dem Z -System, das entsteht, wenn man in allen Gruppenelementen die a_i durch z_i ersetzt. Die von den m -ten Potenzen erzeugte Gruppe wird

durch z^m , die Kommutatorgruppe durch $z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1}$ definiert, die 2. Kommutatorgruppe [im Sinne von Reidemeister⁴⁾] durch

$$z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1} z_3 z_2 z_1 z_2^{-1} z_1^{-1} z_3^{-1}.$$

Zuweilen wird es zweckmäßig sein, die Definition dahin abzuändern, daß jedes z_i nur eine bestimmte, z. B. rekursiv definierte, vollinvariante Untergruppe zu durchlaufen hat. Setzt man etwa fest, daß z_1 die Gruppe $\mathfrak{F}$ und z_2 die m -te Kommutatorgruppe $\mathfrak{R}_m$ durchläuft, so definiert $z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1}$ die Gruppe $\mathfrak{R}_{m+1}$. Es gilt nun der

Satz 3. *Eine vollinvariante Untergruppe $\mathfrak{U}$ der freien Gruppe $\mathfrak{F}$, die keine Potenzgruppe z^m enthält, ist in der Kommutatorgruppe $z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1}$ enthalten, und es gehören zu ihr auch z -Wörter der Form $z^{p_1} z^{q_2} \dots z^{p_k} z^{q_k}$, wobei alle p_i und q_i von 0 verschieden sind, $k > 1$ und $\sum p_i = \sum q_i = 0$ ist.*

Beweis: 1. Enthält $\mathfrak{U}$ ein nicht zur Kommutatorgruppe gehöriges Element, so wird dieses in einem System von freien Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ durch ein Wort dargestellt, in dem mindestens eine freie Erzeugende a_i eine von 0 verschiedene Exponentensumme m hat. Ersetzt man in diesem Wort die freien Erzeugenden durch die z -Symbole, so erhält man ein zu $\mathfrak{U}$ gehöriges z -Wort. In ihm hat z_i die Exponentensumme $m \neq 0$, und es entsteht ein gleichfalls zu $\mathfrak{U}$ gehöriges z -Wort, wenn man für alle $j \neq i$ $z_j = 1$ einsetzt. Es enthält $\mathfrak{U}$ also die Potenzgruppe z_i^m . 2. Ist $\mathfrak{U}$ in der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$ enthalten, so haben alle zugehörigen z -Wörter mindestens zwei verschiedene Buchstaben. Ist nun $Z = z_{i_1}^{m_1} z_{i_2}^{m_2} \dots z_{i_k}^{m_k}$ ein zu $\mathfrak{U}$ gehöriges z -Wort, in dem jeweils $z_{i_r} \neq z_{i_{r+1}}$ ist und in dem z_1, z_2, z_3 vorkommen, so kann man in Z die Substitution $z_3 \rightarrow z_1^{-t} z_2 z_1^t$, wobei $t > |m_j|$, für $j = 1, \dots, k$ ist, vornehmen. Bei der Reduktion können dann nur Potenzen von z_1 weggekürzt werden. Z geht also nicht in 1 über. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man ein nur mit z_1 und z_2 geschriebenes, von 1 verschiedenes Wort. In ihm müssen beide Buchstaben vorkommen, da zu $\mathfrak{U}$ kein Wort z_1^m gehört. Mit jedem z -Wort gehören alle seine Transformierten zu $\mathfrak{U}$; man kann also seine Buchstaben zyklisch vertauschen und gelangt so zu $Z_k = z_1^{p_1} z_2^{q_1} \dots z_1^{p_k} z_2^{q_k}$, wobei alle p_i und q_i von 0 verschieden angenommen werden. Da $\mathfrak{U}$ in der Kommutatorgruppe liegt, muß $\sum p_i = \sum q_i = 0$ sein, und hieraus folgt $k > 1$.

Es liegt nahe, die vollinvarianten Untergruppen von $\mathfrak{F}$, die in der Kommutatorgruppe liegen, nach dem kleinsten zugehörigen k zu klassifizieren. Es zeigt sich aber, daß nicht jedes Z_k ein kleinstes k liefern kann.

⁴⁾ K. Reidemeister, Über unendliche diskrete Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, S. 33.

Beispiel:

$$Z(z_1, z_2) = z_1^p z_2^q z_1^r z_2^s z_1^{-v} z_2^{-u},$$

wobei

$$v - u = p + r = -q - s,$$

$$\zeta = z_1^u z_2^v z_1^{-v} z_2^{-u}.$$

Dann ist mit $Z(z_1, z_2)$ auch

$$z_1^s Z(z_1, z_2) (\zeta^{-1} Z(z_2, z_1) \zeta) z_1^{-s} = z_1^{p+s} z_2^q z_1^r z_2^{p+s} z_1^q z_2^r$$

ein zur Gruppe gehöriges z -Wort. Ein z -Wort mit $k = 3$ ist hier also Folgerung eines z -Wortes mit $k = 4$.

Nach einem bekannten Satz⁵⁾ von Schreier sind die Erzeugendenzahlen N und n von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{U}$ und die Ordnung j von $\mathfrak{F}/\mathfrak{U}$ verbunden durch $N = j(n-1) + 1$. N ist also dann und nur dann endlich, wenn n und j endlich sind. Die in der Kommutatorgruppe liegenden vollinvarianten Untergruppen haben daher unendlich viele Erzeugende. Die anderen vollinvarianten Untergruppen haben höchstens so viele Erzeugende, wie die in ihnen liegenden Potenzgruppen z^m . Für $m = 2, 3$ ist also die Erzeugendenzahl endlich. Ist also z. B.⁶⁾ z^3 ein zu $\mathfrak{U}$ gehöriges z -Wort, so ist

$$N \leq (n-1) 3^{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}} + 1.$$

Von diesem Standpunkte aus gewinnt die bekannte Frage nach der Ordnung der Gruppen, deren Relationen $s^m = 1$ (für alle s der Gruppe) lauten, eine besondere Bedeutung.

Ist $\mathfrak{U}$ eine nicht triviale vollinvariante Untergruppe von $\mathfrak{F}$, so hat $\mathfrak{U}$ wieder nicht triviale vollinvariante Untergruppen, die ihrerseits wieder nicht triviale vollinvariante Untergruppen von $\mathfrak{F}$ sind. Es kann daher der Durchschnitt aller dieser Gruppen nur die 1 sein. Anders verhält es sich mit dem Durchschnitt endlich vieler derartiger Gruppen. Es gilt nämlich:

Satz 4: *Der Durchschnitt endlich vieler, von 1 verschiedener vollinvarianter Untergruppen einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ ist $\supset 1$ und es ist mit $\mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{D}$ nicht kommutativ.*

Beweis: Es genügt, den Satz für zwei Untergruppen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ und nicht zyklisches $\mathfrak{F}$ zu beweisen. Dann sind auch $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nicht

⁵⁾ O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 5, S. 183.

⁶⁾ F. Levi und B. L. van der Waerden, Über eine besondere Klasse von Gruppen. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, S. 154.

zyklisch, da sie mindestens so viele Erzeugende wie $\mathfrak{F}$ haben müssen. Zu $\mathfrak{U}_1$ mögen die voneinander unabhängigen Elemente b, c und zu $\mathfrak{U}_2$ das reduzierte z -Wort $Z = \Phi(z_1, z_2)$ gehören. Dann ist $\Phi(b, c) \neq 1$ zu $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ gehörig. Es ist also $\mathfrak{D} \neq 1$ und die Erzeugendenzahl von $\mathfrak{D}$ mindestens so groß wie die von $\mathfrak{F}$. Kommutativ ist $\mathfrak{D}$ nur, falls die Erzeugendenzahl $= 1$, also $\mathfrak{F}$ kommutativ ist.

Satz 5: *Eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ der freien Gruppe $\mathfrak{F}$, die zu keiner vollinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{F}$ fremd ist, hat mit jeder vollinvarianten Untergruppe von $\mathfrak{F}$ einen nichtkommutativen Durchschnitt.*

Beweis: Angenommen, der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ mit einer vollinvarianten Untergruppe $\mathfrak{R}_0$ sei kommutativ. Da er nach Voraussetzung $\supset 1$ sein muß, ist er der von einem Elemente a bestimmte (unendliche) Zyklus. Man bilde nun die Folge der Gruppen $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \dots$, in der jeweils $\mathfrak{R}_{i+1}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{R}_i$ ist. Nach Satz 1 ist der Durchschnitt dieser Folge $= 1$. Es gibt also ein i , so daß a in $\mathfrak{R}_i$, aber nicht in $\mathfrak{R}_{i+1}$ enthalten ist. Der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}_{i+1}$ ist dann der Zyklus von a^m ($m > 1$). Gehört aber a nicht zur Kommutatorgruppe von $\mathfrak{R}_i$, so muß a , in freien Erzeugenden von $\mathfrak{R}_i$ dargestellt, für mindestens eine der Erzeugenden eine Exponentensumme $\neq 0$ aufweisen. Das gilt dann aber auch für a^m , und a^m kann nicht, wie vorausgesetzt wurde, zu $\mathfrak{R}_{i+1}$ gehören.

§ 3.

Ein Eliminationssatz.

Satz 6: *Es seien $b_1, \dots, b_m$ endlich viele Elemente einer freien Gruppe und $\mathfrak{U}$ sei die von ihnen erzeugte Untergruppe; ferner sei q die minimale Mächtigkeit eines Systems von erzeugenden Relationen der b_i . Dann ist $m - q$ die Anzahl der freien Erzeugenden von $\mathfrak{U}$.*

Beweis: Es sei $c_1, \dots$ ein System von freien Erzeugenden von $\mathfrak{U}$. Jedem b_i kommt dann eine gewisse (c) -Länge zu; diese wird $= 0$ gerechnet, wenn $b_i = 1$ ist. Führt man neue Erzeugende ein durch

$$b_i \rightarrow b'_i = (b_i^\varepsilon \beta)^\delta,$$

wobei $\varepsilon, \delta = \pm 1$, und β ein ohne b_i geschriebenes (b) -Wort ist, so bleiben hierbei die Zahlen m und q ungeändert. Diese Transformationen sollen so lange fortgesetzt werden, bis es nicht mehr möglich ist, durch sie die (c) -Länge irgend eines b_i zu reduzieren. Es wird bewiesen werden, daß unter dieser Voraussetzung $\Phi(b) = 1$ durch ein reduziertes (b) -Wort $\Phi(b)$ nur dann erfüllt werden kann, wenn in ihm ein mit der Gruppen-

eins identisches b_i vorkommt. Ist das richtig, so kann man $\Phi(b)$ dadurch in 1 überführen, daß man sukzessiv die auftretenden $b_i = 1$ und die $(b_k b_k^{-1})^\varepsilon$ wegstreicht. Es muß also das minimale erzeugende Relationensystem aus $b_{i_1} = \dots = b_{i_q} = 1$ bestehen, und es sind daher $b_{i_{q+1}}, \dots, b_{i_m}$ freie Erzeugende, wie in Satz 6 behauptet wird.

Es sei also $\Phi(b)$ ein reduziertes (b) -Wort, indem jedes b_k eine (c) -Länge ≥ 1 hat. Um $\Phi(b) \neq 1$ zu beweisen, wird $\Phi(b) = 1$ vorausgesetzt und zugleich angenommen, daß die (b) -Länge von $\Phi(b)$ unter allen in Frage kommenden Wörtern minimal ist. Man setze für jedes b_i das zugehörige (c) -Wort und bezeichne es mit

$$c_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots c_{i_s}^{\varepsilon_s} \dots c_{i_r}^{\varepsilon_r} c_{i_r}^{\delta_r} \dots c_{i_s}^{\delta_s} \dots c_{i_1}^{\delta_1} \quad \text{bzw.}$$

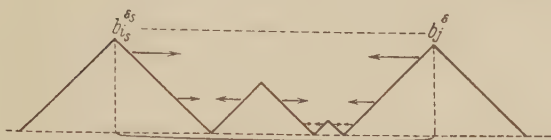
$$c_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots c_{i_s}^{\varepsilon_s} \dots c_{i_r}^{\varepsilon_r} c_i^{\varepsilon} c_i^{\delta_r} \dots c_{i_s}^{\delta_s} \dots c_{i_1}^{\delta_1},$$

je nachdem die (c) -Länge von b_i gerade oder ungerade ist. Die ε und δ nehmen nur Werte ± 1 an. Um sich die folgenden Operationen zu veranschaulichen, ordne man jedem solchen (c) -Wort ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu, dessen Hypotenuse auf einer festen (zu $\Phi(b)$ gehörigen) Zeile steht und auf dessen Katheten die $c^{\pm 1}$ äquidistant verteilt sind. Die r ersten (bzw. letzten) c bilden dann die linke (bzw. rechte) *Seite*; der (bei ungerader Länge) am Scheitel gelegene Faktor c_i^{ε} wird dabei zu keiner Seite gezählt und der Index s gibt die *Höhe* eines Faktors an. Nach dem Einsetzen der (c) -Wörter muß sich $\Phi(b)$ durch Wegheben benachbarter inverser c auf 1 reduzieren lassen. Diese Reduktionen beginnen in der Höhe 1. Solange von zwei sich weghebenden c der linke Faktor zur rechten Seite eines b , der rechte zur linken Seite eines in $\Phi(b)$ weiter rechts stehenden b gehört, werden sich immer Faktoren gleicher Höhe wegheben. Auf diese Art kann aber weder das erste, noch das letzte c von $\Phi(b)$ verschwinden. Es komme nun etwa erstmalig in dem Teilprodukt

$$\gamma = b_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots b_{i_t}^{\varepsilon_t} b_j^{\varepsilon}$$

vor, daß ein nicht mehr zur rechten Seite von $b_{i_1}^{\varepsilon_1}$ gehöriges c nach rechts weggehoben wird, nämlich gegen ein c aus b_j^{ε} . Die mittleren b -Faktoren von γ sind dann alle weggekürzt. Ist ferner $2r$ oder $2r+1$ die (c) -Länge von b_{i_1} , so kann man in γ mindestens je $r+1$ (c) -Faktoren von $b_{i_1}^{\varepsilon_1}$ und von b_j^{ε} wegekürzen; es ist also die (c) -Länge von γ kleiner als die von b_j . Daraus folgt aber, daß unter den $b_{i_1}, \dots, b_{i_t}$ auch b_j vorkommt; denn sonst wäre ein Wechsel der Erzeugenden $b_j \rightarrow \gamma$ zulässig und bei diesem würde — entgegen der gemachten Annahme — die

(c)-Länge von b_j reduziert. Es sei also $b_{i_s} = b_j$ ($1 \leq s \leq t$) und im Produkt:



hebt sich von Mitte zu Mitte sicher alles weg. Ist nun $\varepsilon_s = -\varepsilon$, so ist $s < t$, und $b_{i_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}} \dots b_{i_t}^{\varepsilon_t}$ ist als Transformierte des sich weghebenden Mittelstückes $= 1$. Ist aber $\varepsilon_s = \varepsilon$, so ist $b_{i_s}^{\varepsilon_s} \dots b_{i_t}^{\varepsilon_t}$ eine Transformierte desselben Mittelstückes, da es durch zyklische Vertauschung in den c aus ihm hervorgeht und deshalb $= 1$. In beiden Fällen erhält man ein reduziertes $\varphi(b) = 1$ von kürzerer (b) -Länge als $\Phi(b)$, in dem jedes b eine (c) -Länge ≥ 1 hat, und das steht im Widerspruch zu der $\Phi(b)$ auferlegten Minimalbedingung. Hierdurch ist Satz 6 bewiesen.

Leipzig, den 25. 7. 1932.

(Eingegangen am 27. Juli 1932.)

Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen.

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Inhaltsübersicht.

§ 1. Herleitung der Puiseuxschen Entwicklungen. (Nr. 1 bis 4, Sätze W, R)	101
§ 2. Über eine Verallgemeinerung des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes. (Nr. 5 bis 8, Satz A, Zusätze 1 und 2)	107
§ 3. Dirichletsche Reihen mit dem Gebiet absoluter Konvergenz. (Nr. 9, 10, Sätze B, C)	113
§ 4. Formale Dirichletsche Reihen und Bewertungstheorie. (Nr. 11 bis 13, Satz D)	118
§ 5. Das Newtonsche Diagramm in bewerteten Körpern. (Nr. 14, 15, Sätze E I, E II)	121
§ 6. Asymptotische Darstellungen durch Dirichletsche Reihen. (Nr. 16 bis 19, Satz F)	126

In der vorliegenden Abhandlung soll der Satz bewiesen werden, daß die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$D_0(s)y^n + D_1(s)y^{n-1} + \dots + D_n(s) = 0,$$

deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen in der Variablen s sind, wiederum Dirichletsche Reihen sind. Es handelt sich dabei um zum Teil wesentlich verschieden zu behandelnde Fragen, je nachdem, ob die Koeffizienten als Dirichletsche Reihen mit *absolutem Konvergenzgebiet* vorausgesetzt werden können oder nicht. Während im ersten Falle unser Resultat lautet, daß sich auch die Wurzeln der obigen Gleichung in Dirichletsche Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet entwickeln lassen, ist dies, wenn man die Annahme der absoluten Konvergenz nicht macht, nicht zu erwarten, da, wie Herr Bohr (1910) bewiesen hat, es Dirichletsche

Reihen $D(s)$ mit gewöhnlichem Konvergenzgebiet gibt, die Nullstellen mit beliebig großer Abszisse besitzen, für die also $\frac{1}{D(s)}$ sich sicher nicht in eine konvergente Dirichletsche Reihe entwickeln läßt. In diesem letzteren Falle beweisen wir nur, daß die Wurzeln der obigen Gleichung sich durch Dirichletsche Reihen *asymptotisch darstellen lassen* — und zwar gerade in dem Gebiet, in dem nach den Sätzen von Herrn Perron¹⁾ für Summen konvergenter Dirichletscher Reihen ihre asymptotische Darstellbarkeit durch diese Reihen gewährleistet ist. Konvergieren aber solche Reihen, so stellen sie sicher Wurzeln der obigen Gleichung dar.

Die charakteristische Schwierigkeit bei diesen Untersuchungen liegt vor allem auf *formalem* Gebiet, nämlich im Nachweis, daß es formale Dirichletsche Reihen gibt, die der obigen Gleichung formal genügen. Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung des Puiseuxschen Satzes über Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen, wobei jedoch die funktionentheoretische Methode von Cauchy-Puiseux nicht mehr anwendbar ist. Die verschiedenen „algebraischen“ Beweise des Puiseuxschen Satzes aber beruhen wesentlich auf der Ganzzahligkeit der Exponenten und sind nicht ohne weiteres übertragbar. Es ist uns nun dennoch gelungen, einen dieser algebraischen Beweise so abzuändern, daß das Moment der Ganzzahligkeit nicht mehr hineinspielt, wodurch zugleich eine wesentliche Vereinfachung der bisherigen algebraischen Beweise des Puiseuxschen Satzes erzielt wird. Und zwar besteht der wesentliche Gedanke unserer Methode darin, daß wir die bekannte Transformation einer algebraischen Gleichung n -ten Grades in eine Form, bei der der Koeffizient der $(n-1)$ -ten Potenz der Unbekannten verschwindet, an geeigneter Stelle wiederholt verwenden — wie man sieht, ein technischer Gedanke von äußerster Simplität.

Im § 1 besprechen wir die bisherigen algebraischen Beweise des Puiseuxschen Satzes und entwickeln unseren Beweis, der den Puiseuxschen Satz als eine fast unmittelbare Folge aus dem *Weierstrassschen Vorbereitungssatz* erscheinen läßt.

Im § 2 wird nun der *Weierstrasssche Vorbereitungssatz* auf eine Klasse von Entwicklungen ausgedehnt, bei der es sich um Potenzreihen

¹⁾ O. Perron, Journ. f. reine u. angew. Math. **134** (1908), S. 95–143. — Die asymptotische Darstellbarkeit im Gebiet $|y| \leq e^{Mx}$, $x > x_0$ folgt unmittelbar aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz einer Dirichletschen Reihe in einem solchen Gebiet, deren Nachweis auf S. 106–109 der Perronschen Arbeit enthalten ist. Explizite ausgesprochen wird diese Tatsache im Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen von Herrn Landau, Bd. 2, auf S. 739. Die asymptotischen Darstellungen der Dirichletschen Reihen behandelt (im etwas engeren Gebiet, $|\arg s| < \varphi < \pi/2$) zuerst J. F. Ritt, Amer. Journ. of Math. **50** (1928), S. 80 ff.

in einer Variablen mit in hohem Maße willkürlichen Funktionen eines Punktes als Koeffizienten handelt.

Im § 3 beweisen wir spezieller die Ausdehnung des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes auf Potenzreihen, deren Koeffizienten Dirichletsche Reihen sind, für den Fall, daß die ganze Entwicklung, als Doppelreihe aufgefaßt, ein absolutes Konvergenzgebiet besitzt. Daraus ergibt sich dann unser Hauptresultat für Gleichungen mit absolut konvergenten Dirichletschen Reihen als Koeffizienten unmittelbar.

Im nächsten Paragraphen handelt es sich um den Nachweis, daß eine algebraische Gleichung mit *formalen* Dirichletschen Reihen als Koeffizienten stets durch formale Dirichletsche Reihen befriedigt werden kann. Auch hier handelt es sich im wesentlichen um den Beweis eines Reduzibilitätssatzes, der dem Weierstrassschen Vorbereitungssatz entspricht. Wir können nun diesen Reduzibilitätssatz wesentlich allgemeineren Untersuchungen entnehmen, die vor längerer Zeit von Herrn J. Kürschák und dem Verfasser über die sogenannte *Bewertungstheorie* in allgemeinen Körpern angestellt worden sind. Nachdem wir an die hier in Betracht kommenden Sätze der Bewertungstheorie erinnert haben, gelingt der Beweis unseres Satzes auf gleichem Wege wie in den §§ 1 und 3.

Im § 6 endlich zeigen wir, daß, falls die Koeffizienten unserer Gleichung Funktionen sind, die sich durch Dirichletsche Reihen in gewissen Gebieten *asymptotisch* darstellen lassen, das Gleiche auch für die Wurzeln dieser Gleichung gilt. Als Vorbereitung hierzu bringen wir im § 5 einige Sätze über das *Newtonsche Diagramm* in der Theorie der bewerteten Körper. Diese Sätze stellen Übertragungen einiger von Herrn G. Dumas in der Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, sowie in der Theorie der p -adischen Zahlen zuerst aufgedeckten Tatsachen auf den Fall der allgemeinsten Bewertung dar; auf diese Sätze habe ich bereits in meiner im § 4 unter O, C) zitierten Abhandlung auf S. 274 hingewiesen. Unser Beweis stellt zugleich eine Vereinfachung des Dumaschen Beweises dar.

Es sei noch bemerkt, daß die Heranziehung unseres Hauptsatzes über das Newtonsche Diagramm nicht nötig ist, solange man sich auf das Perronsche Gebiet $|y| \leq e^{Mx}$ beschränkt, da man dann mit Hilfe eines von Herrn Ritt a. a. O. aufgestellten, auf das allgemeine Perronsche Gebiet leicht zu übertragenden Existenzsatzes auskommen kann, wie ich am Schlusse der Abhandlung zeigte. —

Es scheint mir von Interesse zu sein, daß in unserem Falle die äußerst abstrakten Untersuchungen, die von Herrn Kürschák vor nunmehr 20 Jahren gewissermaßen als Ausfluß einer freien Spekulation angestellt wurden, heute eine Anwendung auf ausgesprochen analytische

Fragen finden. Zwar handelt es sich auch hier um eine vorbereitende Untersuchung von relativ formalem Charakter, die aber deshalb nicht als besonders leicht oder naheliegend anzusehen ist. Man kann übrigens, wie ich in einer anschließenden Arbeit zeigen werde, einen Grundbegriff der Kürschákschen Theorie, nämlich den Begriff des perfekten Körpers derart abändern, daß damit auch Konvergenzfragen im üblichen Sinne von den Methoden der Bewertungstheorie mitumspannt werden²⁾).

§ 1.

Herleitung der Puiseuxschen Entwicklungen.

1. Da für unseren Zweck die auf Cauchy zurückgehende funktionentheoretische Methode nicht in Betracht kommt, sollen im folgenden nur

²⁾ Vgl. unsere demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit: Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern, insbesondere § 1, § 2, Satz II; § 8.

Als die vorliegende Abhandlung bereits abgeschlossen war, wurde ich durch ein Referat im Zentralbl. f. Math. über eine Arbeit von Herrn Borovski darauf aufmerksam, daß in einer mir bisher unbekannt gebliebenen Abhandlung von I. F. Ritt: Algebraic Combinations of Exponentials [Trans. Amer. Math. Soc. **31** (1929), S. 654–679] Untersuchungen angestellt werden, die mit den in der vorliegenden Abhandlung behandelten Fragen zusammenhängen. In der Tat enthält die Abhandlung von Herrn Ritt unseren Satz C — die Entwickelbarkeit für den Fall Dirichletscher Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet. Der sehr interessante Beweis von Herrn Ritt geht so vor: Zuerst wird durch die Übertragung des Hensel-Landsbergischen Beweises ein Dirichletsches Approximationspolynom

$$\sum_{v=0}^n a_v e^{-\lambda_v s}$$

zu einer Wurzel der Gleichung (10, 1) mit einem so großen n bestimmt, daß von da an die Gradzahlen der Gleichungen, von denen die Berechnung der Koeffizienten a_v abhängt, nicht mehr kleiner werden. Es ist prinzipiell klar, daß es ein solches n gibt. Sodann ergibt sich durch Subtraktion eines solchen Approximationspolynoms nach wiederholter Differentiation der zu untersuchenden Gleichung für die gesuchte Wurzel eine Gleichung von der Form

$$u = Q_0 + Q_1 u + \dots + Q_m u^m,$$

wo $Q_0, \dots, Q_m$ Dirichletsche Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet sind, die für $s \uparrow \infty$ gegen Null streben. Eine Wurzel dieser Gleichung läßt sich nun in eine Potenzreihe in den unbestimmten $Q_0, \dots, Q_m$ entwickeln, aus der man durch Einsetzen der Dirichletschen Entwicklungen für $Q_0, \dots, Q_m$ eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe für u erhält. Erst hieraus folgt, daß die λ_v ins Unendliche streben. — Wie man sieht, wird bei diesem Beweis zur Aufstellung der formalen Dirichletschen Entwicklung von der absoluten Konvergenz Gebrauch gemacht, ganz abgesehen davon, daß er naturgemäß ein Existenzbeweis reinsten Wassers ist.

Ich darf vielleicht bemerken, daß ich im Besitze des Satzes seit 1918 bin und ihn unterdessen verschiedenen Kollegen, so z. B. Herrn E. Landau in einem Brief vom 18. 2. 1918, mitgeteilt habe. Dieser Satz war für mich der Ausgangspunkt der Untersuchungen, die in meiner Dissertation: Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen (Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 241–298) niedergelegt sind.

die *algebraischen* Methoden besprochen werden, in die das funktionentheoretische Moment nur insofern hineinspielt, als die *Konvergenz* der vorkommenden Potenzreihen mittels der *Majorantenmethode* bewiesen wird. Es gibt hier im wesentlichen zwei Möglichkeiten.

Erstens kann man direkt Potenzreihen (nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $z - a$ bzw. $1/z$) suchen, die der Definitionsgleichung formal genügen, und hinterher die Konvergenz dieser Potenzreihen beweisen. Diese Methode wird sehr ausführlich durchgeführt im Lehrbuch von Hensel-Landsberg³⁾. Die Verfasser suchen zu einer vorgegebenen Gleichung

$$(1, 1) \quad f(u, z) = 0$$

nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihen

$$e_0(z - a)^{\varepsilon_0} + e_1(z - a)^{\varepsilon_1} + \dots,$$

die der Gleichung (1, 1) formal genügen. Zu diesem Zwecke werden sukzessive die Exponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ mit Hilfe des sogenannten *Newtonschen Diagramms* bestimmt, während die Koeffizienten $e_0, e_1, \dots$ durch Auflösung gewisser Gleichungen $\varphi_\nu(e) = 0$ mit den nicht zunehmenden Gradzahlen $s_0, s_1, \dots$ berechnet werden müssen. Es ist nun wesentlich, daß a) die im Laufe des Verfahrens sich sukzessive ergebende Exponentenfolge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ monoton ins Unendliche wächst; b) die Gradzahlen s_ν von einem ν an einander gleich und in der Regel gleich Eins werden. Der Beweis von a) beruht letzten Endes wesentlich auf der Ganzzahligkeit der in $f(u, z)$ auftretenden Exponenten und ist also auf Dirichletsche Reihen direkt nicht übertragbar. Die Tatsache b) ist an sich klar, wenn auch ein Beweis, in dem nicht explizite angegeben werden kann, von welchem ν an die s_ν sicher nicht mehr abnehmen, nicht ganz befriedigend erscheint. Doch kann diesem Mangel hinterher durch Betrachtung der Diskriminante von $f(u, z)$ abgeholfen werden. Auf jeden Fall ist die Anzahl der rationalen Einzeloperationen, die hier zur „Abtrennung“ der zu untersuchenden Wurzeln nötig wird, unbestimmt groß. Dazu kommt ferner, daß in den Fällen, wo die s_ν „zuletzt“ größer als 1 bleiben, die Gleichung (1, 1) eine mehrfache Wurzel besitzt, zu deren Diskussion eine etwas weiter ausholende algebraische Betrachtung nötig wird, die nun dadurch erschwert ist, daß, da der Konvergenzbeweis für die Entwicklung eben erst hinterher erbracht werden kann, ein Exkurs über die Algebra der formalen Potenzreihen nötig wird, der natürlich den Beweisgang belastet.

³⁾ Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale, Leipzig, 1902, S. 29—73.

2. Zweitens kann man — und diesen Weg hat Brill⁴⁾ eingeschlagen — die linke Seite von (1, 1), also das Polynom $f(u, z)$ sukzessive in Faktoren zerlegen, indem man geeignete gebrochene Potenzen von $z - a$ bzw. $1/z$ adjungiert. Dieser Weg ist an sich insofern vorteilhafter, als dabei bei jedem einzelnen Schritt die Konvergenz der Koeffizientenreihen bewiesen werden kann und nicht erst hinterher. Doch wird hiervon erst in der zweiten der oben zitierten Brillschen Arbeiten Gebrauch gemacht, während in der ersten die Zerlegung zuerst im Körper der formalen Potenzreihen durchgeführt wird.

Allerdings werden in den beiden zitierten Abhandlungen in Wahrheit nur diejenigen Wurzeln von $f(u, z)$ entwickelt, die in der Umgebung von $z = a$ endlich bleiben, da die vorherige Anwendung des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes die anderen Wurzeln von vornherein ausscheiden läßt. Doch ist dem natürlich leicht abzuhelpen, indem man $u(z - a)^m$ für ein hinreichend großes m als neue Unbekannte einführt.

Ferner ist zu sagen, daß auch die von Brill angegebene sukzessive Reduktion eine unbestimmt große Anzahl von algebraischen Einzelschritten voraussetzt, bis man zu einer weiteren Zerlegung des Polynoms gelangt, da auch hier eine gewisse Gleichung $\psi_r(e) = 0$ eine Rolle spielt, deren Grad nicht abnimmt und daher von einem r an konstant bleibt. Dieser Grund läßt auch die Brillsche Methode für die direkte Übertragung auf den Fall Dirichletscher Reihen als wenig geeignet erscheinen.

Besonders interessant an den Brillschen Abhandlungen ist neben dem Gedanken, das Polynom $f(u, z)$ direkt in Faktoren zu zerlegen, der Versuch, den Weierstrassschen Vorbereitungssatz heranzuziehen. Dieser Satz lautet für den Fall von zwei Variablen folgendermaßen:

Satz W. *Es sei $\Phi(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ konvergente Potenzreihe in x, y . Für $x = 0$ möge $\Phi(0, y)$ mit dem Gliede $a y^n$ beginnen, wo $a \neq 0$ und $n > 0$ ist. Dann gilt für $\Phi(x, y)$*

$$(2, 1) \quad \Phi(x, y) = (y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n) E(x, y),$$

wo $X_1, \dots, X_n$ für $x = 0$ verschwindende und in der Umgebung von $x = 0$ konvergente Potenzreihen in x sind, während $E(x, y)$ eine in der Umgebung von $x = 0, y = 0$ konvergente Potenzreihe mit $E(0, 0) \neq 0$ ist.

Während Brill in der ersten Abhandlung den Satz W eigentlich nur benutzt, um die unendlich werdenden Wurzeln wegzuschaffen, wird von diesem Satz in der zweiten Abhandlung ein prinzipiell sehr wichtiger Gebrauch gemacht, indem Brill den Konvergenzbeweis für die Koeffi-

⁴⁾ Münch. Sitzungsber. (1892), S. 207--220. (Sitzung vom 4. Juli 1891); Math. Ann. 69 (1910), S. 538--549.

zienten auf den Satz W — oder genauer auf seinen neuen Beweis für den Satz W, den er in der zweiten Abhandlung erbringt — zurückführt. Allerdings enthält der Brillsche Beweis des Satzes W eine Lücke. (Auf S. 545 wird nicht bewiesen, daß in der Formel (22) nur positive Potenzen von x vorkommen.) Vor allem aber läßt sich *jeder* Zerlegungsschritt bei Brill vollständig auf den Vorbereitungssatz zurückführen — auch in den etwas umständlichen algebraischen Betrachtungen über gewisse Rekursionsformeln — und nicht nur der Konvergenzbeweis. Zu diesem Zwecke braucht man nur die Tatsache zu benutzen, daß in der Gleichung (2, 1), falls Φ ein Polynom in y ist, auch E ein Polynom in y sein muß. Diese Tatsache wird allerdings in den üblichen Beweisen des Satzes W nicht mitbewiesen, läßt sich aber leicht hinterher aus dem Satz W folgern, und ist übrigens, sobald man eben die Reihenentwicklungen für algebraische Funktionen benutzt, aus (2, 1) unmittelbar herzuleiten. Auf jeden Fall ließe sich dieser Teil der Brillschen Diskussion wesentlich vereinfachen, wenn man vom folgenden Satz ausgehen wollte:

Satz R: *Ist $\Phi(x, y)$ ein Polynom m -ten Grades in y mit in der Umgebung von $x = 0$ konvergenten Potenzreihen in x als Koeffizienten, und beginnt für $x = 0$ die Entwicklung von $\Phi(0, y)$ mit dem Gliede $a y^n$, $n > 0$, $a \neq 0$, so gilt:*

$$(2, 2) \quad \Phi(x, y) = (y^n + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n) E(x, y),$$

wo $X_1, \dots, X_n$ für $x = 0$ verschwindende in der Umgebung von $x = 0$ konvergente Potenzreihen sind, während $E(x, y)$ ein Polynom $(m-n)$ -ten Grades in y ist mit in der Umgebung von $x = 0$ konvergenten Potenzreihen in x als Koeffizienten.

3. Zwischen die beiden oben zitierten Abhandlungen von Brill fällt das Erscheinen der Pariser Thèse von Gustave Dumas⁵⁾. Im zweiten Teil dieser, ohne Kenntnis der Brillschen Arbeit entstandenen Abhandlung führt Dumas in sehr ausführlicher und sorgfältiger Darstellung den Gedankengang der Brillschen Methode durch, wobei er aber nicht den Satz W oder R benutzt, sondern direkt beweist, daß ein Polynom in y mit in der Umgebung von $x = 0$ konvergenten Potenzreihen in x als Koeffizienten sicher im Bereich solcher Potenzreihen reduzibel ist, wenn sein Newtonsches Diagramm gebrochen ist — darauf läuft die Tatsache hinaus, die Brill im Zusammenhang mit dem Weierstrassschen Vorbereitungssatz bewies. Um aber ein gegebenes Polynom auf die Form zu bringen, bei dem sein Diagramm gebrochen ist, muß Dumas im

⁵⁾ Gustave Dumas, Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné. Thèse, Paris, 1904.

wesentlichen die gleichen Transformationen wie Brill vornehmen, wobei die Anzahl der nötigen Einzelschritte wiederum jedesmal unbestimmt groß ist.

Es verdient ferner erwähnt zu werden, daß im ersten Teil der Dumasschen Thèse ein auf körpertheoretischen Betrachtungen beruhender Beweis geführt wird, daß jede im Sinne der abstrakten Körpertheorie aufzufassende Wurzel der betreffenden Gleichung nach gebrochenen Potenzen von x formal entwickelt werden kann, womit ein neuer Zugang zu dem oben bei der Besprechung des Hensel-Landsbergischen Beweises charakterisierten Beweisprinzip gefunden war. Diese Methode ist später von Herrn Hensel wiedergefunden worden⁶⁾.

Es sei endlich noch ein im ersten Teil der Dumasschen Thèse bewiesener Satz erwähnt, wonach ein Polynom in y mit formalen Potenzreihen in x als Koeffizienten im Bereich solcher Potenzreihen sich in Faktoren zerlegt, die den einzelnen Seiten des Newtonschen Diagramms entsprechen, und umgekehrt, bei Multiplikation von zwei solchen Polynomen entsteht das Newtonsche Diagramm des Produktes durch geometrische Addition der im Sinne der wachsenden Steigungen geordneten einzelnen Seiten der Diagramme der beiden Faktoren. Diese Sätze sind unmittelbare Folgerungen aus der bereits Puiseux bekannten Tatsache, daß jeder Seite des Newtonschen Diagramms eine Anzahl von Entwicklungen entspricht, die der Projektion der betreffenden Seite auf die x -Achse proportional ist. Der von Dumas gegebene direkte Beweis dieses Satzes ist aber im Prinzip auf andere Fälle übertragbar und hat bereits zu sehr interessanten Irreduzibilitätssätzen in der Theorie der ganzzahligen Polynome geführt⁷⁾. Vgl. hierzu § 5.

4. Wir wollen nun zeigen, daß der Satz, wonach ein Polynom in y mit in der Umgebung von $x = 0$ konvergenten Potenzreihen als Koeffizienten sich nach Adjunktion einer geeigneten gebrochenen Potenz von x in Linearfaktoren zerlegen läßt, sich aus dem Satz R bzw. W folgendermaßen direkt herleiten läßt. Wir werden im folgenden der Kürze halber den Bereich aller Potenzreihen in einer Variablen x , die in der Umgebung von $x = 0$ konvergieren und höchstens endlich viele negative Potenzen von x enthalten, mit G_x bezeichnen.

Es sei das vorgelegte Polynom in der Form geschrieben:

$$F(y, x) = y^n + A_1(x) y^{n-1} + \dots + A_i(x) y^{n-i} + \dots + A_n(x).$$

⁶⁾ Hensel, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 118—131.

⁷⁾ Vgl. G. Dumas, Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels. Journ. d. math. (6) 2 (1906), S. 191—258.

Die Entwicklung von $A_i(x)$ nach Potenzen von x beginne für jedes i mit $a_i x^{q_i}$, $a_i \neq 0$, wenn $A_i(x) \neq 0$. Wir dürfen annehmen, daß $A_1(x) \equiv 0$ ist, da wir ja sonst anstatt y nur $y + \frac{A_1(x)}{n}$ als neue Variable einzuführen brauchen. Sind nun alle $A_i \equiv 0$, so ist nichts zu beweisen; sonst sei κ die kleinste unter den Zahlen q_i/i für diejenigen A_i , die nicht identisch Null sind, und es möge $\frac{q_{i_1}}{i_1} = \kappa$ sein für $i_1 < i_2 < \dots < i_e$.

Dann ist offenbar

$$q_i - i\kappa \geq 0,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $i = i_1, i_2, \dots, i_e$ gilt. Setzen wir nun

$$y = \eta x^\kappa,$$

so verwandelt sich unser Polynom in

$$(4, 1) \quad F(y, x) = x^{n\kappa}(\eta^n + A_1(x)x^{-\kappa}\eta^{n-1} + \dots + A_i(x)x^{-i\kappa}\eta^{n-i} + \dots + A_n(x)x^{-n\kappa}).$$

Ist

$$\kappa = \frac{p}{q}, \quad q \geq 1, \quad (p, q) = 1, \quad \xi = x^{1/q},$$

so können wir die Klammer rechts in (4, 1) auch schreiben:

$$\Phi(\eta, \xi) = \eta^n + B_1(\xi)\eta^{n-1} + \dots + B_i(\xi)\eta^{n-i} + \dots + B_n(\xi),$$

wo $B_1(\xi) \equiv 0$ ist und allgemein $B_i(\xi)$ mit $a_i \xi^{q(q_i - i\kappa)} = a_i \xi^{q q_i - p i}$ beginnt, und dieser Exponent ist ≥ 0 und nur gleich 0 für $i = i_1, i_2, \dots, i_e$. Daraus folgt

$$\Phi(\eta, \xi) = \eta^n + a_{i_1} \eta^{n-i_1} + a_{i_2} \eta^{n-i_2} + \dots + a_{i_e} \eta^{n-i_e} + \xi \Phi^*(\eta, \xi),$$

wo $\Phi^*(\eta, \xi)$ wiederum ein Polynom in η ist mit Koeffizienten aus G_ξ , die für $\xi = 0$ endlich bleiben. Das Polynom

$$\varphi(\eta) = \eta^n + a_{i_1} \eta^{n-i_1} + \dots + a_{i_e} \eta^{n-i_e}$$

besitzt nun wenigstens zwei nicht identisch verschwindende Glieder; da andererseits der Koeffizient bei η^{n-1} Null ist, kann dieses Polynom nicht die n -te Potenz eines Linearfaktors $\eta - \alpha$ sein, es besitzt also *wenigstens zwei verschiedene Wurzeln*. Es sei nun α eine Wurzel von $\varphi(\eta)$ von der Mehrfachheit $\mu < n$. Setzt man nun $\eta - \alpha = z$, so wird

$$\varphi(\eta) = z^\mu (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-\mu} z^{n-\mu}), \quad b_0 \neq 0, \quad \mu < n.$$

Daher gilt

$$\Phi(\eta, \xi) = \Psi(z, \xi) = z^\mu (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-\mu} z^{n-\mu}) + \xi \Phi^{**}(z, \xi),$$

wo auch im Polynom Φ^{**} in z die Koeffizienten zu G_ξ gehören und für $\xi = 0$ endlich bleiben.

Da aber das Polynom Ψ von n -tem Grade in z ist und für $\xi = 0$ mit $b_0 z^\mu$, $b_0 \neq 0$, $1 \leq \mu < n$ beginnt, ist darauf der Satz R anwendbar und Ψ und damit auch $F(x, y)$ ist im Bereich G_ξ reduzibel. Wenden wir die gleiche Überlegung auf die beiden damit aufgewiesenen Faktoren von F an, wobei wir ihre Koeffizienten als Potenzreihen in ξ schreiben, so können wir auch diese Faktoren weiter zerlegen und so fortfahren, bis die Zerlegung von $F(x, y)$ in Linearfaktoren vollzogen ist.

Wir haben dabei vom Satze R Gebrauch gemacht; will man vom Satze W ausgehen, so braucht man nur folgendermaßen zu schließen:

Wir können annehmen, daß unsere Behauptung für alle Polynome von niedrigerem als n -tem Grad bereits bewiesen ist. Wendet man nun den Satz W auf $\Psi(z, \xi)$ an, so folgt

$$(4, 2) \quad \Psi(z, \xi) = (z^\mu + C_1(\xi)z^{\mu-1} + \dots + C_\mu(\xi)) E(z, \xi),$$

wo $C_1(\xi) \dots C_\mu(\xi)$ zu G_ξ gehören, während $E(z, \xi)$ eine in der Umgebung von $z = 0$, $\xi = 0$ konvergente Potenzreihe ist. Wegen $\mu < n$ gibt es also eine solche ganze Zahl Q , daß, $\xi^{1/Q} = \zeta$ gesetzt, das Polynom in den Klammern auf der rechten Seite von (4, 2) sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$z^\mu + C_1(\xi)z^{\mu-1} + \dots = \prod_{r=1}^{\mu} (z - D_r(\zeta)),$$

wo $D_r(\zeta)$ zu G_ζ gehören. Andererseits gehören auch die Koeffizienten von Ψ zu G_ζ ; setzt man nun $z = D_1(\zeta)$ in Ψ , so ist das Resultat wegen (4, 2) identisch gleich 0. Wir können also in der Formel (4, 2) auf beiden Seiten durch $z - D_1(\zeta)$ durchdividieren; indem wir dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir schließlich das Resultat, daß $E(z, \xi)$ ein Polynom in z vom Grade $n - \mu < n$ ist und also gleichfalls in Linearfaktoren zerlegbar ist, womit die gleiche Tatsache auch für Ψ bewiesen ist.

Unser Beweis wird sich nun auch auf den Fall von algebraischen Funktionen von Dirichletschen Reihen ausdehnen lassen.

§ 2.

Über eine Verallgemeinerung des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes.

5. Wir werden uns im folgenden mit Potenzreihen befassen:

$$(5, 1) \quad \sum_{r=0}^{\infty} A_r(P) y^r,$$

wo die Koeffizienten $A_r(P)$ Funktionen eines Punktes P sind. Der Punkt P durchläuft dabei eine gewisse Folge von Bereichen $B(s)$, die von einem reellen Parameter s , $0 < s < \infty$, abhängen. Dabei soll der Bereich B sich „verkleinern“, wenn s wächst, d. h. für $s_2 > s_1$ gilt $B(s_2) \subset B(s_1)$. Von den Koeffizienten $A_r(P)$ setzen wir ferner folgendes voraus: Liegt P in $B(s)$ und ist $s \rightarrow \infty$, so gilt $A_r(P) \rightarrow a_r$, wo

$|a_v| < \infty$ ist. Darüber hinaus verlangen wir aber, daß es ein $s_0 > 0$ und $\varrho > 0$ gibt, so daß unsere Potenzreihe *gleichmäßig* für alle $P < B(s_0)$ und $|y| \leq \varrho$ konvergiert. Aus dieser Voraussetzung folgt, daß es eine solche positive Konstante $C > 0$ gibt, daß für $P < B(s_0)$

$$(5, 2) \quad |A_r(P)| \leq C \left(\frac{1}{\varrho}\right)^r$$

gilt. Im übrigen können die Funktionen $A_r(P)$ sehr verschiedener Natur sein. Wir geben zwei Beispiele an:

a) Es sei der Bereich $B(s)$ der $2n$ -dimensionale Bereich, der von n komplexen Größen $x_1, \dots, x_n$ für $|x_v| \leq e^{-s}$ beschrieben wird. Als die Größen $A_r(P)$ können wir hier z. B. Potenzreihen zulassen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, \dots, x_n$ fortschreiten und in einem gewissen Bereich $B(s)$ konvergieren. Dieser Fall wird uns auf die Weierstrasssche Fassung des Vorbereitungssatzes führen⁸⁾.

b) Es sei der Bereich $B(s)$ die Halbebene $\Re z \geq s$. Als Funktionen $A_r(P)$ können wir dann Dirichletsche Reihen von der Form

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_v e^{-\lambda_v z}, \quad 0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \quad \lambda_v \uparrow \infty$$

betrachten, die ein Konvergenzgebiet besitzen. In Hinblick auf diesen Fall ist die im folgenden dargestellte Theorie in erster Linie entwickelt, doch ist sie auch auf die Fälle anwendbar, wo die $A_r(P)$ in hohem Maße willkürliche Funktionen des Punktes P sind.

⁸⁾ Der Weierstrasssche Beweis des Vorbereitungssatzes steht in den Mathematischen Werken von Weierstrass, Bd. 2, S. 135–142. Seitdem sind für diesen Satz sehr viele Beweise gegeben worden, die zum Teil auf der Weiterbildung des Weierstrassschen Beweisprinzips beruhen. Hier ist in erster Linie der Beweis von L. Stickelberger [Math. Ann. 30 (1887), S. 404 ff.] zu nennen, der sich zwar explizite auf den Fall von zwei Variablen bezieht, dafür aber besonders elegant und durchsichtig ist. Von einem ähnlichen Beweisprinzip gehen die Beweise von Hartogs [Münch. Sitzungsber. (1909)] und Wirtinger [Journ. f. reine u. angew. Math. 158 (1927), S. 260 ff.] aus.

Ein anderer Beweisgedanke, der auf einer Verallgemeinerung der Division auf unendliche Reihen beruht, ist zuerst von Goursat [Bull. de la Soc. math. de France 36 (1908), S. 209 ff.] entwickelt worden. Dieser Gedanke ist dann später im allgemeineren Zusammenhang von Engel [Leipzig. Sitzungsber. 68 (1916), S. 184–198] und Vranceanu [Rend. di Palermo 50 (1926), S. 428 ff.] wiedergefunden worden.

Ein dritter, wesentlich algebraischer Beweisansatz ist von G. Dumas [Münch. Ber. (1909)] und später in verschiedenen Ausführungen von Bliss [Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1910), S. 356 ff.], Mac Millan [Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1911), S. 116 ff.] sowie Späth [Journ. f. reine u. angew. Math. 161 (1929), S. 95 ff.] angewandt worden. — Endlich ist noch der auf dem Cauchyschen Integral beruhende Beweis anzuführen, wie er in Picards *Traité d'Analyse* und anderen Lehrbüchern der Analysis angegeben wird.

Insbesondere enthalten die Abhandlungen von Vranceanu, Wirtinger und Späth eingehendere Betrachtungen über die Koeffizientendarstellungen sowie den genauen Konvergenzbereich der entstehenden Potenzreihen.

Ferner werden wir uns auch mit Laurent-Reihen in y von der Form

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} A_v(P) y^v$$

zu befassen haben, die für $P < B(s)$ und $\varrho_2 \leq y \leq \varrho_1$ gleichmäßig konvergieren.

6. Unser Ziel ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

Satz A: Es sei

$$\Phi(y, P) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(P) y^v$$

für $P < B(s_0)$, $|y| \leq \varrho$ gleichmäßig konvergent. Es möge sich für $A_v(P) \rightarrow a$ mit $P < B(s)$, $s \uparrow \infty$, die Potenzreihe $\Phi(y, P)$ auf

$$\Phi_0(y) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v y^v = a_n y^n + a_{n+1} y^{n+1} + \dots, \quad n > 1, \quad |a_n| \neq 0,$$

reduzieren; dann gibt es solche positive Zahlen s_1 und ϱ_1 , daß für $P < B(s_1)$ und $|y| \leq \varrho_1$ die Zerlegung

$$(6, 1) \quad \Phi(y, P) = (y^n + B_1(P) y^{n-1} + \dots + B_n(P)) \sum_{v=0}^{\infty} C_v(P) y^v$$

gilt, wo die Grenzwerte der $B_v(P)$, $C_v(P)$ für $P < B(s)$, $s \uparrow \infty$ existieren und endlich sind, und insbesondere $\lim C_0(P)$ für $P < B(s)$, $s \uparrow \infty$ von Null verschieden ist. Hier existieren $B_v(P)$ und $C_v(P)$ für $P < B(s_1)$, und

$$(6, 2) \quad E(y, P) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v(P) y^v$$

konvergiert gleichmäßig für $P < B(s_1)$ und $|y| \leq \varrho_1$. Dabei ergeben sich die Größen $B_v(P)$ und $C_v(P)$ in der Form:

$$(6, 3) \quad \lim G_m \left(\frac{A_1}{a_n}, \frac{A_2}{a_n}, \dots, \frac{A_{n+m}}{a_n} \right),$$

wo G_m Polynome mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten sind und sowohl der Grad, als auch die Anzahl der Argumente mit $m \rightarrow \infty$ unbegrenzt wachsen kann, und zwar konvergieren die Darstellungen (6, 3) gleichmäßig für alle $P < B(s_1)$.

Zusatz 1 zu Satz A. Ist insbesondere $\Phi(y, P)$ ein Polynom m -ten Grades in y , so ist auch $E(y, P)$ ein Polynom von $(m - n)$ -ten Grad in y .

7. Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $a_n = 1$ annehmen, da wir $\Phi(y, P)$ durch a_n durchdividieren können. Wir betrachten den Quotienten:

$$(7, 1) \quad \frac{\Phi}{y^n} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} A_{v+n} y^v + \sum_{v=1}^n \frac{A_{n-v}}{y^v} + A_n - 1 = 1 + D(y, P).$$

Aus den Relationen (5, 2) folgt für $|y| \leq \varrho_1 < \varrho$ und $P < B(s_0)$

$$(7, 2) \quad \left| \sum_{v=1}^{\infty} A_{v+n} y^v \right| \leq C \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varrho_1^v}{\varrho^{v+n}} = \frac{C}{\varrho^n} \frac{\varrho_1}{\varrho - \varrho_1}.$$

Es sei nun Θ eine feste Zahl mit $0 < \Theta < 1$; dann wollen wir ϱ_1 so bestimmen, daß die Schranke rechterseits in (7, 2) gleich $\frac{\Theta}{2}$ wird. Es gilt also dann

$$(7, 3) \quad \left| \sum_{v=1}^{\infty} A_{v+n} y^v \right| \leq \frac{\Theta}{2}, \quad P < B(s_0), \quad |y| \leq \varrho_1.$$

Wir schränken nunmehr y auf den Kreisring

$$(R) \quad \frac{\varrho_1}{2} \leq |y| \leq \varrho_1$$

ein. Nun folgt aus unseren Annahmen, daß für $P < B(s)$, $s \uparrow \infty$, jede der $n+1$ Funktionen $A_0(P)$, ..., $A_{n-1}(P)$, $A_n(P) - 1$ gegen 0 konvergiert. Wir können also ein $s_1 > s_0$ so groß annehmen, daß

$$(7, 4) \quad \left| \sum_{v=1}^n \frac{A_{n-v}}{y^v} + A_n(P) - 1 \right| \leq \frac{\Theta}{2}, \quad \text{für } P < B(s_1), \quad |y| \geq \frac{\varrho_1}{2}$$

gilt. Da wegen (7, 3) und (7, 4) $|D(y, P)| \leq \Theta < 1$ für $P < B(s_1)$, $y \in (R)$ gilt, konvergiert also die Reihe

$$(7, 5) \quad \lg \left(\frac{\Phi}{y^n} \right) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v} D^v$$

gleichmäßig im Bereiche

$$(7, 6) \quad P < B(s_1), \quad \frac{\varrho_1}{2} \leq |y| \leq \varrho_1.$$

Die einzelnen Summanden in (7, 5) stellen nun Laurent-Reihen in y dar, die im Bereiche (7, 6) gleichmäßig konvergieren. Wir behaupten nun, daß wir die rechte Seite von (7, 5) nach Potenzen von y umordnen und in der Form schreiben können:

$$(7, 7) \quad \lg \left(\frac{\Phi}{y^n} \right) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v y^v + b_0 + \sum_{v=-1}^{-\infty} b_v y^v = A_+ + b_0 + A_-.$$

Zuerst gilt für eine Partialsumme $\sum_{v=1}^N \frac{(-1)^v}{v} D^v$ der Summe in (7, 5) die Darstellung

$$(7, 8) \quad f_N = \sum_{v=-\infty}^{\infty} b_v^{(N)} y^v,$$

die im Bereiche (7, 6) gleichmäßig konvergiert, und dabei sind die $b_v^{(N)}$ offenbar Polynome in jeweils endlich vielen A_μ .

8. Nun gilt der bekannte Weierstrasssche Doppelreihensatz nicht nur für Potenzreihen, sondern auch, wie er in der Originalabhandlung von Weierstrass⁹⁾ formuliert ist, für Laurent-Reihen. Er gilt aber auch in einer noch insofern allgemeineren Fassung, als man dabei in die Voraussetzungen und Behauptungen die Gleichmäßigkeit in Bezug auf einen Parameter einführen kann. Wir formulieren ihn daher im folgenden in entsprechender Weise:

Es sei

$$(8, 1) \quad f_\mu(x, s) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \alpha_v^{(\mu)}(s) x^v$$

eine Folge von im Kreisring $\varrho_2 \leq |x| \leq \varrho_1$ und für s aus einer Menge M gleichmäßig konvergierenden Laurent-Reihen, es möge ferner diese Folge mit $\mu \uparrow \infty$ gleichmäßig für alle s aus M und $\varrho_1 \leq |x| \leq \varrho_2$ gegen eine Funktion $F(x, s)$ konvergieren. Dann konvergieren für jedes v die Folgen $\alpha_v^{(\mu)}$ mit ins Unendliche wachsenden μ gleichmäßig für s aus M gegen $A_v(s)$ und es gilt

$$F(x, s) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} A_v(s) x^v,$$

wo auch diese Potenzreihe gleichmäßig für s aus M und $\varrho_1 < \varrho'_1 \leq |x| \leq \varrho'_2 < \varrho_2$ konvergiert, wobei ϱ'_1 , ϱ'_2 beliebig nahe an ϱ_1 bzw. ϱ_2 angenommen werden können.

Was die Behauptung über die gleichmäßige Konvergenz von $\alpha_v^{(\mu)}$ für $\mu \uparrow \infty$ anbetrifft, so folgt sie aus den Integraldarstellungen

$$(8, 2) \quad \alpha_v^{(\mu)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{f_\mu(t, s)}{t^{v+1}} dt,$$

wo R etwa der Kreis $|t| = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ ist, unmittelbar. Andererseits folgt aus unseren Annahmen, daß die Funktionen $f_\mu(x, s)$ für $\mu > \mu_0$ in ihrer Gesamtheit auf dem Kreisring $\varrho_1 \leq |x| \leq \varrho_2$ gleichmäßig für alle s aus M beschränkt sind. Daher konvergieren die Laurent-Reihen für $f_\mu(x, s)$ im Kreisring $\varrho'_1 \leq |x| \leq \varrho'_2$ gleichmäßig auch in bezug auf μ für $\mu > \mu_0$; daraus ergibt sich aber durch den nunmehr erlaubten Grenzübergang $\mu \uparrow \infty$ auch die gleichmäßige Konvergenz von $F(x, s)$, womit unsere Behauptungen vollständig bewiesen sind. --

⁹⁾ Weierstrass, Werke 2, S. 205 ff.

Wenden wir nun dies auf die Reihen (7, 8) an, so ergibt sich nunmehr (7, 7), wobei b_r gleichmäßig in s Grenzwerte der $b_r^{(N)}$ sind. Nun folgt aus (7, 7)

$$(8, 3) \quad \frac{\Phi}{y^n} = e^{b_0} \cdot e^{A_-} \cdot e^{A_+} = e^{b_0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r(P)}{y^r} \sum_{v=0}^{\infty} C_v^*(P) y^v, \\ (B_0(P) = C_0^*(P) = 1),$$

wo jedes B_r und C_r für $r > 0$ ein Polynom aus endlich vielen b , mit rationalen Zahlenkoeffizienten ist. Hieraus folgt weiter, $e^{b_0} C_v^* = C_v$ gesetzt, die Darstellung:

$$(8, 4) \quad \Phi(y, P) = \left(y^n + B_1(P) y^{n-1} + \dots + B_n(P) + \frac{B_{n+1}(P)}{y} + \dots \right) \sum_{v=0}^{\infty} C_v(P) y^v.$$

Wir behaupten nun, daß alle Koeffizienten $B_{n+r}(P)$ für $r > 0$ und $P < B(s_1)$ verschwinden. Denn aus (8, 3) folgt

$$(8, 5) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \frac{B_v(P)}{y^v} = \frac{\Phi}{y^n} \cdot e^{-b_0} \cdot e^{-A_+},$$

und hier ist die rechte Seite eine Potenzreihe y , in der die negativen y -Exponenten nicht kleiner als $-n$ werden können.

Ferner folgt aus (8, 3)

$$(8, 6) \quad \sum_{v=0}^{\infty} C_v(P) y^v = \frac{\Phi}{y^n} \cdot e^{-A_-},$$

und da hier rechterseits nur Φ positive Potenzen von y enthält, folgt, daß, wenn Φ ein Polynom in y ist, dasselbe auch für die $\sum_{v=0}^{\infty} C_v(P) y^v$ gilt.

Damit liefert nunmehr (8, 4) die Behauptung unseres Satzes, da auch e^{b_0} ein in bezug auf s gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen in b_0 ist, und die oben an die (8, 6) angeschlossene Bemerkung liefert den Zusatz 1 zu Satz A.

Zusatz 2 zum Satze A. Gibt es eine zu (6, 1) analoge Zerlegung

$$\Phi(y, P) = (y^n + B_1^*(P) y^{n-1} + \dots + B_n^*(P)) \sum_{v=0}^{\infty} C_v^*(P) y^v, \quad C_0^* \rightarrow \alpha \neq 0,$$

für $P < B(s_1^*)$, $|y| \leq \varrho_1^*$, so fällt diese Zerlegung mit (6, 1) zusammen, wenn man s_1^* und ϱ_1^* geeignet abändert (also s_1^* vergrößert, ϱ_1^* verkleinert). Denn unsere Zerlegung ist äquivalent mit

$$(8, 7) \quad \frac{\Phi(y, P)}{y^n} = \left(1 + \frac{B_1^*(P)}{y} + \dots + \frac{B_n^*(P)}{y^n} \right) \sum_{v=0}^{\infty} C_v^*(P) y^v.$$

Wählt man nun s_2, ϱ_2 so, daß für $P < C(s_2)$, $\frac{\varrho_2}{2} \leq |y| \leq \varrho_2$,

$$\left| \frac{B_1^*(P)}{y} \right| + \dots + \left| \frac{B_n^*(P)}{y^n} \right| \leq \frac{\Theta}{2}, \quad \sum_{v=1}^{\infty} |C_v^*(P) y^v| + |C_0^*(P) - \alpha| \leq \frac{|\Theta|}{2} |\alpha|$$

für einen festen echten Bruch Θ gilt, so sind die Logarithmen der beiden Faktoren von (8, 7) nach Potenzen von y entwickelbar und liefern das Aggregat der negativen Potenzen von y bzw. der nicht negativen Potenzen von y in der Laurent-Entwicklung von $\lg \frac{\Phi(y, P)}{y^n}$, deren einzelne Glieder ja eindeutig bestimmt sind. —

In der oben bewiesenen Formulierung ist offenbar auch der Weierstrasssche Vorbereitungssatz für Potenzreihen in beliebig vielen Variablen enthalten, wenn man die $A_v(P)$ so spezialisiert, wie im Beispiel a) der Nummer 5 angegeben wurde. Denn sind $A_v(P)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1, \dots, x_m$ fortschreitende Potenzreihen, die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergieren, so gilt nach dem Weierstrassschen Doppelreihensatz dasselbe auch für die aus ihnen und ihren ganzen rationalen Verbindungen durch gleichmäßige Grenzübergänge hervorgehenden Funktionen B_v und C_v .

§ 3.

Dirichletsche Reihen mit dem Gebiet absoluter Konvergenz.

9. Die Spezialisierung des Satzes A auf den Fall der Dirichletschen Reihen¹⁰⁾ als Koeffizienten [Beispiel b) der Nr. 5] stößt insofern auf Schwierigkeiten, als der Weierstrasssche Doppelreihensatz auf das Gebiet der Dirichletschen Reihen bisher nur in einem relativ speziellen Falle übertragen worden ist, nämlich unter den sogenannten Schneeschen Bedingungen¹¹⁾.

Wir schlagen daher einen etwas anderen Weg ein, indem wir den Beweis des Satzes A unter Benutzung der Majorantenmethode direkt durchführen. Wir formulieren unser Resultat wie folgt:

Satz B. *Es sei die Doppelreihe*

$$(9, 1) \quad F(y, s) = \sum_{v, \mu=0}^{\infty} a_{v, \mu} e^{-\lambda_v s} y^\mu, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots, \lambda_v \uparrow \infty$$

¹⁰⁾ Zur Theorie der Dirichletschen Reihen vgl. die zusammenfassende Darstellung: Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (Bd. 2, S. 723 ff.), sowie die neueren Zusammenstellungen von G. Hardy und M. Riesz: The General Theory of Dirichlet Series, Cambridge Tracts, Nr. 18, Cambridge 1915, und G. Valiron, Théorie générale des series de Dirichlet, Mémoires des sciences mathématiques, fascicule XVII.

¹¹⁾ Vgl. Fekete, Sur quelques généralisations d'un théorème de Weierstrass, Comptes rendus 153 (1911), S. 463—465.

im Bereiche $\Re s \geq \alpha$, $|y| \leq \varrho$ absolut konvergent. Es sei ferner für $n \geq 1$

$$(9, 2) \quad F_0(y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{0,\mu} y^{\mu} = a_{0,n} y^n + a_{0,n+1} y^{n+1} + \dots, \quad a_{0,n} \neq 0.$$

Dann gilt die Zerlegung

$$(9, 3) \quad F(y, s) = (y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s)) E(y, s),$$

wo die $D_1(s), \dots, D_n(s)$ Dirichletsche Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet sind,

$$(9, 4) \quad E(y, s) = \sum_{r,\mu=0}^{\infty} e_{r,\mu} e^{-\lambda_r s} y^{\mu}, \quad 0 = l_0 < l_1 < \dots, l_r \uparrow \infty$$

für $\Re s \geq \alpha_1$, $|y| \leq \varrho_1$ absolut konvergiert und $e_{0,0} \neq 0$ ist. Die Zahlen $l_0, l_1, \dots$ gehören dem aus $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ gebildeten additiven Modul an, d. h. sie sind Ausdrücke von der Form

$$m_0 \lambda_0 + m_1 \lambda_1 + \dots + m_N \lambda_N$$

für nicht negative ganze $m_0, \dots, m_N$, und dasselbe gilt von den Exponentenfolgen, die zu den Dirichletschen Reihen $D_1(s), \dots, D_n(s)$ gehören. Und zwar ist diese Zerlegung nur auf eine einzige Art möglich. Ist ferner $F(y, s)$ ein Polynom in bezug auf y , so ist auch $E(y, s)$ ein Polynom in y .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $a_{0,n} = 1$ angenommen werden. Wir bilden wieder

$$(9, 5) \quad \frac{F(y, s)}{y^n} = 1 + \sum_{\substack{r=0 \\ \mu=n+1}}^{\infty} a_{r,\mu} e^{-\lambda_r s} y^{\mu-n} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^n a_{r,\mu} e^{-\lambda_r s} y^{\mu-n} = 1 + D(y, s).$$

Wir können nun α_1 und ϱ_1 so bestimmen, daß

$$(9, 6) \quad D^*(y, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\mu=n+1}^{\infty} |a_{r,\mu}| e^{-\lambda_r s} y^{\mu-n} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^n |a_{r,\mu}| e^{-\lambda_r s} y^{\mu-n} \leq \Theta < 1$$

für $s \geq \alpha_1$, $\frac{\varrho_1}{2} \leq |y| \leq \varrho_1$ ist. Denn hierzu braucht man nur ϱ_1 so klein zu wählen, daß die erste Summe für $s \geq \alpha$, $0 \leq |y| \leq \varrho_1$ kleiner als $\frac{\Theta}{2}$ bleibt; sodann wählen wir $\alpha_1 \geq \alpha$ so groß, daß die zweite Summe für $\varrho_1 \geq y \geq \frac{\varrho_1}{2}$ und $s \geq \alpha_1$ $\frac{\Theta}{2}$ nicht überschreitet. Bilden wir nun

$$(9, 7) \quad \lg \frac{F(y, s)}{y^n} = \lg(1 + D(y, s)) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r D^r(y, s)}{r},$$

so besitzt die letzte Reihe als Majorante die für $s \geq \alpha_1$, $\frac{\varrho_1}{2} \leq y \leq \varrho_1$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} (D^*(y, s))^r,$$

die sich in ihrem Konvergenzbereich in

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_{r,\mu} e^{-l'_r s} y^\mu$$

umordnen läßt, wo $\beta_{r,\mu}$ nicht negative Zahlen sind und die l'_r dem aus $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ gebildeten additiven Modul angehören. Daher läßt sich auch (9, 7) umordnen in

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_{r,\mu} e^{-l'_r s} y^\mu, \quad |b_{r,\mu}| \leq \beta_{r,\mu}.$$

Setzen wir nun

$$A_+ = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_{r,\mu} e^{-l'_r s} y^\mu, \quad A_- = \sum_{\mu=-1}^{-\infty} \sum_{r=0}^{\infty} b_{r,\mu} e^{-l'_r s} y^\mu,$$

so haben diese Reihen die analogen mit den Koeffizienten $\beta_{\mu,r}$ gebildeten Reihen zu Majoranten. Daher lassen sich die Entwicklungen

$$e^{A_+} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_+^r}{r!}, \quad e^{A_-} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_-^r}{r!}$$

umordnen in die Reihen

$$(9, 8) \quad E(y, s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} e_{r,\mu} e^{-l_r s} y^\mu, \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} c_{r,\mu} e^{-l_r s} y^\mu, \\ 0 = l_0 < l_1 < \dots, \quad l_r \uparrow \infty,$$

wo $e_{0,0} = c_{0,0} = 1$, $c_{1,0} = c_{2,0} = \dots = 0$ ist, und die beiden Reihen (9, 8) für $\Re s \geq \alpha_1$, $\frac{\varrho_1}{2} \leq |y| \leq \varrho_1$ konvergieren absolut und gleichmäßig. Daher ergibt sich, wenn wir die zweite der Reihen (9, 8) nach Potenzen von y ordnen:

$$(9, 9) \quad F(y, s) = \left(y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s) + \frac{D_{n+1}(s)}{y} + \dots \right) E(y, s).$$

Aus (9, 9) folgt aber

$$(9, 10) \quad y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s) + \frac{D_{n+1}(s)}{y} + \dots = F(y, s) \cdot e^{-A_+},$$

$$(9, 11) \quad E(y, s) = y^{-n} F(y, s) e^{-A_-}.$$

Die rechte Seite von (9, 10) läßt sich nun nach Potenzen von y entwickeln und enthält keine negativen Potenzen von y , so daß $D_{n+1}(s) = D_{n+2}(s) = \dots = 0$ sein muß. Die Formel (9, 11) aber zeigt, daß, wenn $F(y, s)$ ein Polynom in y ist, $E(y, s)$ höchstens endlich viele posi-

tive Potenzen von y enthalten kann, also auch ein *Polynom in y* ist, da die Entwicklung von e^{-A} nach Potenzen von y keine positiven Potenzen von y enthält. Und da endlich $E(y, s)$ nach positiven Potenzen von y fortschreitet und für $\frac{\varrho_1}{2} \leq |y| \leq \varrho_1$, $\Re s \geq \alpha_1$ absolut konvergiert, muß $E(y, s)$ auch für $|y| \leq \varrho_1$, $\Re s \geq \alpha_1$ absolut konvergieren, womit unser Satz vollständig bewiesen ist. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Zusatz 2 zum Satze A.

10. Wir können nunmehr den Satz beweisen:

Satz C: *Es mögen die Koeffizienten der Gleichung*

$$(10, 1) \quad D_0(s) y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s) = 0$$

Dirichletsche Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet sein, wobei $D_0(s) \neq 0$, $D_n(s) \neq 0$ ist. Dann lassen sich für ein gewisses reelles α die n Wurzeln dieser Gleichung für $\Re s \geq \alpha$ in Dirichletsche Reihen mit absolutem Konvergenzgebiet entwickeln. Die Exponentenfolgen der Dirichletschen Reihen, die zu den Wurzeln unserer Gleichung gehören, lassen sich nach Multiplikation mit einer festen ganzen Zahl aus je endlich vielen Exponenten der Dirichletschen Reihen $D_0(s), \dots, D_n(s)$ linear mit ganzen Koeffizienten zusammensetzen.

Beweis: Wir schicken dem Beweis die Bemerkung voraus, daß, wenn

$$D(s) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda_r s}, \quad b_0 \neq 0,$$

eine irgendwo absolut konvergente Dirichletsche Reihe ist, sich auch $\frac{1}{D(s)}$ wiederum in eine solche entwickeln läßt, wobei die Exponentenfolge der neuen Reihe sich aus $-\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ additiv zusammensetzt. Denn in

$$D(s) = a_0 e^{-\lambda_0 s} \left(1 + \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-(\lambda_v - \lambda_0)s} \right), \quad a_0 \neq 0,$$

kann man σ so groß annehmen, daß

$$\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| e^{-(\lambda_v - \lambda_0)\sigma} \leq \Theta < 1$$

ist; dann besitzt aber die Entwicklung

$$1 - \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-(\lambda_v - \lambda_0)s} \right) + \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-(\lambda_v - \lambda_0)s} \right)^2 + \dots$$

als Majorante die Reihe

$$1 + \left(\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| e^{-(\lambda_v - \lambda_0)s} \right) + \left(\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| e^{-(\lambda_v - \lambda_0)s} \right)^2 + \dots$$

und läßt sich daher nach den Exponentiellen umordnen, woraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{a_0} e^{\lambda_0 s}$ die behauptete Entwicklung von $\frac{1}{D(s)}$ hervor-

geht. Mit andern Worten, durch eine Dirichletsche Reihe mit absolutem Konvergenzgebiet „darf man dividieren“.

Wir dürfen daher beim Beweis $D_0(s) \equiv 1$ annehmen. Ferner dürfen wir annehmen, daß $D_1(s) \equiv 0$ ist, da wir sonst nur als neue Unbekannte $y + \frac{D_1(s)}{n}$ einzuführen brauchen. Es beginne nun allgemein $D_r(s)$ mit $a^{(v)} e^{-\varrho_v s}$, $a^{(v)} \neq 0$, wobei wir für $D_r(s) \equiv 0$ $a^{(v)} = 1$, $\varrho_v = \infty$ annehmen. Es sei ferner κ die kleinste unter den Zahlen $\frac{\varrho_v}{\nu}$ und es möge $\frac{\varrho_{\nu_1}}{\nu_1} = \kappa$ sein für $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l$, während sonst $\varrho_v - \nu\kappa > 0$ ist. Wir setzen nun $y = y_1 e^{-\kappa s}$; dann verwandelt sich unsere Gleichung nach Multiplikation mit $e^{n\kappa s}$ in

$$y_1^n + D_2(s) y_1^{n-2} e^{2\kappa s} + \dots + D_r(s) y_1^{n-r} e^{r\kappa s} + \dots + D_n(s) e^{n\kappa s} = 0.$$

Die Entwicklung des Produktes $D_r(s) e^{r\kappa s}$ beginnt nunmehr mit

$$a^{(v)} e^{-(\varrho_v - \nu\kappa)s},$$

und dies reduziert sich auf die Konstante $a^{(v)}$ für $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l$. Ist δ die kleinste unter den übrigen Differenzen $\varrho_v - \nu\kappa$, so läßt sich unsere Gleichung in der Form schreiben

$$(10, 2) \quad y_1^n + a^{(\nu_1)} y_1^{n-\nu_1} + \dots + a^{(\nu_l)} y_1^{n-\nu_l} + e^{-\delta s} \Psi(y_1, s) \\ = \varphi(y_1) + e^{-\delta s} \Psi(y_1, s),$$

wo $\Psi(y_1, s)$ ein Polynom in y_1 ist, dessen Koeffizienten Dirichletsche Reihen mit nicht negativen Exponenten sind. Da das Polynom $\varphi(y_1)$ aus wenigstens zwei Gliedern besteht und der Koeffizient bei y_1^{n-1} gleich Null ist, besitzt dieses Polynom wenigstens zwei verschiedene Wurzeln. Ist d eine solche Wurzel von $\varphi(y_1)$, so verwandelt sich (10, 2) nach Substitution $y_1 - d = z$ in eine Gleichung von der Form

$$z^\mu (b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-\mu} z^{n-\mu}) + e^{-\delta s} \Psi_1(z, s) = 0,$$

wo $1 \leq \mu < n$, $b_0 \neq 0$ ist. Auf die linke Seite dieser Gleichung ist aber der Satz B anwendbar, und sie zerfällt daher in zwei Gleichungen von den Graden μ und $n - \mu$. Behandelt man diese Gleichungen ganz analog, so gelangt man nach endlich vielen Schritten zum Beweis des Satzes C.

Zugleich ergibt sich aus unserem Beweis: Die Exponenten, die zu den Dirichletschen Entwicklungen der Wurzeln unserer Gleichung gehören, setzen sich nach Multiplikation mit einer festen ganzen Zahl derart linear ganzzahlig aus den Exponenten der Dirichletschen Reihen $D_0(s), \dots, D_n(s)$ zusammen, daß dabei nur die Exponenten von $D_0(s), \dots, D_n(s)$ aus einem festen endlichen Vorrat negative Koeffizienten haben können.

Beim Beweis des Satzes C haben wir vor allem die folgende Tatsache benutzt: Ein Polynom $(10, 1)$ mit $D_0(s) = 1$ ist im Bereiche der Dirichletschen Reihen mit einem Gebiet absoluter Konvergenz reduzibel, wenn, falls $D_r(s)$ allgemein mit $a^{(r)} e^{-q_r s}$, $a^{(r)} \neq 0$ beginnt, alle $q_r \geq 0$ sind, $q_n > 0$ und für ein μ mit $0 < \mu < n$, $q_\mu = 0$ ist. Sobald wir daher beweisen können, daß diese Tatsache auch im Bereiche „formal konvergenter“ Dirichletscher Reihen gilt, ist auch der Satz C für diesen Bereich mitbewiesen. Um aber einen derartigen Reduzibilitätssatz herzuleiten, wollen wir von der allgemeinen Bewertungstheorie Gebrauch machen.

§ 4.

Formale Dirichletsche Reihen und Bewertungstheorie.

11. Wir gehen vom allgemeinen Steinitzschen Körperbegriff¹²⁾ aus. Ein Körper K heißt *bewertet*¹³⁾, wenn jedem Element a dieses Körpers eine nicht negative reelle Zahl $\|a\|$ — die *Bewertung von a* — derart zugeordnet ist, daß

I. für ein gewisses a des Körpers $\|a\| \neq 0, \neq 1$,

II. $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$,

III. $\|a + b\| \geq \text{Max.}(\|a\|, \|b\|)$

ist. Daraus folgt, daß $\|0\| = 0$, $\|1\| = 1$, $\|b\| \neq 0$ für $b \neq 0$, ferner für $\|a\| > \|b\|$, $\|a + b\| = \|a\|$ ist.

Genauer gesagt, wird durch die obigen Forderungen eine spezielle, von uns als *nichtarchimedisch* bezeichnete Art von Bewertungen festgelegt. Wir haben aber in O, C) gezeigt, daß jede andere Bewertung im Sinne der ursprünglichen Kürschákschen Definition sich auf sehr einfache Weise aus der Zuordnung der absoluten Beträge zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen ergibt.

Wir nennen ferner mit Kürschák eine Folge a_v von Elementen aus K *konvergent*, wenn

$$\|a_v - a_\mu\|$$

gegen 0 konvergiert, falls v und μ unabhängig voneinander ins Unendliche wachsen. Es kann dann in K nur ein Element A geben, derart, daß

$$\|a_v - A\| \rightarrow 0$$

¹²⁾ Steinitz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 137 (1910), S. 167 ff., als Monographie erschienen bei W. de Gruyter & Co., 1931.

¹³⁾ Zur Bewertungstheorie vgl. vor allem die grundlegende Arbeit von Kürschák, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 142 (1913), S. 211 ff., ferner die drei Arbeiten des Verfassers, ebenda 143 (1913), 147, (1917), sowie Acta mathematica 41 (1918) [später als O, A), O, B), O, C) zitiert], sowie Rychlik, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 153 (1924). Zu O, C) vgl. ferner Artin, ebenda 167 (1932), S. 157—159.

ist. Wir nennen dann A den Limes oder Grenzwert der Folge a_v ¹⁴⁾. Ein Körper K heißt *perfekt*, wenn jede konvergente Folge von Elementen aus K einen in K liegenden Limes besitzt. Jeder bewertete Körper läßt sich zu einem perfekten bewerteten Körper derart erweitern, daß die Bewertungen der Elemente von K unverändert bleiben.

Das für uns hier in Betracht kommende Beispiel eines perfekten bewerteten Körpers wird durch die Gesamtheit K_D , der formalen Dirichletschen Reihen

$$D(s) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v e^{-\lambda_v s}, \quad \lambda_v \uparrow \infty,$$

gegeben, wobei $\|D(s)\| = 0$ zu setzen ist, wenn alle $a_u = 0$ sind, sonst aber, falls $a_0 \neq 0$ ist,

$$\|D(s)\| = e^{-\lambda_0}$$

gesetzt wird. Die Zahl λ_0 bezeichnen wir als *die Ordnungszahl von $D(s)$* , wobei die Ordnungszahl von 0 gleich ∞ zu setzen ist. Man übersieht sofort, daß unsere drei Forderungen in diesem Falle erfüllt sind.

Wir können uns insbesondere auf einen solchen Körper formaler Dirichletscher Reihen beschränken, bei dem alle Exponenten sich ganzzahlig und linear aus den Zahlen einer vorgegebenen Zahlenfolge $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ zusammensetzen, so daß

$$(11, 1) \quad \lambda_v = a_0(\lambda_v)\lambda_0 + a_1(\lambda_v)\lambda_1 + \dots + a_M(\lambda_v)\lambda_M$$

ist, mit ganzen rationalen a_u . Auf solche Körper werden wir uns in diesem Paragraphen beschränken. — Ein solcher Körper ist nun auch perfekt im Sinne von Kürschák. Denn ist

$$D_\mu(s) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v^{(\mu)} e^{-\lambda_v^{(\mu)} s}$$

eine konvergente Folge Dirichletscher Reihen aus K_D , so konvergiert die Ordnung von $D_\mu(s) - D_v(s)$ gegen Unendlich mit $\mu \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$, dies bedeutet aber, daß für ein noch so großes A es ein solches $N = N(A)$ gibt, daß für $\mu \geq N$ in sämtlichen Reihen $D_\mu(s)$ die Abschnitte

$$\sum_{\lambda_v^{(\mu)} \leq A} a_v^{(\mu)} e^{-\lambda_v^{(\mu)} s}$$

miteinander übereinstimmen. Bilden wir daher formal die Summe aller Glieder von der Form $A_v e^{-\lambda_v s}$, die von einem μ an in sämtlichen $D_\mu(s)$ vorkommen, so muß bei monotoner Anordnung $\lambda_v \uparrow \infty$ gelten, und

$$\sum_{v=0}^{\infty} A_v e^{-\lambda_v s} \text{ ist offenbar der Grenzwert der Folge } D_\mu(s).$$

¹⁴⁾ Bis zur Nr. 15 wird Konvergenz- und Grenzwertbegriff im soeben definierten Sinne aufgefaßt, von da an wieder im gewöhnlichen Sinne.

12. Es sei nun K ein beliebiger perfekter bewerteter Körper, K_n eine algebraische Erweiterung von K vom Grade n . Ist dann α ein beliebiges Element von K und genügt α einer in K irreduziblen Gleichung

$$(12, 1) \quad x^v + a_1 x^{v-1} + \dots + a_v = 0$$

mit Koeffizienten aus K , wo v ein Teiler von n sein muß, so kann man nach einem fundamentalen Ergebnis von Kürschák den Körper K bewerten, indem man jeder Größe α als Bewertung $\|\alpha\| = \|a_v\|^{1/v}$ zuordnet. Diese Bewertung ist, wie wir in O, B), S. 196—197, 193—195 gezeigt haben, die einzige Bewertung von K_n , die die Bewertung von K enthält, und der so bewertete Körper K_n ist wiederum perfekt.

Aus diesen Tatsachen folgt nun (vgl. O, B), S. 196, Formel (5)): Ist

$$(12, 2) \quad x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

ein Polynom mit Koeffizienten aus dem perfekten bewerteten Körper K , so muß, damit es in K irreduzibel ist, jedenfalls

$$(12, 3) \quad \|a_i\| \leq \|a_m\|^{i/m}$$

sein, so daß, wenn für ein m_0 mit $0 < m_0 < m$

$$(12, 4) \quad \|a_{m_0}\| > \|a_m\|^{m_0/m}$$

gilt, das Polynom (12, 2) in K reduzibel ist.

Ist nun insbesondere K der Körper aller formalen Dirichletschen Reihen, so liefert dieser Satz gerade die am Schlusse von § 3 formulierte Tatsache, von der die Übertragung des Satzes C auf formale Dirichletsche Reihen abhängt.

13. Wir können daher den Satz formulieren:

Satz D: Ist

$$(13, 1) \quad D_0(s) y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s), \quad D_0(s) \neq 0,$$

ein Polynom n -ten Grades, dessen Koeffizienten formale Dirichletsche Reihen sind, so kann dieses Polynom stets und auf eine einzige Weise dargestellt werden als

$$(13, 2) \quad D_0(s) \prod_{v=1}^n (y - \Delta_v(s)),$$

wo auch $\Delta_v(s)$ formale Dirichletsche Reihen sind.

Der damit bewiesene Satz D läßt sich noch insofern verschärfen, als man über die Exponentenfolgen der Reihen $\Delta_v(s)$ aussagen kann, daß sie sich nach Multiplikation mit einer festen ganzen Zahl aus je endlich vielen Exponenten der Reihen $\Delta_0(s), \dots, \Delta_n(s)$ linear mit ganzen rationalen Koeffizienten zusammensetzen. Denn unser perfekter bewerteter Körper ist ja nicht der Körper aller formalen Dirichletschen Reihen überhaupt, sondern der Körper aller formalen Dirichletschen Reihen, deren Exponenten sich linear ganzzahlig aus der Menge $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ aller Exponenten der Reihen $D_0(s), \dots, D_n(s)$ zusammensetzen.

Man kann sogar auch in diesem Falle zeigen, daß in Darstellungen der Exponenten von $\Delta_r(s)$ durch die Exponenten von $D_0(s), \dots, D_n(s)$ nur eine feste endliche Menge der letzteren negative Koeffizienten haben kann. Um dies zu beweisen, muß allerdings erst der obige Reduzibilitätssatz der allgemeinen Bewertungstheorie etwas verschärft werden. Der Beweis dieser Verschärfung läßt sich nun aus dem Beweise des Kürschák'schen Fundamentalsatzes leicht herleiten, dessen Prinzip in der Arbeit des Herrn Kürschák, a. a. O. S. 218, sowie in unserer Arbeit (O, C), S. 280) angegeben wurde. Allerdings läßt sich dies der von Herrn Rychlik a. a. O. gegebenen Ausführung dieses Beweises nicht unmittelbar entnehmen. Wir geben aber in einer anschließenden Arbeit unter anderem eine einfachere Fassung dieses Beweises, wobei zugleich auch dem hier in Betracht kommenden Moment Rechnung getragen wird.

Die Dirichletschen Reihen $\Delta_r(s)$ brauchen sogar dann kein Konvergenzgebiet zu besitzen, wenn die Reihen $D_r(s)$ ein solches haben. Indessen hängen sie in diesem letzteren Falle insofern mit den Wurzeln des Polynoms (13, 1) zusammen, als sie diese Wurzeln *asymptotisch* im Sinne des Herrn Ritt darstellen, und dies gilt auch dann, wenn die Koeffizienten $D_r(s)$ zwar auch kein Konvergenzgebiet besitzen, aber gewisse Funktionen asymptotisch darstellen. Dem Beweis dieser Tatsache schicken wir im nächsten Paragraphen einen Exkurs über das Newtonsche Diagramm in bewerteten Körpern voraus.

§ 5.

Das Newtonsche Diagramm in bewerteten Körpern.

14. Ist K ein bewerteter Körper, so werden wir neben der *Bewertung* $\|a\|$ seiner Elemente die *Ordnungszahl* ω von a , $\omega(a) = \lg \frac{1}{\|a\|}$ betrachten, so daß $\|a\| = e^{-\omega(a)}$ ist. $\omega(0)$ ist gleich ∞ zu setzen, $\omega(1)$ ist gleich 0. Ferner ordnen wir unserer Bewertung von K einen „Primteiler“ p zu, indem wir sagen, daß ein Element a von K durch die Potenz $p^{\omega(a)}$ von p teilbar ist. Hat die Differenz $a - b$ von zwei Elementen a und b aus K eine positive Ordnungszahl, so nennen wir sie *kongruent*¹⁵⁾ in K , geschrieben

$$a \equiv b$$

— also ohne Angabe des Moduls —, während die Aussage

$$a \equiv b \pmod{p^{\omega_0}}$$

bedeutet, daß $\omega(a - b) \geq \omega_0$ ist. Ebenso nennen wir zwei Polynome in x mit Koeffizienten aus K *kongruent* in K , wenn ihre Differenz lauter Koeffizienten positiver Ordnung besitzt.

¹⁵⁾ Rychlik, a. a. O., sagt dafür kongruent (mod 1^*).

Es sei nun

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_r x^{n-r} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

ein Polynom in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus K . Es sei $\omega(a_r) = \omega_r$ gesetzt. Wir tragen in einem rechtwinkligen (v, ω_r) -Koordinatensystem die $n+1$ Punkte $P(v, \omega_r)$ auf und betrachten nun einen nach unten konvexen Streckenzug, der die so entstehende Punktmenge von unten begrenzt, und dessen Ecken gewisse Punkte P_i sind. Diesen Streckenzug nennen wir das *Newtonsche Diagramm* von $f(x)$. Ist insbesondere $a_n = 0$, so wird die nach rechts letzte Strecke des Newtonschen Diagramms ein parallel zur positiven ω -Achse gezogener Halbstrahl.

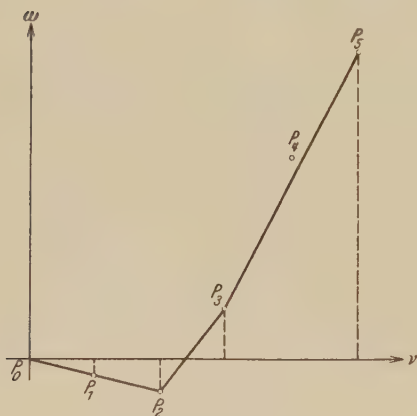


Fig. 1.

In der beistehenden Fig. 1 ist das Newtonsche Diagramm eines Polynoms fünften Grades gezeichnet; es besteht hier aus drei Seiten, wobei auf der ersten Seite drei Punkte (v, ω_r) liegen. Auf der dritten Seite liegen nur zwei solcher Punkte in den Ecken, während der Punkt $(4, \omega_4)$ über dieser Seite liegt. ω_0 ist in unserem Falle gleich 0.

Allgemein ist unser Diagramm vollständig festgelegt, wenn wir seinen Anfangspunkt angeben, ferner die Steigungen seiner einzelnen Seiten oder auch die Winkel, die

diese Seiten, von links nach rechts durchlaufen, mit der positiven v -Achse bilden, und endlich die Längen der Projektionen der einzelnen Seiten auf die v -Achse¹⁶⁾. Multipliziert man $f(x)$ mit einer Größe a aus K , so äußert dies sich am Diagramm darin, daß es um die Größe $\omega(a)$ in der Richtung der ω -Achse verschoben wird, ohne daß dabei natürlich die Anzahl und die Längen seiner Seiten, ebenso wie ihre Steigungen geändert werden. Ist nun ein Diagramm „gebrochen“, besteht es also aus wenigstens zwei Seiten verschiedener Steigung, so bleibt dies richtig, wenn wir unser Polynom durch a_0 dividieren, wodurch der Anfangspunkt unseres Diagramms in den Ursprung des Koordinatensystems verlegt wird. Ist dann die Ordnung des letzten Koeffizienten a_n gleich ω_n , so liegt ein Punkt (v, ω_v) , für den $\frac{\omega_v}{v} \geq \frac{\omega_n}{n}$ ist, oberhalb oder auf der Strecke von P_0 nach P_n . Da aber unser Diagramm gebrochen und nach

¹⁶⁾ Ist die letzte Seite vertikal und schneidet ihre Verlängerung die v -Achse im Punkt v_0 , so ist als ihre Projektion auf die v -Achse $n - v_0$ aufzufassen.

unten konvex ist, gibt es also ein P_r mit $\frac{\omega_r}{r} < \frac{\omega_n}{n}$, d. h. $\|a_r\| > \|a_n\|^{r/n}$. Dann aber ist $f(x)$ nach dem im § 4 angegebenen Satze (vgl. Formel (12, 4)) reduzibel in K . Wir sehen also:

Satz EI: *Ein Polynom mit gebrochenem Newtonschem Diagramm ist in einem perfekten bewerteten Körper reduzibel und läßt sich also als Produkt von Polynomen aus diesem Körper mit lauter gradlinigen Diagrammen darstellen.*

15. Setzt man in $f(x): x = ay$, wo $a \neq 0$ ein Element von K ist, so geht $f(x)$ über in

$$(15, 1) \quad a^n f^*(y) = a^n \left(a_0 y^n + \frac{a_1}{a} y^{n-1} + \frac{a_2}{a^2} y^{n-2} + \dots + \frac{a_n}{a^n} \right).$$

Wie entsteht das Diagramm von $f^*(y)$ aus dem Diagramm von $f(x)$? Ist $\omega(a) = \omega$, so hat der Koeffizient von y^{n-r} in $f^*(y)$ die Ordnung $\omega_r - r\omega$. Der zugehörige Punkt P'_r entsteht also aus P_r durch Verschiebung um $r\omega$ parallel zur negativen ω -Achse. Die Transformation der Ebene, bei der jeder Punkt ξ, η parallel zur η -Achse um $\omega\xi$ verschoben wird, nennt man in der Elastizitätstheorie eine *Scherung* um ω parallel zur η -Achse. Wir sehen also: *Das Diagramm von $f^*(y)$ geht aus demjenigen von $f(x)$ durch eine Scherung um ω parallel zur negativen ω -Achse hervor.*

Wie äußert sich dies an unserem Diagramm? Durch eine Scherung geht jede Gerade wieder in eine Gerade über. Ist etwa die Gleichung einer Geraden im rechtwinkligen ξ, η -Koordinatensystem mit der Steigung s :

$$\eta = s\xi + t,$$

so entsteht daraus durch die Scherung um ω parallel zur negativen η -Achse die neue Gerade

$$(15, 2) \quad \eta + \omega\xi = s\xi + t, \quad \eta = (s - \omega)\xi + t,$$

deren Steigung um ω kleiner geworden ist. Daraus folgt, daß die einzelnen Seiten des neuen Diagramms aus den einzelnen Seiten des alten Diagramms entstehen, indem ihre Projektionen auf die ν -Achse die gleichen bleiben, die Steigungen aber um ω vermindert werden, so daß die Reihenfolge der Seiten unverändert bleibt.

Es seien nun $(\nu', \omega_{\nu'})$ und $(\nu'', \omega_{\nu''})$ Anfangs- und Endpunkt einer nicht vertikalen Seite s des Diagramms von $f(x)$. Die Steigung dieser Seite ist dann gleich

$$\frac{\omega_{\nu''} - \omega_{\nu'}}{\nu'' - \nu'}.$$

Wir adjungieren nun zum Körper K eine Wurzel a der Gleichung

$$x^{v''-v'} = \frac{a_{v''}}{a_{v'}}.$$

Die dadurch entstehende endliche Erweiterung von K läßt sich wie oben angegeben bewerten, und die Bewertung von a genügt der Relation:

$$(15, 3) \quad \|a\|^{v''-v'} = \left\| \frac{a_{v''}}{a_{v'}} \right\|, \quad \omega(a) = \frac{\omega_{v''} - \omega_{v'}}{v'' - v'}.$$

Nehmen wir nun mit diesem a die Transformation (15, 1) vor, so ist die Steigung der s entsprechenden Seite s^* des neuen Diagramms gleich 0, so daß s^* parallel zur v -Achse verläuft. Dividieren wir weiter $f^*(y)$ durch den Koeffizienten bei y^{n-v_1} , so wird dadurch das neue Diagramm derart verschoben, daß die s entsprechende Seite und damit ihre beiden Endpunkte nunmehr auf der v -Achse liegt. Da aber alle Punkte des neuen Diagramms, die nicht auf der v -Achse liegen, wegen der Konvexität des Diagramms oberhalb der v -Achse liegen müssen, ist unser neues Polynom kongruent in $K(a)$ einem Polynom von der Form

$$(15, 4) \quad b_{v'} y^{n-v'} + \dots + b_{v''} y^{n-v''}, \quad b_{v'} = 1, \quad \omega(b_{v'}) = \omega(b_{v''}) = 0,$$

wo die Ordnungen der Koeffizienten von (15, 4) nicht negativ sind.

Es seien nun $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei Polynome mit Koeffizienten aus K . Es sei s_1 eine Seite des Diagramms von $f_1(x)$ mit der Länge σ_1 der Projektion auf die v -Achse und der Steigung ϱ . Besitzt $f_2(x)$ keine Seite der Steigung ϱ , so besitzt, behaupten wir, das Diagramm von $f_1 \cdot f_2$ eine Seite mit der Projektion σ_1 auf die v -Achse und der Steigung ϱ . Kommt aber auch im Diagramm von $f_2(x)$ eine Seite s_2 mit der Steigung ϱ vor und hat sie die Projektion σ_2 auf die v -Achse, so besitzt das Diagramm von $f_1 f_2$ eine Seite von der Steigung ϱ mit der Projektion $\sigma_1 + \sigma_2$ auf die v -Achse.

Denn es seien $(v'_1, \omega_{v'_1})$, $(v''_1, \omega_{v''_1})$ Anfangs- und Endpunkt von s_1 , so daß $\varrho = \frac{\omega_{v''_1} - \omega_{v'_1}}{v''_1 - v'_1}$, und $\sigma_1 = v''_1 - v'_1$ ist. Sind $a_{v'_1}$, $a_{v''_1}$ die entsprechenden Koeffizienten von $f_1(x)$, so sei wieder a eine Wurzel von $x^{v''_1 - v'_1} = \frac{a_{v''_1}}{a_{v'_1}}$ und

der Körper $K(a)$ wieder bewertet (a könnte auch in K liegen). Dann ist die Ordnung $\omega(a)$ auf jeden Fall gleich ϱ . Führt man also die oben angegebene Transformation durch, indem man in $f_1(x)$ $x = ay$ einsetzt, so entsteht ein neues Polynom, dessen Diagramm eine aus s_1 hervorgegangene zur v -Achse parallele Seite besitzt mit der Projektion σ_1 auf die v -Achse. Es gibt also eine solche Größe A aus $K(a)$, daß in $K(a)$

$$(15, 5) \quad A f_1(ay) \equiv b_{v'_1} y^{n-v'_1} + \dots + b_{v''_1} y^{n-v''_1}, \quad \omega(b_{v'_1}) = \omega(b_{v''_1}) = 0$$

ist, wo die Ordnungen aller Koeffizienten der rechten Seite nicht negativ sind. Besitzt nun das Diagramm von $f_2(x)$ eine Seite s_2 mit der Steigung ϱ , so wird durch die gleiche Transformation $x = ay$ auch diese Seite parallel zur ν -Achse gedreht, so daß es eine Größe B in K gibt, für die

$$(15, 6) \quad B f_2(a y) \equiv b_{\nu'_2} y^{n-\nu'_2} + \dots + b_{\nu''_2} y^{n-\nu''_2}, \quad \omega(b_{\nu'_2}) = \omega(b_{\nu''_2}) = 0$$

gilt, wo $\nu''_2 - \nu'_2 = \sigma_2$ ist und die Ordnungen aller Koeffizienten rechts in (15, 6) nicht negativ sind. Besitzt aber das Diagramm von $f_2(x)$ keine Seite mit der Steigung ϱ , so gibt es im Diagramm von $f_2(a y)$ einen einzelnen Punkt — einen Eckpunkt dieses Diagramms — der am tiefsten liegt. Es gibt also dann eine Größe B aus $K(a)$ derart, daß

$$B f_2(a y) \equiv y^r, \quad 0 \leq r \leq n$$

ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A B f_1(a y) f_2(a y) \\ \equiv (b_{\nu'_1} y^{n-\nu'_1} + \dots + b_{\nu''_1} y^{n-\nu''_1}) (b_{\nu'_2} y^{n-\nu'_2} + \dots + b_{\nu''_2} y^{n-\nu''_2}) \end{aligned}$$

bzw.

$$A B f_1(a y) f_2(a y) \equiv y^r (b_{\nu'_1} y^{n-\nu'_1} + \dots + b_{\nu''_1} y^{n-\nu''_1}).$$

Dies bedeutet aber, daß das Diagramm von $A B f_1(a y) f_2(a y)$ eine auf der ν -Achse liegende Seite besitzt von der Länge $\sigma_1 + \sigma_2$ bzw. σ_1 . Gehen wir nun durch die Substitution $y = \frac{x}{a}$ und Division durch $A B$ zum Produkte $f_1(x) f_2(x)$ zurück, so ergibt sich, daß das Diagramm dieses Produktes eine Seite der Steigung ϱ besitzt, deren Projektion auf die ν -Achse gleich $\sigma_1 + \sigma_2$ bzw. gleich σ_1 ist. Damit ist unsere obige Behauptung bewiesen. Analoges gilt für $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 > 0$.

Nun ist die Summe der Projektionen der einzelnen Seiten des Diagramms von $f_1(x)$ gleich dem Grade n von $f_1(x)$, wenn natürlich, falls der letzte Koeffizient von $f_1(x)$ verschwindet, der letzten, parallel zur ω -Achse verlaufenden Seite als Projektion auf die ν -Achse ihre Distanz von der Geraden $\nu = n_1$ zugeschrieben wird. Das analoge gilt für das Diagramm von $f_2(x)$. Daher haben wir durch die soeben bewiesene Tatsache bereits so viele Seiten des Diagramms von $f_1(x) f_2(x)$ aufgezeigt, daß die Summe ihrer Projektionen auf die ν -Achse gleich dem Grad von $f_1(x) f_2(x)$ ist. Dies bedeutet aber, daß wir damit sämtliche Seiten von $f_1(x) f_2(x)$ gefunden haben. Es folgt der

Satz E II. *Das Newtonsche Diagramm des Produktes von zwei Polynomen mit Koeffizienten aus einem bewerteten Körper entsteht aus den Newtonschen Diagrammen der beiden Faktoren, indem man diese Diagramme in einzelne Seiten zerlegt und in der Reihenfolge der wachsenden Steigung*

ähnlich aneinanderfügt, wie bei der geometrischen Addition von Vektoren. Die Ordinate des Anfangspunktes ergibt sich durch Addition der Anfangspunkte der beiden Diagramme¹⁷⁾.

Daraus folgt sofort, daß, wenn ein Polynom mit Koeffizienten aus einem perfekten bewerteten Körper und einem gebrochenen Newtonschen Diagramm in Faktoren zerlegt wird, die den einzelnen Seiten seines Newtonschen Diagramms entsprechen, diese Faktoren bis auf multiplikative Faktoren aus dem Körper eindeutig bestimmt sind. Ebenso ergeben sich naheliegende Folgerungen über Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Teilers. (Vgl. die zweite der oben zitierten Abhandlungen von G. Dumas.)

§ 6.

Asymptotische Darstellungen durch Dirichletsche Reihen.

16. Es sei B ein Bereich in der komplexen s -Ebene, der Punkte mit beliebig großem Realteil enthält, und $f(s)$ sei für alle Punkte von B mit $\Re s > \sigma_0$ definiert. Es sei

$$D(s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}, \quad \lambda_r \uparrow \infty,$$

eine ohne Rücksicht auf ihre Konvergenz gebildete Dirichletsche Reihe. Wir sagen, daß $f(s)$ durch $D(s)$ im Bereiche B asymptotisch dargestellt wird, wenn für jedes n

$$f(s) = \sum_{r=0}^n a_r e^{-\lambda_r s} + \varepsilon_n(s) e^{-\lambda_n s}$$

ist, wo $\varepsilon_n(s)$ mit ins Unendliche wachsendem $\Re s$, $s \in B$, gegen 0 konvergiert, und zwar gleichmäßig in Bezug auf $\Im s$. Dafür schreiben wir

$$f(s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}.$$

Als Bereich B kann man z. B. mit Herrn Ritt einen Sektor S_φ , $|\arg s| \leq \varphi < \pi/2$ benutzen. Doch gelten unsere Betrachtungen für die allgemeinsten oben charakterisierten Bereiche B .

¹⁷⁾ Für den Fall des Körpers der Potenzreihen in einer Variablen, sowie für den p -adischen Zahlkörper rühren die Sätze E I, E II von G. Dumas her, vgl. die in ⁵⁾ und ⁷⁾ zitierten Arbeiten. Daß diese Sätze sich auf den allgemeinsten perfekten bewerteten Körper übertragen lassen, haben wir in O, C) angegeben. Inzwischen ist der Satz E I für den allgemeinsten Fall eines bewerteten Körpers von Rella [Journ. f. d. reine u. angew. Math. 158 (1927), S. 33 ff.] hergeleitet worden, ebenso wie der Satz E II, der letztere allerdings nur unter der Annahme, daß die Bewertung eine diskrete ist.

Ist

$$f(s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}, \quad g(s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda'_r s},$$

so sind $f(s)g(s)$, $f(s) \pm g(s)$ und, falls $g(s)$ weder gleich noch ~ 0 ist, $\frac{f(s)}{g(s)}$ äquivalent zu den formal gebildeten Dirichletschen Entwicklungen

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s} \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda'_r s} \right), \quad \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s} \pm \sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda'_r s}$$

bzw.

$$\frac{\sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}}{\sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda'_r s}}.$$

Die Beweise dieser Tatsachen sind sehr einfach und durchaus analog den Beweisen der entsprechenden Sätze in der Theorie der asymptotischen Potenzreihen (vgl. Ritt, die in Fußnote ¹⁾ zitierte Abhandlung, S. 81 für $f+g$ und fg). Wir wollen hier nur den Beweis für den Quotienten f/g bringen. Es genügt zu beweisen, daß $1/g$ asymptotisch darstellbar ist durch die Entwicklung von

$$\frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} b_r e^{-\lambda'_r s}},$$

da man sodann den Satz über das Produkt von asymptotisch darstellbaren Funktionen anwenden kann. Beachtet man ferner, daß vermöge unserer Definition mit

$$f(s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-\lambda_r s}$$

auch

$$e^{xs} f(s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} a_r e^{-(\lambda_r - x)s}$$

ist, so sieht man, daß es genügt,

$$g(s) \sim 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r e^{-\lambda'_r s}, \quad 0 < \lambda'_r \uparrow \infty,$$

anzunehmen, und es ist zu beweisen, daß

$$(16, 1) \quad \frac{1}{g(s)} \sim 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r e^{-\lambda'_r s} + (\Sigma)^2 + (\Sigma)^3 + \dots$$

gilt. Es sei die rechte Seite von (16, 1) nach formaler Umordnung gleich

$$\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r e^{-\lambda''_r s}, \quad 0 \leq \lambda''_r \uparrow \infty.$$

Es sei $n \geq 1$ fest. Wir dürfen $\beta_1 \neq 0$ annehmen, dann gilt nach der Voraussetzung $(1 - g(s)) e^{\lambda'_1 s} \rightarrow \beta_1$ für $\Re s \rightarrow \infty$, $s \prec B$.

Ist $k\lambda'_1 > \lambda''_n$ für ein ganzes k , so folgt für hinreichend große $\Re s$ (wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz)

$$(16, 2) \quad e^{\lambda''_n s} \sum_{\mu=k}^{\infty} (1-g(s))^{\mu} \rightarrow 0,$$

daher

$$(16, 3) \quad \frac{1}{g(s)} = \sum_{\mu=0}^{k-1} (1-g(s))^{\mu} + \varepsilon_1(s) e^{-\lambda''_n s},$$

wo $\varepsilon_1(s)$, ebenso wie in der Folge $\varepsilon_2(s)$, $\varepsilon_3(s)$ mit $\Re s \rightarrow \infty$, $s < B$ gleichmäßig in $\Im s$ gegen Null konvergiert. Andererseits gilt

$$(16, 4) \quad \sum_{\mu=0}^{k-1} (1-g(s))^{\mu} \sim \sum_{\mu=0}^{k-1} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu} e^{-\lambda'_{\nu} s} \right)^{\mu}.$$

Da aber für unser $k \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} e^{-\lambda'_{\nu} s}$ bereits vollständig in der rechten Seite von (16, 4) steckt und nach Abzug dieser Summe von der rechten Seite von (16, 4) eine Dirichletsche Reihe übrigbleibt, deren erster Exponent größer als λ''_n ist, gilt

$$(16, 5) \quad \sum_{\mu=0}^{k-1} (1-g(s))^{\mu} = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} e^{-\lambda'_{\nu} s} + \varepsilon_2(s) e^{-\lambda''_n s}.$$

Aus (16, 3) und (16, 5) folgt aber

$$\frac{1}{g(s)} = \sum_{\nu=0}^n \gamma_{\nu} e^{-\lambda'_{\nu} s} + \varepsilon_3(s) e^{-\lambda''_n s},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz F. Sind die Koeffizienten des Polynoms

$$(16, 6) \quad F(y, s) = f_0(s) y^n + f_1(s) y^{n-1} + \dots + f_n(s), \quad f_0(s) \neq 0,$$

in B asymptotisch darstellbar durch Dirichletsche Reihen $D_0(s)$, $D_1(s)$, ..., $D_n(s)$, wo $D_0(s) \neq 0$ ist, und ist

$$(16, 7) \quad \Phi(y, s) = D_0(s) y^n + D_1(s) y^{n-1} + \dots + D_n(s) = D_0(s) \prod_{\nu=1}^n (y - \Delta_{\nu}(s)),$$

wo $\Delta_{\nu}(s)$ Dirichletsche Reihen sind, die Zerlegung des Satzes D, so lassen sich für hinreichend große $\Re s$ die n Wurzeln der Gleichung $F(y, s) = 0$ derart in n „Zweige“ $\varphi_1(s)$, ..., $\varphi_n(s)$ zusammenfassen, daß $\varphi_{\nu}(s)$ in B durch $\Delta_{\nu}(s)$ asymptotisch darstellbar ist. Sind insbesondere $D_0(s)$, ..., $D_n(s)$ Entwicklungen von $f_0(s)$, ..., $f_n(s)$ mit einem Konvergenzgebiet, so werden die Wurzeln der Gleichung $F(y, s) = 0$ durch die Dirichletschen Reihen im Bereiche: $x \geq x_0$, $|y| \leq e^{Mx}$ für ein beliebig großes festes M asymptotisch dargestellt.

17. Wir beginnen mit dem

Hilfssatz 1. Es sei unter den Voraussetzungen des Satzes F die Ordnung von $\Delta_1(s)$ endlich und größer als die Ordnungen von $\Delta_2(s)$, ..., $\Delta_n(s)$, d. h. also, wenn allgemein $\Delta_{\nu}(s)$ mit $a^{(\nu)} e^{-\varrho_{\nu} s}$ beginnt, $a^{(\nu)} \neq 0$, $\varrho_{\nu} < \infty$, so

soll $\varrho_1 > \varrho_2, \varrho_1 > \varrho_3, \dots, \varrho_1 > \varrho_n$ sein. Dann gibt es für hinreichend große $\Re s$ eine einzige Wurzel $w(s)$ von $F(y, s) = 0$ derart, daß für $\Re s \rightarrow \infty, s < B$

$$(17, 1) \quad e^{\varrho_1 s} w(s) \rightarrow a, \quad |a| \neq 0$$

gilt, während für jede andere Wurzel $w^*(s)$ von $F(y, s)$

$$(17, 2) \quad e^{\varrho_1 s} w^*(s) \rightarrow \infty$$

gilt.

Beweis. Zu den n Faktoren des Produkts (16, 7) gehören n geradlinige Newtonsche Diagramme, wobei die Steigung ϱ_1 des Diagramms von $y - \Delta_1(s)$ nach Voraussetzung größer ist als die Steigungen ϱ_v der Diagramme der übrigen Faktoren von (16, 7). Daher findet sich im Diagramm von $\Phi(y, s)$ eine Seite mit der Steigung ϱ_1 und der Projektion 1 auf die v -Achse, und zwar ist dies die *steilste* Seite des Diagramms. Dies bedeutet, daß $\frac{D_n(s)}{D_{n-1}(s)}$ die Ordnung ϱ_1 hat. Setzt man in $\Phi(y, s)$ $y = e^{-\varrho_1 s} z$ und dividiert durch $D_{n-1}(s) e^{-\varrho_1 s}$, so nimmt $\Phi(y, s)$ die Gestalt an

$$(17, 3) \quad D_0^*(s) z^n + \dots + D_{n-2}^*(s) z^2 + z + \frac{D_n(s)}{D_{n-1}(s)} e^{\varrho_1 s},$$

wo $\frac{D_n(s)}{D_{n-1}(s)} e^{\varrho_1 s}$ eine mit einer Konstanten $a \neq 0$ beginnende Dirichletsche Reihe ist, während $D_0^*(s), D_1^*(s), \dots, D_{n-2}^*(s)$ formale Dirichletsche Reihen positiver Ordnung sind. Denn durch unsere Transformation wird die letzte steilste Seite des Diagramms auf die v -Achse gebracht, so daß dann alle übrigen Punkte des Diagramms *über* der v -Achse liegen müssen und daher die zugehörigen Koeffizienten *positiver* Ordnung sind. Setzen wir analog in $F(y, s)$ $y = e^{-\varrho_1 s} z$ und dividieren das Resultat durch $f_{n-1}(s) e^{-\varrho_1 s}$, so ergibt sich ein Polynom in z von der Form

$$(17, 4) \quad f_0^*(s) z^n + \dots + f_{n-2}^*(s) z^2 + z + \frac{f_n(s)}{f_{n-1}(s)} e^{\varrho_1 s},$$

und die Koeffizienten dieses Polynoms sind asymptotisch darstellbar durch die entsprechenden Koeffizienten des Polynoms (17, 3). Dies bedeutet aber, daß das Polynom (17, 4) für $\Re s \rightarrow \infty, s < B$ gegen das Polynom $z - a$ konvergiert. Von seinen Wurzeln konvergieren daher nach dem bekannten Stetigkeitssatz in der Theorie der algebraischen Gleichungen¹⁸⁾ $n - 1$ gegen ∞ , während die n -te Wurzel gegen a konvergiert. Da aber diese Wurzeln aus den Wurzeln von $F(y, s)$ durch Multiplikation mit $e^{\varrho_1 s}$ entstehen, ist damit unser Hilfssatz bewiesen.

¹⁸⁾ Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, 2. Aufl., S. 148—153.

Hilfssatz 2: Es seien unter den Voraussetzungen des Satzes F die letzten k der Dirichletschen Reihen $D_r(s)$: $D_{n-k+1}(s), \dots, D_n(s)$ identisch Null, während $D_{n-k}(s) \not\equiv 0$ ist. Dann gibt es ein solches ϱ_0 , und für $\Re s > \sigma_0$, k solche Wurzeln $w_1(s), \dots, w_k(s)$ von $F(y, s)$, daß für jedes $\varrho \geq \varrho_0$ mit $\Re s \rightarrow \infty$, $s < B$,

$$e^{\varrho s} w_1(s) \rightarrow 0, \dots, e^{\varrho s} w_k(s) \rightarrow 0,$$

und für jede der übrigen $n - k$ Wurzeln $w(s)$

$$e^{\varrho s} w(s) \rightarrow \infty$$

gilt.

Beweis. Wir setzen in $F(y, s)$ und $\Phi(y, s)$ $y = e^{-\varrho s} z$ und dividieren das Resultat durch $f_{n-k}(s) e^{-k\varrho s}$ bzw. $D_{n-k}(s) e^{-k\varrho s}$. Die Gleichung $F(y, s) = 0$ nimmt dann die Form an:

$$(17, 5) \quad f_0^*(s) z^n + f_1^*(s) z^{n-1} + \dots + f_{n-k-1}^*(s) z^{k+1} + z^k + f_{n-k+1}^*(s) z^{k-1} + \dots + f_n^*(s) = 0,$$

und die Koeffizienten von (17, 5) lassen sich asymptotisch darstellen durch die entsprechenden Koeffizienten der Gleichung

$$(17, 6) \quad \frac{D_0(s)}{D_{n-k}(s)} e^{-(n-k)\varrho s} z + \dots + \frac{D_{n-k-1}(s)}{D_{n-k}(s)} e^{-\varrho s} z^{k+1} + z^k = 0.$$

Für hinreichend große ϱ_0 sind aber die Ordnungen von

$$\frac{D_0(s)}{D_{n-k}(s)} e^{-(n-k)\varrho_0 s}, \dots, \frac{D_{n-k-1}(s)}{D_{n-k}(s)} e^{-\varrho_0 s},$$

positiv. Ist nun ϱ_0 so gewählt, so folgt, daß für $\varrho \geq \varrho_0$, $\Re s \rightarrow \infty$ alle Koeffizienten verschiedener Potenzen von z in der Gleichung (17, 5) gegen Null konvergieren bis auf den Koeffizienten von z^k , so daß die Gleichung (17, 5) in der Grenze in $z^k = 0$ übergeht. Daraus folgt nach dem schon oben benutzten Stetigkeitssatz über Wurzeln algebraischer Gleichungen, daß k Wurzeln von (17, 5) gegen Null und die übrigen $n - k$ gegen ∞ konvergieren. Diese Wurzeln sind aber Produkte der entsprechenden Wurzeln von $F(y, s)$ mit $e^{\varrho s}$, womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

18. Aus dem Hilfssatz 2 folgt, daß wir uns beim Beweis des Satzes F auf den Fall beschränken können, daß $D_n(s) \not\equiv 0$, oder, was auf das gleiche hinausläuft, daß keine der Dirichletschen Reihen $\Delta_r(s)$ identisch 0 ist. Denn sonst besitzt $F(y, s)$ Wurzeln, die sich asymptotisch durch die identisch verschwindende Dirichletsche Reihe darstellen lassen, und wir können dann $F(y, s)$ durch die entsprechenden Linearfaktoren dividieren. Die Koeffizienten des dadurch entstehenden Polynoms in y werden offenbar durch die Koeffizienten des durch die entsprechende Potenz von y dividierten Polynoms $\Phi(y, s)$ asymptotisch dargestellt. Von nun an sei daher $D_n(s) \not\equiv 0$.

Wir beweisen nun den Satz F zuerst für eine Wurzel $\Delta_v(s)$ von $\Phi(y, s)$ unter der Annahme, daß sie eine *einfache* Wurzel von $\Phi(y, s)$ ist. Es sei dies

$$\Delta_1(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}, \quad a_0 \neq 0.$$

Da $\Delta_1(s)$ mit keiner der Dirichletschen Reihen $\Delta_2(s), \dots, \Delta_n(s)$ identisch ist, gibt es einen solchen „Abschnitt“ $A^*(s)$ von $\Delta_1(s)$:

$$A^*(s) = \sum_{\nu=0}^{n_0} a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s},$$

daß unter den Differenzen

$$\Delta_1(s) - A^*(s), \quad \Delta_2(s) - A^*(s), \quad \dots, \quad \Delta_n(s) - A^*(s)$$

die erste eine höhere Ordnung hat als alle übrigen. Und wir können offenbar durch die Substitution $y = z + A^*(s)$ in $F(y, s)$ und $\Phi(y, s)$ erreichen, daß von vornherein die Ordnung von $\Delta_1(s)$ größer ist als die Ordnung von $\Delta_2(s), \dots, \Delta_n(s)$. Dann gibt es nach dem Hilfssatz 1 für hinreichend große $\Re s$ eine *einzig*e Wurzel $w_1(s)$, für die für $\Re s \rightarrow \infty$, $s < B$, $e^{\lambda_0 s} w_1(s)$ gegen eine endliche von 0 verschiedene Konstante konvergiert. Es sei nun für $m \geq 0$

$$A_m(s) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s}.$$

Wir haben dann nur zu beweisen, daß es eine Wurzel $w(s)$ von $F(y, s)$ gibt, für die

$$(w(s) - A_m(s)) e^{\lambda_{m+1} s}$$

gegen eine endliche Konstante konvergiert. Denn daraus folgt dann insbesondere

$$(18, 1) \quad w(s) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} s} + \varepsilon_m(s) e^{-\lambda_m s},$$

daher auch ferner $w(s) e^{\lambda_0 s} \rightarrow a_0$, so daß $w(s)$ mit der *eindeutig bestimmten* Wurzel $w_1(s)$ von $F(y, s)$ identisch ist, und daher $w_1(s)$ für jedes m der Relation (18, 1) genügt, und also in der Tat durch $\Delta_1(s)$ asymptotisch darstellbar ist. Bilden wir aber die Gleichung, der $w(s) - A_m(s)$ genügt, so werden ihre Koeffizienten durch die Koeffizienten der Gleichung asymptotisch dargestellt, die aus $\Phi(y, s) = 0$ durch die Substitution $y = z + A_m(s)$ hervorgeht und die Wurzeln $\Delta_1(s) - A_m(s)$, $\Delta_2(s) - A_m(s)$, $\dots$, $\Delta_n(s) - A_m(s)$ besitzt, unter denen die Ordnung von $\Delta_1(s) - A_m(s)$ gleich λ_{m+1} und größer als die Ordnungen der übrigen Wurzeln ist. Daher folgt nach dem Hilfssatz 1, daß für eine Wurzel $w(s)$ der Gleichung $F(y, s)$ in der Tat

$$(w(s) - A_m(s)) e^{\lambda_{m+1} s} \rightarrow a, \quad |a| < \infty$$

gilt, womit der Satz F für eine *einfache* Wurzel $\Delta_1(s)$ von $\Phi(y, s)$ bewiesen ist.

Nunmehr kann der Satz F ohne weiteres bewiesen werden. Um den Beweis durch vollständige Induktion zu führen, dürfen wir annehmen, daß der Satz F für alle Polynome $F(y, s)$ von niedrigerem als n -ter Grad bereits bewiesen ist. Denn für lineare Polynome ist sein Beweis in den Bemerkungen am Eingang dieses Paragraphen enthalten. Hat nun $\Phi(y, s)$ wenigstens eine einfache oder eine identisch verschwindende Wurzel, für die also der Satz bereits bewiesen ist, so können wir aus $F(y, s)$ durch Division mit entsprechenden Linearfaktoren ein Polynom von höchstens $(n-1)$ -tem Grad erhalten, für das der Satz bereits als bewiesen angenommen wurde. Wir haben also allein den Fall zu betrachten, daß $\Phi(y, s)$ nur mehrfache Wurzeln besitzt. Es sei $\Delta(s)$ eine solche mehrfache Wurzel von $\Phi(y, s)$. Nun werden aber die Koeffizienten der Gleichung $\frac{\partial F(y, s)}{\partial y} = 0$ durch die Koeffizienten der Gleichung $\frac{\partial \Phi(y, s)}{\partial y} = 0$ asymptotisch dargestellt. Da aber diese Gleichungen von $(n-1)$ -ten Grad sind und $\Delta(s)$ der zweiten genügt, gibt es eine Wurzel $w(s)$ der Gleichung $\frac{\partial F(y, s)}{\partial y} = 0$, die durch $\Delta(s)$ asymptotisch dargestellt wird. Setzen wir nun in $F(y, s)$ $y = z + w(s)$ und in $\Phi(y, s)$ $y = z + \Delta(s)$, so erhalten wir zwei Polynome $F^*(y, s)$ und $\Phi^*(y, s)$, wobei die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von y in F^* durch die entsprechenden Koeffizienten in Φ^* asymptotisch dargestellt werden. Φ^* besitzt aber nunmehr eine verschwindende Wurzel, daher gibt es nach Hilfssatz 2 eine Wurzel $w_1(s)$ von $F(y, s)$, für die

$$w_1(s) - w(s) \sim 0, \quad w_1(s) \sim \Delta(s)$$

ist. Damit ist für *eine* Wurzel von $\Phi(y, s)$ der Satz F bewiesen, und durch Division durch den entsprechenden Linearfaktor ist der Satz wiederum auf den als bewiesen vorausgesetzten Fall zurückführbar.

19. Der damit bewiesene Satz F läßt sich wesentlich kürzer beweisen, wenn man voraussetzt, daß es überhaupt Funktionen gibt, die sich in B durch die Dirichletschen Reihen $\Delta_v(s)$ darstellen lassen. Denn ist dann $\Delta_v(s)$ eine Wurzel von $\Phi(y, s)$, und ist $w(s) \sim \Delta_v(s)$, so hat das dem Polynom $F(z + w(s), s)$ entsprechende Polynom $\Phi(z + \Delta_v(s), s)$ eine identisch verschwindende Wurzel, so daß aus dem Hilfssatz 2 dann unmittelbar die Existenz einer Wurzel von $F(z + w(s), s)$ hervorgeht, die ~ 0 , und damit einer Wurzel von $F(y, s)$ die $\sim w(s) \sim \Delta_v(s)$ ist. Der Beweis des Hilfssatzes 2 beruht aber nur auf dem Stetigkeitssatz der Wurzeln algebraischer Gleichungen und setzt auch die Entwicklungen über das Newtonsche Diagramm nicht voraus. Andererseits hat Herr Ritt in

seiner oben zitierten Arbeit für alle Bereiche S_φ , $\varphi < \frac{\pi}{2}$ (d. h. die Bereiche $|\arg s| \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) die Existenz einer Funktion bewiesen, die durch eine beliebig gegebene Dirichletsche Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v e^{-\lambda_v s}$ asymptotisch dargestellt wird. Der Beweis von Herrn Ritt läßt sich auch ohne Schwierigkeit auf alle Bereiche übertragen, in denen, $s = x + iy$ gesetzt, $\lg y = O(x)$ ist. Und gerade für solche Bereiche gilt auch die von Herrn Perron nachgewiesene asymptotische Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre (konvergente) Dirichletsche Reihenentwicklung.

Auf allgemeinere Bereiche aber scheint der Existenzsatz von Herrn Ritt sich nicht ohne weiteres übertragen zu lassen, so daß unser zweiter Beweis des Satzes F hier nicht direkt anwendbar ist.

Sind endlich die Koeffizientenentwicklungen $D_0(s), \dots, D_n(s)$ von (16, 6) in einer gewissen Halbebene *konvergent* (oder wenigstens summabel) gegen $f_0(s), \dots, f_n(s)$, und konvergiert eine der formalen Wurzeln von (16, 7) gegen eine Funktion $w(s)$, so ist $w(s)$ eine Wurzel von (16, 6). Will man nämlich $F(w(s), s)$ berechnen, so kann man zwar die dabei auftretenden Produkte Dirichletscher Reihen nicht direkt ausrechnen, weil sie nicht zu konvergieren brauchen, wohl aber sind sie bekanntlich summabel¹⁹⁾; und da das formal umgerechnete Resultat der Einsetzung der Dirichletschen Reihenentwicklung für $w(s)$ eine identisch verschwindende Dirichletsche Reihe liefert, muß sie auch gegen Null summabel sein. Und hier genügt es offenbar sogar anzunehmen, daß die betreffende Dirichletsche Reihe $\Delta_v(s)$ gegen $w(s)$ summabel ist.

Basel, Mai 1932.

¹⁹⁾ Vgl. Hardy und Riesz, a. a. O., Theorem 56, S. 64.

(Eingegangen am 5. Juni 1932.)

Die Arithmetik in Zahlkörpern, deren zugehörige Galoissche Körper spezielle metabelsche Gruppen besitzen, auf klassenkörpertheoretischer Grundlage.

Von

J. Porusch in Berlin.

Einleitung.

Herr Hasse gab am Beispiel des kubischen Körpers eine Methode, wie man unter Zuhilfenahme der Klassenkörpertheorie das Problem der Arithmetik auch in nicht-Galoisschen Körpern behandeln kann¹⁾. Es handelt sich bei dieser Methode um Körper K , deren zugehörige Galoissche Körper N metabelsche Gruppen $\mathfrak{G}$ besitzen. N ist Klassenkörper über dem der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ zugeordneten Körper C , der selbst absolut-Abelsch ist. Das Ziel ist, die Arithmetik in K durch diejenige im Körper C und durch die N zugeordnete Idealgruppe H in C zu charakterisieren.

Im folgenden sollen Körper mit Gruppen $\mathfrak{G}$ betrachtet werden, die als unmittelbare Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$ anzusehen sind, die ja die Gruppe des zum kubischen Körper gehörigen Galoisschen Körpers sechsten Grades ist: $\mathfrak{G}$ hat eine Kommutatorgruppe $\mathfrak{N}$ von Primzahlordnung. $\mathfrak{N}$ hat eine zyklische Faktorgruppe und ist der einzige Abelsche Normalteiler.

Fast alle Ergebnisse, die im Beispiel des kubischen Körpers von Herrn Hasse gefunden wurden, lassen sich verallgemeinern. Allerdings möchte ich einen wesentlichen Punkt erwähnen, der keine Verallgemeinerung zuläßt: Das Enthaltensein in H aller Zahlen (d. h. von deren Hauptidealen) aus echten Teilkörpern von C ist nicht hinreichend für die Invarianz von H , wie dies beim kubischen Körper der Fall ist.

Nachdem in den ersten vier Paragraphen die Charakterisierung der Arithmetik in K durch C und H geleistet ist, wird in §5 das im Beispiel

¹⁾ H. Hasse, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. **31** (1930).

des kubischen Körpers nicht behandelte Problem der Vollständigkeit der gefundenen Einschränkungen für die einzelnen Zeilen der Tabelle durch Existenzbeweise allgemein gelöst.

§ 1.

Die Struktur der Gruppe²⁾.

Es sei K ein über dem Körper R der rationalen Zahlen nicht-Galoisscher (d. h. nicht-zyklischer) algebraischer Zahlkörper vom Primzahlgrade l , dessen konjugierte Körper durch K' , K'' , ... bezeichnet werden mögen. Der zu K gehörige Galoissche Körper N besitze folgende spezielle metabelsche Gruppe $\mathfrak{G}$: Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ ist von Primzahlordnung l und ihre Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ zyklisch von der Ordnung t , mit $(t, l) = 1$:

$$\mathfrak{G} = \sigma \mathfrak{N} + \sigma^2 \mathfrak{N} + \dots + \sigma^t \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} = \{\tau\}, \quad \tau^l = 1, \quad \sigma^t = 1.$$

Daß $\sigma^t = 1$ ist, ist folgendermaßen einzusehen: σ^t liegt in $\mathfrak{N}$ und ist mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. Wäre $\sigma^t \neq 1$ und damit Erzeugende von $\mathfrak{N}$, so wäre die ganze Gruppe $\mathfrak{N}$ mit jedem Element von $\mathfrak{G}$ vertauschbar. $\mathfrak{G}$ wäre dann Abelsch (zyklisch) entgegen der Annahme über K .

Jede Substitution G von $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt $G = \sigma^x \tau^y$, wo x und y die additiven Restklassen mod t bzw. mod l durchlaufen. Da $\mathfrak{N}$ Normalteiler ist, gilt sicher eine Beziehung der Art:

$$[1.] \quad \sigma^{-1} \tau \sigma = \tau^h.$$

Hiernach erzeugt der einzig wesentliche Kommutator $\sigma^{-1} \tau \sigma \tau^{-1} = \tau^{h-1}$ die Gruppe $\mathfrak{N}$, die also in der Tat die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist, denn wegen des Nicht-Abelsch-Seins von $\mathfrak{G}$ ist $h \not\equiv 1 \pmod{l}$. Die Zahl h ist ausschlaggebend für den Aufbau von $\mathfrak{G}$. Aus [1.] folgt durch mehrmalige Anwendung die allgemeine Relation:

$$[2.] \quad \tau^y \sigma^x = \sigma^x \tau^{y/h^x}.$$

Speziell gilt $\sigma^{-t} \tau \sigma^t = \tau^{h^t} = \tau$ und damit

$$[3.] \quad h^t \equiv 1 \pmod{l}.$$

Der Exponent, zu dem $h \pmod{l}$ gehört, sei mit d' bezeichnet.

Um alle Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und ihre Eigenschaften zu übersehen, ordnen wir jedem Element $G = \sigma^x \tau^y$ ³⁾ von $\mathfrak{G}$ das Paar (x, y) mit der

²⁾ Die in diesem Paragraphen festgelegten Bezeichnungen behalten wir durchweg bei.

³⁾ Die trivialen Fälle $x = 0$ oder $y = 0$ vernachlässigen wir in der Diskussion.

Maßgabe zu: $(x, y) = (x', y')$ dann und nur dann, wenn $x \equiv x' \pmod{t}$ und $y \equiv y' \pmod{l}$ ist. Aus [2.] folgt die Multiplikationsregel:

$$(x, y)(x', y') = (x + x', y h^{x'} + y').$$

Insbesondere ist also der Substitution $(\sigma^x \tau^y)^\alpha$ das Paar zugeordnet:

$$[4.] \quad (\sigma^x \tau^y)^\alpha \longleftrightarrow (\alpha x, y(h^{x(\alpha-1)} + \dots + h^x + 1)) = \left(\alpha x, y \frac{h^{\alpha x} - 1}{h^x - 1}\right).$$

Durch [4.] werden uns alle zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ geliefert. Die Ordnung von G ist nämlich die kleinste Potenz G^α , $\alpha \neq 0$, der das Paar $(0, 0)$ zugeordnet ist. Das liefert für α die Bedingungen:

$$\text{I. } \alpha x \equiv 0 \pmod{t},$$

$$\text{II a. } h^{\alpha x} \equiv 1 \pmod{l}, \text{ falls } x \not\equiv 0 \pmod{d'},$$

$$\text{II b. } \alpha \equiv 0 \pmod{l}, \text{ falls } x \equiv 0 \pmod{d' \text{ } ^4)}.$$

Im ersten Falle ist II a offenbar erfüllt, sobald I erfüllt ist, und das ergibt μ als die Ordnung von G , falls $\mu' = (x, t)$ ist.

Im Falle II b muß außerdem $\alpha \equiv 0 \pmod{l}$ sein, d. h. $l\delta$ ist die Ordnung von G , mit $\delta' = (x, t)$. Die einfachsten zyklischen Untergruppen sind die Typen ⁵⁾:

$$\mathfrak{G}_\mu = \{\sigma^{\mu'}\}, \quad \mathfrak{G}_\delta = \{\sigma^{\delta'}\}, \quad \mathfrak{G}_{\delta l} = \{\sigma^{\delta'}\tau\}.$$

Jedes mit σ und τ und dann mit jedem Element von $\mathfrak{G}$ vertauschbare Element ist nach [2.] von der Form $\sigma^{\delta'}$. Somit ist $\mathfrak{G}_\delta$ das Zentrum der Gruppe. Daraus ersieht man, daß $\mathfrak{G}_\delta$ und $\mathfrak{G}_{\delta l}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sind. Dagegen ist $\mathfrak{G}_\mu$ sicher kein Normalteiler. Denn wäre $\mathfrak{G}_\mu = \tau^{-1} \mathfrak{G}_\mu \tau$, so gälte ja die Beziehung $\tau \sigma^{\mu'} = \sigma^{u'x} \tau$. Andererseits ist nach [2.] die linke Seite dieser Gleichung gleich $\sigma^{u'} \tau^{h^{u'}}$. Hieraus folgt $h^{u'} \equiv 1 \pmod{l}$, was wegen $\mu' \not\equiv 0 \pmod{d'}$ nicht möglich ist. Ebenso erkennt man, daß $\tau^{-i} \mathfrak{G}_\mu \tau^i \neq \tau^{-k} \mathfrak{G}_\mu \tau^k$ für $i \not\equiv k \pmod{l}$ ist. $\mathfrak{G}_\mu$ hat also l verschiedene konjugierte Untergruppen, je nachdem sie mit $\tau, \tau^2, \dots$ transformiert wird. Die nicht-zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ können nur vom Typus $\mathfrak{G}_{\mu l}$ sein. Diese sind aber gerade die zu den zyklischen $\mathfrak{G}_\mu$ gehörigen Normalteiler; denn sie enthalten $\mathfrak{N}$, da ihre Ordnung durch l teilbar ist, und die kleinste darin enthaltene Potenz von σ ist $\sigma^{\mu'}$, so daß $\mathfrak{G}_{\mu l} = \{\tau\}\{\sigma^{\mu'}\}$ ist. Die $\mathfrak{G}_{\mu l}$ sind nicht Abelsch, da $\sigma^{\mu'}$ nur dann mit τ vertauschbar ist, wenn $\mu' \equiv 0 \pmod{d'}$ ist.

⁴⁾ Wir verabreden folgende Festsetzungen: μ, δ seien Teiler von t , μ', δ' ihre komplementären Teiler: $\mu \mu' = \delta \delta' = t$; mit dem Unterschied, daß $\mu' \not\equiv 0 \pmod{d'}$ und $\delta' \equiv 0 \pmod{d'}$ ist. Es sei außerdem $d d' = t$.

⁵⁾ Der Index am $\mathfrak{G}$ bezeichnet die Ordnung der Gruppe. Durch diese Angabe und durch die in Anmerkung ⁴⁾ gegebene Unterscheidung zwischen μ und δ ist die Untergruppe durch diesen Index eindeutig bestimmt (abgesehen von evtl. konjugierten).

$\mathfrak{G}$ hat somit bei beliebigem t folgende vier Typen von Untergruppen:

A. $\mathfrak{G}_\delta = \{\sigma^\delta\}$ ist zyklischer Normalteiler,

B. $\mathfrak{G}_{\delta l} = \{\sigma^\delta \tau\}$ ist zyklischer Normalteiler,

C. $\mathfrak{G}_\mu = \{\sigma^{u'}\}$ ist zyklischer Nicht-Normalteiler mit den Konjugierten
 $\tau^{-i} \mathfrak{G}_\mu \tau^i, (i = 0, 1, \dots, l-1),$

D. $\mathfrak{G}_{\mu l} = \{\sigma^{u'}\} \{\tau\}$ ist nicht-Abelscher Normalteiler.

Man erkennt hieraus auch leicht, wie eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sich gegenüber einer anderen sie enthaltenden Untergruppe verhält.

Beim Studium der Zerlegungsgesetze der rationalen Primzahlen p in K werden wir den nach dem Fundamentalsatz der Galoisschen Theorie $\mathfrak{N}$ zugeordneten Körper C , der ja absolut-zyklisch vom Grade t ist, als Hilfskörper zur Betrachtung heranziehen. Es ist naheliegend zu fordern, daß C der kleinste in N liegende Abelsche Körper ist, über dem N relativ-Abelsch ist, da sonst N komponiert wäre aus einem Körper N_0 , der diese Forderung erfüllt, und einem zyklischen Körper, so daß die Theorie von N gegenüber der von N_0 nichts wesentlich Neues bringt. Dieses ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß $\mathfrak{N}$ der größte Abelsche Normalteiler ist. Setzen wir dieses für unsere gesamte spätere Betrachtung hinzu-fügend voraus, so muß t gerade der Exponent sein, zu dem $h \bmod l$ gehört, d. h. $t = d', d = 1$, und damit insbesondere auch $t/l - 1$; denn sonst wäre $\{\sigma^{d'}\} \{\tau\} = \mathfrak{G}_{\delta l}$ ein Abelscher Normalteiler, der $\mathfrak{N}$ echt enthält, und somit größer als $\mathfrak{N}$ wäre. Nach dieser Einschränkung existieren in $\mathfrak{G}$ nur Untergruppen der Typen C und D. $\mathfrak{G}$ ist dann eine sogenannte „lineare Gruppe“ und ist die Galoissche Gruppe des Wurzelkörpers einer auflösbaren irreduziblen Gleichung (metazyklischen Gleichung) vom Primzahlgrad l . Die K zugeordnete Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}_t = \{\sigma\}$.

Bezeichnungen.

Abgesehen von den in § 1 genannten Bezeichnungen werden wir noch die folgenden durchgehend gebrauchen:

Die Primideale aus R, N, C, K seien durch $p, \bar{p}, p, \mathfrak{P}$ und als irreguläre Diskriminantenteiler durch $l, \bar{l}, l, \mathfrak{L}$ bzw. $q, \bar{q}, q, \mathfrak{Q}$ bezeichnet.

$\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_i, \mathfrak{B}_i$ bedeuten die Zerlegungs-, Trägheits- und i -te Verzweigungsgruppe. Die Zerlegungsgrößen (Anzahl G , Grad F , Ordnung E) der Primideale seien mit den in den Klammern beigefügten Buchstaben bezeichnet: $\bar{\mathfrak{P}}$ bezüglich $R: (\bar{G}, \bar{F}, \bar{E})$, $\bar{\mathfrak{P}}$ bezüglich $C: (\bar{g}, \bar{f}, \bar{e})$, $\bar{\mathfrak{P}}_i$ bezüglich $K: (\bar{G}_i, \bar{F}_i, \bar{E}_i)$, p bezüglich $R: (g, f, e)$, $\mathfrak{P}$ bezüglich $R: (G, F_i, E_i)$.

H ist die Idealgruppe von N/C , f ihr Führer; $\mathfrak{F}$ = Führer der Idealgruppe $\bar{H}$ von C/R in R .

$D_{K_1 K_2}$ = Relativ-Diskriminante von K_1/K_2 . Entsprechende Bezeichnung für die Relativ-Norm. $l-1 = t't$. Es ist immer $\mu/\mu_1, \delta/\delta_1$.

v = Anzahl der Verzweigungsgruppen, wobei jede mit ihrer Vielfachheit gezählt wird.

Eine römische Ziffer bezeichnet die Zeile, eine arabische die Spalte der Tabelle, z. B. (V, 2).

§ 2.

Herleitung und Erläuterung der Tabelle.

Die Spalte 1 der Tabelle führt alle zulässigen Untergruppenreihen von $\mathfrak{G}$ für Primideale aus N bezüglich R auf:

$$3 \geq \mathfrak{I} \geq \mathfrak{B}_1 \geq \dots \geq \mathfrak{B}_v > 1, \quad \mathfrak{B}_{v+1} = 1.$$

Hierbei greifen wir nur eine von den verschiedenen zueinander konjugierten Untergruppenreihen heraus. Die allgemeinen Bedingungen, die an eine solche Reihe gestellt werden, sind folgende:

1. $3/\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}/\mathfrak{B}_1$ sind zyklisch;
2. $\mathfrak{B}_i$ ist von Primzahlpotenzordnung;
3. $\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_{k+1}$ ist Abelsch vom Typus $(p, p, \dots, p)$;
4. $\mathfrak{I}$ sowie alle $\mathfrak{B}_i$ sind Normalteiler von 3 ⁶⁾.

In unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ liegt folgender Sachverhalt vor, der Aufschluß darüber gibt, warum nur die sechs in der Tabelle aufgezählten Untergruppenreihen zulässig sind: $\mathfrak{N}$ ist Teiler jedes Normalteilers von $\mathfrak{G}$. Zyklisch ist nur $\mathfrak{N}$ und die $\mathfrak{G}_\mu$, aber die $\mathfrak{G}_\mu$ sind nicht Normalteiler einer $\mathfrak{N}$ enthaltenden Untergruppe, wohl aber Normalteiler von $\mathfrak{G}_{\mu_1}$, wenn μ/μ_1 ist. Die $\mathfrak{G}_{\mu_1}$ sind Normalteiler von $\mathfrak{G}_{\mu_1 l}$, μ/μ_1 , mit zyklischer Faktorgruppe.

Die Zerlegungsart von p in N in Spalte 2 wird durch das allgemeine Gesetz der Hilbertschen Theorie der Galoisschen Körper geliefert:

$$p = (\overline{\mathfrak{P}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{P}}_2 \dots \overline{\mathfrak{P}}_{\overline{G}})^{\overline{E}}, \quad N_{NR}(\overline{\mathfrak{P}}_i) = p^{\overline{F}},$$

wo die Zerlegungsgrößen $\overline{G}$, $\overline{F}$, $\overline{E}$ durch die Indizes der Untergruppen gegeben sind:

$$[5.] \quad [\mathfrak{G}:3] = \overline{G}, \quad [3:\mathfrak{I}] = \overline{F}, \quad [\mathfrak{I}:1] = \overline{E}.$$

Aus dieser Zerlegung ergeben sich Bedingungen für p , die in Spalte 3 aufgezählt werden. In den Zeilen V, VI, also in den Fällen der irregulären Diskriminantenteiler, folgt die Bestimmung von p daraus, daß p in der Ordnung der Verzweigungsgruppe aufgeht, während die Kongruenzbedingungen in den Zeilen III, IV aus der allgemein gültigen Kongruenz folgt: $p^{\overline{F}} \equiv 1 \pmod{\overline{E}_0}$, wo $\overline{E}_0$ der zu p prime Bestandteil von $\overline{E}$ ist. In III ergibt sich hieraus nur $p^\mu \equiv 1 \pmod{l}$; daß μ genau der Exponent

⁶⁾ Die in dieser Arbeit zitierten Sätze über Galoissche Körper sind zu finden in: H. Hasse, Bericht über neue Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, I, Ia, Jahresbericht D. M.-V. 35 (1926), 36 (1927).

von $p \bmod l$ ist, werden wir erst auf Grund der klassenkörpertheoretischen Eigenschaften von N/C auf Seite 147 schließen können. Die in (VI, 3) gegebene Einschränkung $q \equiv 1 \bmod \bar{\mu}$ folgt aus einem Satz von Herrn Speiser⁷⁾, der allgemein im Falle Abelscher Zerlegungsgruppen gilt.

Aus Spalte 2 ergeben sich auch die Zerlegungsarten von p in C und von p in N , wenn man beachtet, daß N/C und C/R Galoissch sind, und daß daher die Zerlegungsgrößen sich einfach multiplizieren:

$$\bar{G} = g\bar{g}, \quad \bar{E} = e\bar{e}, \quad F = f\bar{f}, \quad gfe = t, \quad \bar{g}\bar{f}\bar{e} = l.$$

Um die Zerlegung von p im nicht-Galoisschen Körper K zu finden⁸⁾, gehe man so vor, daß man zuerst die Zerlegung der Primteiler $\mathfrak{P}$ von p aus K in N aufsucht. Es sei $\bar{\mathfrak{P}}$ dasjenige Primideal von p in N , dem die in Spalte 1 genannte Untergruppenreihe zugeordnet ist. Dem bezüglich R konjugierten Primideal $\bar{\mathfrak{P}}_G$ ist die Untergruppenreihe zugeordnet, die aus der für $\bar{\mathfrak{P}}$ durch Transformation mit G hervorgeht. Nach dem Aufbau von $\mathfrak{G}$ kann höchstens eine Transformation mit τ eine Untergruppe ändern. Daher entspricht den Primidealen $\bar{\mathfrak{P}}, \bar{\mathfrak{P}}_\sigma, \bar{\mathfrak{P}}_{\sigma^2}, \dots$ dieselbe Untergruppenreihe bezüglich R . Es sei nun $\mathfrak{P}_0$ das Primideal in K , in dem $\bar{\mathfrak{P}}$ aufgeht. $\mathfrak{P}_0$ enthält alle $\bar{\mathfrak{P}}_{\sigma^i}$, da K bei σ ungeändert bleibt. Die übrigen Teiler $\mathfrak{P}_i$ von p in K enthalten gewisse $\bar{\mathfrak{P}}_i$ aus N , denen zu Spalte 1 konjugierte Untergruppenreihen entsprechen. Will man die Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{P}$ aus K in N finden, so bildet man bekanntlich den Durchschnitt aus der den Primteilern von $\mathfrak{P}$ in N zugeordneten Untergruppenreihe mit der dem Körper K zugeordneten Gruppe $\mathfrak{G}_i$. Die Indizes dieser Untergruppenreihe liefern nach [5.] die Zerlegungsgrößen für die Relativzerlegung von $\mathfrak{P}$ in N . In den Fällen, in denen alle Untergruppen der Reihe Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sind, ist $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_i$ dieselbe Untergruppenreihe zugeordnet, und sie zerfallen daher gleichartig in N . Das ist in den Zeilen II, III, V der Fall. In den übrigen Fällen bleibt Spalte 1, die ja $\mathfrak{P}_0$ zugeordnet ist, bei der Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{G}_i$, abgesehen von $\mathfrak{G}$, das in $\mathfrak{G}_i$ übergeht, ungeändert, während die Durchschnittsbildung von $\mathfrak{G}_i$ mit den zu Spalte 1 konjugierten Untergruppenreihen, also mit den $\mathfrak{P}_i$ zugeordneten Reihen, für 3 die Einheit ergibt. Hat man auf diese Art die Zerlegung der Primideale $\mathfrak{P}$ aus K in N , so findet man die Zerlegung von p in K aus den allgemeinen Relationen für die Zerlegungsgrößen:

$$[6.] \quad F_i \bar{F}_i = \bar{F}; \quad E_i \bar{E}_i = \bar{E}; \quad \sum_0^{G-1} \bar{G}_i = \bar{G}; \quad \sum E_i F_i = l; \quad \bar{G}_i \bar{F}_i \bar{E}_i = t.$$

⁷⁾ Speiser, Die Zerlegungsgruppe, Crelles Journal **149** (1919), S. 184.

⁸⁾ Wir greifen hierbei einen der l konjugierten $K^{(i)}$, z. B. K , der durch $K \leftrightarrow \mathfrak{G}_i$ gegeben ist, heraus.

Hilbertsche Untergruppenreihe						Primidealzerlegung von							Nicht-Diskriminantenteiler		Reguläre Diskriminantenteiler		Irreguläre Diskriminantenteiler		8
6	3	I	$\mathfrak{P}_1$	$\mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_v$	$\mathfrak{P}_{v+1}$	p zerfällt in N	Grad	Be- dingun- gen für p	p in C	Grad	p in N	p in K	Grad	$\mathfrak{P}_0$ in N	Grad	$\mathfrak{P}_2$ in N	Grad	μ	
I	$\mathfrak{G}_\mu$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu l}$	μ	—	$p_1 \dots p_{\mu'}$	μ	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_l$	$\mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{l' \mu'}$	$1, \mu$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu'}$	μ	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	1	μ	
II	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	l	—	$p_1 \dots p_t$	1	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}$	l	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	1	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	1	μ	
III	$\mathfrak{G}_{\mu l}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu'})^l$	μ	$\mu = \text{Ex-}$ ponent von p mod l	$p_1 \dots p_{\mu'}$	μ	$\mathfrak{P}^l$	$\mathfrak{P}^l$	1	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu'}$	μ	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu'}$	μ	μ	
IV	$\mathfrak{G}_{\mu_1}$	$\mathfrak{G}_\mu$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1 l})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu} p^{\mu}$ $\equiv 1 \text{ mod } \mu,$ auch $p \equiv l$	$(p_1 \dots p_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_l$	$\mathfrak{P}_0 \cdot (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{l' \mu_1'})^{\mu}$	$1, \frac{\mu_1}{\mu}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	1	$\frac{\mu_1}{\mu}$	
V	$\mathfrak{G}_{\mu_1 l}$	$\mathfrak{G}_{\mu l}$	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1 l})^{\mu l}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$p \equiv l$	$(l_1 \dots l_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\mathfrak{P}^l$	$\mathfrak{P}^l$	1	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	
VI	$\mathfrak{G}_{\mu_1}$	$\mathfrak{G}_\mu$	$\mathfrak{G}_{q r_1}$ ¹⁾	$\mathfrak{G}_{q r_1} \dots \mathfrak{G}_{q r_v}$	$\mathfrak{E}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1 l})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$p = q,$ $r_i + 1 = r_i$ od. $r_i - 1,$ $q \equiv 1$ mod μ^2	$(q_1 \dots q_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_l$	$\mathfrak{P}_0 \cdot (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{l' \mu_1'})^{\mu}$	$1, \frac{\mu_1}{\mu}$	$(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{\mu_1'})^{\mu}$	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_t$	1	$\frac{\mu_1}{\mu}$	
1						2	3	4	5	6	7	8							

Mögliche Werte für v	Verhalten von p bez. H	Beitrag von p zu					Nicht-Diskriminantenteiler	Reguläre Diskriminantenteiler	Irreguläre Diskriminantenteiler	
		D_{NR}	D_{NU}	f	DCR	D_{NK}				
I —	p in H^4)	1	1	1	1	1	1			D_{KR} 1
II —	p nicht in H	1	1	1	1	1	1			1
III —	—	$p^{l(l-1)}$	p^{l-1}	p	1	1	1			p^{l-1}
IV —	p in H	$p^{l(l-\mu')}$	1	1	$p^{l-\mu'}$	$\mathfrak{P}_0^{l-\mu'}$				$l-1-\frac{l-1}{\mu}$ p
V $1, 2, \dots, \left[\frac{\mu l}{l-1} \right]$ (v, μ) = 1 ³⁾	—	$l^{l+\mu'}(v(l-1)-1)$	$l^{\frac{l-1}{\mu}}(v+1)$	$\frac{v+1}{l} \frac{\mu}{\mu}$	$l^{l-\mu'}$	$\Omega^{l-\mu'}$				$l-1+\frac{l-1}{\mu}$ l
VI für $q \neq 2$: $\mu(q^{r_1-1} + \dots + q + 1)$, für $q = 2$: 2^{r_1} oder 2^{r_1-1}	p in H	für $q \neq 2$: $q^{l+l\mu'a+b}$ für $q = 2$: 2^{lr_1} oder $2^{l(r_1+1)-l\mu'}$	1	1	für $q \neq 2$: $q^{l+\mu'a}$ für $q = 2$: 2^{lr_1} oder $2^{l(r_1+1)-\mu'}$	für $q \neq 2$: $\Omega_0^{l+\mu'a}$ für $q = 2$: $\Omega_0^{lr_1}$ oder $\Omega_0^{l(r_1+1)-\mu'}$				für $q \neq 2$: $l-1+\frac{l-1}{\mu}$ q für $q = 2$: $2^{(l-1)r_1}$ oder $2^{(l-1)(r_1+1)-\frac{l-1}{2}r_1}$
9	10	11	12	13	14	15				16

Bemerkungen: 1) q^{r_1} ist der genaue Beitrag von q zu t .

2) $\mu = \mu q^{r_1}$.

3) Die außerdem noch geltende Bedingung: (v, l) = 1 oder $v = \frac{\mu l}{l-1}$ ist wegen $\mu \leq l-1$ trivial.

4) Wegen der Invarianz von H liegen dann alle Konjugierten von p auch in H .

5) $a = \mu r_1 - \mu(q^{r_1-1} + \dots + q + 1) - 1$.

In den Fällen, in denen alle Untergruppen der Reihe Normalteiler sind, berechnen sich übrigens alle Größen aus [6.] allein. Damit sind die Spalten 6, 7, 8 gleichzeitig erledigt.

Bei irregulären Diskriminantenteilern gilt in relativzyklischen Körpern vom Primzahlgrade l für die Anzahl v der Verzweigungsgruppen bekanntlich die Abschätzung: $1 \leq v \leq \frac{el}{l-1}$ ⁹⁾, wo e die absolute Ordnung des betreffenden Primideals aus dem Grundkörper ist. Nun ist zwar N/R weder zyklisch noch vom Primzahlgrad, aber in Zeile V wird v offensichtlich nicht geändert, wenn wir durch Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{N}$ zur Untergruppenreihe für N/C übergehen. N/C ist zyklisch vom Primzahlgrad, und es ist $e = \mu$. Daher gelten die in (V, 9) genannten Grenzen für v . Auf dieselbe Art bestimmen wir die Grenzen für v in Zeile VI; nur nehmen wir hier den Körper k , der durch $k \leftrightarrow \mathfrak{G}_q$ gegeben ist, zu Hilfe und beachten dabei, daß v für N/k ungeändert bleibt. Nach [6.] ergibt sich $e = \frac{\mu}{q}$ und daraus zunächst die Grenzen für v : $1 \leq v \leq \frac{\mu}{q-1}$. Die Einschränkung $(\mu, v) = 1$ in (V, 9) werden wir aus der von Herrn Speiser¹⁰⁾ gegebenen Darstellung der Elemente aus der Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppe, die wir entwickeln wollen, folgern: Bekanntlich ist jede Restklasse mod p^n , n beliebig, in der Gestalt darstellbar:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \Pi + \dots + \alpha_{n-1} \Pi^{n-1} \bmod p^n,$$

wo Π eine ganze Zahl $\equiv 0 \bmod p$ aber $\not\equiv 0 \bmod p^2$ ist, und die α_i alle Restklassen mod p durchlaufen. Eine Substitution T aus $\mathfrak{T}$ ändert die Restklassen nach p nicht, aber bei ihrer Anwendung geht Π in eine ebenfalls genau durch p teilbare Zahl über. T ist also mod $\mathfrak{P}$ definierbar durch

$$T \cdot \Pi \equiv \beta \Pi \bmod p^2.$$

Ein Element V_i aus $\mathfrak{B}_i$ ändert die Restklassen nach p^{i+1} nicht und ist mod $\mathfrak{B}_{i+1}$ definierbar durch

$$V_i \cdot \Pi \equiv \Pi + \alpha \Pi^{i+1} \bmod p^{i+2}.$$

Durch Nacheinanderausführung der Substitutionen leitet Speiser die Formel ab:

$$T^{-1} V_i T \cdot \Pi \equiv \Pi + \alpha \beta^i \Pi^{i+1} \bmod p^{i+2}.$$

Angewandt auf Zeile V lautet dieselbe:

$$\sigma^{-\mu'} \tau \sigma^{\mu'} \cdot \Pi \equiv \Pi + \alpha \beta^i \Pi^{i+1} \bmod l^{i+2}.$$

⁹⁾ Die zusätzliche Bedingung: $v = \frac{el}{l-1}$ oder $(v, l) = 1$ ist wegen $e \leq l-1$ trivialerweise erfüllt.

¹⁰⁾ Speiser, Die Zerlegungsgruppe, Crelles Journal **149** (1919).

Nun ist aber nach [2.] in § 1 die linke Seite $= \tau^{h^{u'}}$. Da der Multiplikation der V_i die Addition der zugeordneten α entspricht, ist für letzte Substitution:

$$\tau^{h^{u'}} \cdot \Pi \equiv \Pi + h^{u'} \alpha \Pi^{i+1} \bmod l^{i+2}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha \beta^i \equiv h^{u'} \alpha \bmod l.$$

Wir wählen nun für $\mathfrak{B}_i$ die letzte von 1 verschiedene Verzweigungsgruppe, also $\mathfrak{B}_v$. Dann ist sicher $\alpha \not\equiv 0 \bmod l$, und es gilt:

$$[A.] \quad h^{u'} \equiv \beta^v \bmod l.$$

Nun liegt erst die μ -te Potenz von $T = \sigma^{u'}$ in $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}_v$; es ist daher $\beta^u \equiv 1 \bmod l$ und μ der kleinste Exponent mit dieser Eigenschaft. Wir benutzen nun die Tatsache, daß h zum Exponenten $t = \mu \mu' \bmod l$, also auch $\bmod l$ gehört. Der Exponent, zu dem $h^{u'} \bmod l$ gehört, ist also derselbe wie derjenige, zu dem β gehört, nämlich μ , woraus nach [A.] folgt: $(v, \mu) = 1$.

Bei der Bestimmung von v in Spalte 9 bleibt uns nun noch zu zeigen, daß in (VI, 9) v im allgemeinen, d. h. wenn $q \neq 2$, den höchsten zulässigen Wert annimmt. Dazu gehen wir von (VI, 1) durch Durchschnittsbildung mit $\mathfrak{G}_i$ zur Untergruppenreihe für N/K über, in der die Verzweigungsgruppen dieselben sind. N/K ist aber Abelsch, und daher lassen sich die Formeln von Herrn Hasse anwenden¹¹⁾. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$ die verschiedenen unter den Verzweigungsgruppen, kommt $\mathfrak{B}_i$ in der Untergruppenreihe in der Vielfachheit v_i vor, und ist $\mathfrak{B}_i$ von der Ordnung p^{R_i} , so gelten die Kongruenzen:

$$v_i \equiv 0 \bmod e_0 p^{R_1 - R_i}, \quad \text{wo} \quad e_0 = [\mathfrak{T} : \mathfrak{B}_1] \text{ ist.}$$

Spezialisiert auf Zeile VI bedeutet es:

$$v_i \equiv 0 \bmod \bar{\mu} q^{i-1}.$$

Es ist also v_i mindestens $= \bar{\mu} q^{i-1}$. Da $v = v_1 + v_2 + \dots + v_{r_1}$ ist, hat v mindestens den Wert:

$$v \geq \bar{\mu} (q^{r_1} + \dots + q + 1) = w.$$

Zusammengenommen gilt also für v die Abschätzung:

$$w \leq v \leq w + \frac{\bar{\mu}}{q-1}.$$

Wegen $v \equiv 0 \bmod \bar{\mu}$ ist für $q \neq 2$ nur $v = w$ möglich, während für $q = 2$ $v = 2^{r_1}$ oder $v = 2^{r_1} - 1$ ist¹²⁾, je nachdem $v_1 = 2$ oder 1 ist.

¹¹⁾ Hasse, Führer, Diskriminante und Verzweigungsgruppen relativ-Abelscher Zahlkörper. Crelles Journal **162** (1930), S. 171.

¹²⁾ Die beim kubischen Körper gefundenen Werte von v in dem der Zeile VI entsprechenden Fall stellen sich demnach als Eigenart der Primzahl 2 und nicht des kubischen Körpers heraus.

Die Aussage in Spalte 10 über das Verhalten der zu $\mathfrak{f}$ primen $\mathfrak{p}$ aus C bezgl. H folgt aus der Charakterisierung der Idealgruppe H , daß sie alle und nur die Primideale aus C enthält, die im Klassenkörper N in Primideale 1. Relativgrades zerfallen. Aus Spalte 5 ersieht man, für welche $\mathfrak{p}$ dieses erfüllt ist.

Es ist auffällig, daß bei den Nicht-Diskriminantenteilern in den Zeilen I, II alle Primideale $\mathfrak{p}$ aus C von höherem absoluten Grade als 1 in H liegen. Dieses ist sicher dann und nur dann der Fall, wenn t der genaue Exponent von h mod l ist. Ist nämlich $t > d'$, so existiert noch eine zulässige Kategorie von Untergruppenreihen für Nicht-Diskriminantenteiler, nämlich: $|\mathfrak{G}|\mathfrak{G}_{d'}|\mathfrak{G}|$. Wie man leicht erkennt, gäbe es in dieser Zeile auch Primideale von höherem Grade als 1, die nicht in H liegen. Der innere Grund dieser Tatsache wird in § 3 klar werden.

Für die Beiträge zu den Diskriminanten gilt in relativ-Galoisschen Körpern die allgemeine Formel:

$$[7.] \quad D_{K_1 K_2}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{GF(E-1+p^{R_1}+\dots+p^{R_v}-v)},$$

wobei die Zerlegungsgrößen für die Relativzerlegung von $\mathfrak{p}$ aus K_1 in K_2 zu nehmen sind, und p^{R_i} die Ordnung der i -ten Verzweigungsgruppe ist. Mit Hilfe von [7.] lassen sich die Spalten 11, 12, 15 leicht berechnen, wenn man die im Exponenten von [7.] vorkommenden Größen den Spalten 2 bzw. 5 bzw. 4 entnimmt. Bei D_{NC} drückt sich der Beitrag zunächst in $\mathfrak{p}$ aus. Beachtet man aber die Grade von $\mathfrak{p}$ in Spalte 4, so erkennt man, daß der Beitrag immer eine rationale Zahl ist.

Bei der Bestimmung des Führers in Spalte 13 bedenken wir, daß für relativ-zyklische Körper vom Primzahlgrade die Beziehung besteht: $D = \mathfrak{f}^{p-1}$; in unserem Falle $D_{NC} = \mathfrak{f}^{l-1}$. Mit Ausnahme von Zeile V sind es ganze rationale Zahlen, die als Beiträge von $\mathfrak{f}$ auftreten. Auch der Beitrag von l kann rational sein und l oder l^2 betragen. Aus der allgemeinen Hilbertschen Relation $D_{NR} = \pm D'_{CR} \cdot N_{CR}(D_{NC})$ kann man D_{CR} in Spalte 14 berechnen, indem man zunächst $N_{CR}(D_{NC})$ unter Beachtung der Gradangabe in Spalte 4 aus Spalte 12 berechnet.

Unter Beachtung der Gradangabe in Spalte 6 ergibt sich $N_{KR}(D_{NK})$ aus Spalte 15, und daraus folgt der Beitrag zu D_{KR} nach der Relation:

$$D_{NR} = \pm D'_{KR} N_{KR}(D_{NK}).$$

Man ersieht übrigens die bemerkenswerte Tatsache, daß in den Fällen ungleichartiger Zerlegung von p in K nur $\mathfrak{P}_0$ einen Beitrag zu D_{KR} liefert; bei den anderen $\mathfrak{P}_i$ ist durchweg $e = 1$.

§ 3.

Die Invarianten C und H des Körpers K .

Durch den Körper C und durch die Idealgruppe H in C vom Index l ist N als Klassenkörper zu H und mit ihm der Körper K (abgesehen von konjugierten) als der zu $\mathfrak{G}_t$ gehörige Körper eindeutig bestimmt. Durch K ist umgekehrt N als der zu K gehörige Normalkörper, C als größter in N enthaltener Abelscher Körper und H als die N zugeordnete Idealgruppe in C eindeutig bestimmt. Es besteht dabei, wie aus der Tabelle ersichtlich, die einfache Beziehung zwischen den Diskriminanten und dem Führer:

$$[8.] \quad D_{KR} = \pm D_{CR}' \cdot \mathfrak{f}^{l-1}.$$

Das ist eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß die Diskriminante eines kubischen Körpers k gleich ist dem Produkt aus der Diskriminante des in dem zu k gehörigen Normalkörper B sechsten Grades enthaltenen quadratischen Körpers Q und einer Zahl zum Quadrat, die sich als der Führer von B/Q herausstellt¹³⁾. Es ist nicht nur D_{KR} durch D_{CR} und $\mathfrak{f}$ nach [8.] bestimmt, sondern zu einem gewissen Teil auch umgekehrt: *Durch D_{KR} ist sowohl D_{CR} als auch $\mathfrak{f}$ — bis auf eventuelle Primteiler von l — bestimmt.* D_{CR} und $\mathfrak{f}$ sind nämlich, abgesehen von Primteilern von l , teilerfremd, und wie man aus der Tabelle abliest, geht eine in D_{KR} aufgehende Primzahl $p \neq l$ dann und nur dann in $\mathfrak{f}$ auf, wenn sie in D_{KR} genau in der $(l-1)$ -ten Potenz aufgeht.

Vor allem wegen der zuerst erwähnten eindeutigen Bestimmung von K durch C und H nennen wir C und H die Invarianten von K oder auch die Invarianten von $f(x)$, wo $f(x)$ ein irreduzibles auflösbares Polynom vom Primzahlgrad ist, $K = R(\alpha)$, und α eine Wurzel von $f(x) = 0$ ist. Es fragt sich nun: Wann sind C und H die Invarianten einer auflösbaren Gleichung vom Primzahlgrade? Die Frage ist so zu verstehen: Wir denken uns einen zyklischen Körper C vom Grade t gegeben und fragen: Wie muß eine Idealgruppe H in C gewählt werden, damit ihr Klassenkörper N der Wurzelkörper einer auflösbaren Gleichung vom Primzahlgrade ist, d. h. damit N eine Galoissche Gruppe von dem in § 1 betrachteten Typus hat?

Abgesehen von der trivialen Forderung, daß H vom Primzahlindex l mit $l \equiv 1 \pmod{t}$ ist, müssen offenbar folgende Bedingungen erfüllt sein:

- a) N ist absolut-Galoissch.
- b) N ist gerade der zu K gehörige Normalkörper.

¹³⁾ Hasse, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörper-theoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 575.

Dabei ist, da die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von N sicher die Gestalt hat: $\mathfrak{G} = \sigma N + \sigma^2 N + \dots + \sigma^t N$, K durch die Zuordnung $K \leftrightarrow \{\sigma\}$ definiert. Die Bedingung b) ist gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler vom Typus $\mathfrak{G}_\mu$ enthält; denn der dieser Untergruppe zugeordnete Körper wäre Galoissch und enthielte K . Nach § 1, S. 137 kommt letztere Eigenschaft von $\mathfrak{G}$ auf die Forderung hinaus:

b') N ist der größte und damit der einzige Abelsche Normalteiler.

Für das Galoissch- bzw. Abelsch-Sein eines Klassenkörpers gilt folgender Hilfssatz von Herrn Hasse¹⁴⁾:

Ist k_0 ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, k/k_0 zyklisch, σ Erzeugende der Gruppe von k/k_0 , H Idealgruppe in k , A der zugehörige Klassenkörper, so gilt:

- A. Dann und nur dann ist A/k_0 Galoissch, wenn H bei σ invariant ist.
- B. Dann und nur dann ist A/k_0 sogar Abelsch, wenn sogar die Klassen nach H bei σ invariant sind.

Durch Anwendung des Hilfssatzes auf jeden Zwischenkörper k_1 zwischen k und k_0 als Grundkörper folgt, wenn man beachtet, daß die Gruppe von k/k_1 eine gewisse $\{\sigma^x\}$ ist:

- B'. Dann und nur dann ist A über einem echten Zwischenkörper zwischen k und k_0 Abelsch, wenn es ein μ gibt, derart, daß sogar die Klassen nach H bei $\sigma^\mu \neq 1$ invariant sind.

Nun besagt Forderung b'), daß zwar N über C , aber nicht über einem echten Unterkörper von C Abelsch ist. Daher können wir nach dem Hilfssatz folgendes Kriterium aussprechen:

Kriterium I. Ist C ein zyklischer Körper vom Grade t und H eine Idealgruppe in C vom Primzahlindex l , $l \equiv 1 \pmod{t}$, so ist der zu H gehörige Klassenkörper N dann und nur dann der Auflösungskörper einer irreduziblen Gleichung vom Primzahlgrade, d. h. dann und nur dann sind C und H Invarianten eines Körpers K , der dadurch entsteht, daß man zu R eine Wurzel einer auflösbaren Gleichung vom Primzahlgrade adjungiert, wenn:

- 1. H bei Anwendung von σ invariant bleibt, d. h. $H^\sigma = H$.
- 2. $\mathfrak{G}^{\sigma^\mu} \neq \mathfrak{G}$, für $\mu < t$ und jede Klasse $\mathfrak{G} \neq H$ nach H .

Da H vom Primzahlindex ist, braucht man 2 nur für eine beliebige Klasse nach H zu fordern, weil jede dieser Klassen $\mathfrak{G} \neq H$ Erzeugende der Idealklassengruppe nach H ist. Man erkennt hieraus die notwendige Bedingung für H :

¹⁴⁾ Hasse, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörper-theoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 572.

Satz I. *H enthält sicher alle Ideale aus C , die bei irgendeiner Substitution $\sigma^x \neq 1$ ungeändert bleiben. H enthält also sicher alle Zahlen (d. h. deren Hauptideale) und alle Ideale aus echten Unterkörpern von C .*

Ist nämlich $\mathfrak{a}$ ein solches Ideal, das bei σ^u ungeändert bleibt, und wäre $\mathfrak{a} < \mathfrak{C}$, so wäre $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}H$ und $\mathfrak{C}^{\sigma^u} = \mathfrak{C}$. Die in Satz I genannte Eigenschaft von H ist aber im allgemeinen noch nicht hinreichend dafür, daß H Invariante von K ist, wie wir in § 5 sehen werden, weil aus ihr noch nicht die Invarianz von H bei Anwendung von σ folgt, wie dies z. B. beim kubischen Körper der Fall ist. Wir können aber diese Eigenschaft als Ersatz für Forderung 2 in Kriterium I aufnehmen, so daß gilt:

Kriterium II. *C und H sind im Sinne von Kriterium I dann und nur dann Invarianten von K , wenn:*

1. $H^\sigma = H$.
- [I.] 2. H alle Ideale enthält, deren „Invarianzgruppe“ $3 > 1$ ist¹⁵⁾.

Zum Beweise ist zu zeigen, daß unter Voraussetzung von 1 und 2 es kein $\mu < t$ gibt, derart, daß $\mathfrak{C}^{\sigma^\mu} = \mathfrak{C}$ ist. Ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}H$ und wäre $\mathfrak{C}^{\sigma^\mu} = \mathfrak{C}$, so hieße dieses, daß $\mathfrak{C}$ neben $\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{a}^{\sigma^\mu}$, $\mathfrak{a}^{\sigma^{2\mu}}$, ... enthält. Es wäre also wegen der Invarianz von H $\mathfrak{C} = \mathfrak{a}H = \mathfrak{a}^{\sigma^\mu}H = \dots$. Die Klasse $\mathfrak{C}'$ wäre dann gegeben durch: $\mathfrak{C}' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{\sigma^\mu} \cdot \mathfrak{a}^{\sigma^{2\mu}} \dots H = \mathfrak{A}H$. Da aber das Produkt $\mathfrak{A}$ bei σ^μ ungeändert bleibt und daher zu H gehört, wäre $\mathfrak{C}' = H$, was nicht möglich ist; denn erst $\mathfrak{C}'$ darf gleich H sein.

Wir sind jetzt imstande, den noch ausstehenden Beweis für die Behauptung in (III, 3): $\mu = \text{Exponent von } p \bmod l$ nachzuholen. Zunächst gilt sicher: $p^\mu \equiv 1 \bmod l$. Es sei μ_0^* der Exponent, zu dem $p \bmod l$ gehört, und $\mu = \mu_0 \mu_0^*$. Wir greifen den Körper k_0 heraus, der der Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu_0 l}$ zugeordnet ist, wo $\mathfrak{G}_{\mu_0 l} = \{\sigma^{\mu_0^i}\} \{\tau\}$ ist. Durch Durchschnittsbildung von (III, 1) mit $\mathfrak{G}_{\mu_0 l}$ erhält man die Relativzerlegung von Primidealen $\mathfrak{p}_0$ aus k_0 in N , und nach [6.] in § 2 errechnet man die Zerlegung von p in k_0 : $p = \mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{p}'_0 \dots p^{(\mu'-1)}$, $N_{k_0 R}(\mathfrak{p}_0) = p^{\mu_0^*}$. Wäre $\mu_0^* < \mu$, so wäre k_0 ein echter Unterkörper von C , und daher lägen alle Idealklassen, die durch Zahlen aus k_0 repräsentiert werden können, in H . Da H vom Index l ist, und p im Führer von H aufgeht, müßte der Index der Gruppe aller zu p primen Zahlen aus k_0 in der Gruppe aller zu p primen Zahlen aus C durch l teilbar sein. Dieser Index ist aber:

$$\frac{\varphi_0(p)}{\varphi_{k_0}(p)} = \frac{(p^\mu - 1)^{\mu'}}{(p^{\mu_0^*} - 1)^{\mu'}} = (p^{\mu_0^* (\mu_0 - 1)} + \dots + p^{\mu_0^*} + 1)^{\mu'}.$$

Es müßte also dieser Ausdruck, der $\equiv \mu_0$ ist, auch $\equiv 0 \bmod l$ sein, was unmöglich ist.

¹⁵⁾ Wir nennen diese Bedingungen die Invariantenbedingungen [I.] oder kurz [I.].

Durch Satz I ist auch die Begründung für die in § 2 erwähnte Erscheinung gegeben, daß alle Nicht-Diskriminantenteiler p aus C , deren Absolutgrad $f > 1$ ist, in H liegen. $f > 1$ bedeutet, daß der Zerlegungskörper (das ist der der Invarianzgruppe zugeordnete Körper) ein echter Unterkörper von C ist. Solche p müssen nach Kriterium II zu H gehören.

§ 4.

Die Zerlegungsgesetze in Abhängigkeit von C und H .

Da C absolut zyklisch ist, ist die Zerlegungsart der rationalen Primzahlen in C leicht beherrschbar; sie hängt nur von den Restklassen nach dem Führer $\mathfrak{F}$ der Idealgruppe von C/R ab. Wir nehmen daher die Größen g, f, e als bekannt an und drücken die anderen Größen durch diese aus.

Da l Primzahl ist, $N/C, C/R$ normal sind, multipliziert sich eine der drei Größen g, f, e mit l , wenn man in der Zerfällung von p von C nach N weitergeht. Die beiden anderen Größen bleiben ungeändert. Wir formulieren die Zerlegung von p in N durch Angabe der drei Zerlegungsgrößen:

Satz II: Zerlegung von p in N .

A. Nicht-Diskriminantenteiler haben die Größen $(gl, f, 1)$ oder $(t, l, 1)$, je nachdem p in H liegt oder nicht¹⁶⁾.

B. Diskriminantenteiler $\neq l$ haben die Größen (g, f, l) oder (gl, f, e) , je nachdem p/f^t oder nicht¹⁷⁾.

C. Der Diskriminantenteiler l hat die Größen (g, f, el) oder (gl, f, e) , je nachdem l/f^t oder nicht.

Satz III: Die Zerlegung von p in K .

A. $p = \mathfrak{P}^l$, wenn p/f^t .

B. $p = \mathfrak{P}$, wenn p nicht in H liegt¹⁸⁾.

C. $p = \mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_s$ mit den Graden $1, f$, wenn $p \nmid D_{KR}$. Ist aber $f = 1$, so kommt noch die Bedingung hinzu: p in H . Hierbei ist $s f = l - 1$.

D. $p = \mathfrak{P}_0 (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_s)^l$ mit den Graden $1, f$, wenn p/D_{KR} aber $p \nmid f^t$.

e läßt sich im übrigen allein aus dem Beitrag p^α der Primzahl zu D_{KR} berechnen. Es ist für $p \neq q$ nach (IV, 16) $e = \frac{l-1}{l-1-\alpha}$. Ist $p = q \neq 2$, so ist nach (VI, 16) $e = \frac{\alpha(l-1)}{\alpha-l+1}$. Wir können die Zerlegungen von p in K auch anders ausdrücken:

¹⁶⁾ Wegen $H^\sigma = H$ liegen immer gleichzeitig alle p_i in H oder nicht.

¹⁷⁾ Wir nehmen deshalb f^t , weil f nicht immer rational ist.

¹⁸⁾ Und wenn diese Bedingung nicht trivial ist, d. h. wenn $(p, f) = 1$.

Satz III':

A. Nicht-Diskriminantenteiler: $p = \mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_s$ mit den Graden 1, f oder $p = \mathfrak{P}$, je nachdem p in H liegt oder nicht.

B. Diskriminantenteiler: $p = \mathfrak{P}^l$ oder $p = \mathfrak{P}_0 \cdot (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_s)^e$ mit den Graden 1, f , je nachdem $p/\mathfrak{f}^l$ oder nicht.

Bei Diskriminantenteilern ist also die Zerlegung von p in K völlig durch f bestimmt, während bei Nicht-Diskriminantenteilern die Idealgruppe H herangezogen werden muß¹⁹⁾.

Satz IV: Die Zerlegung von Primidealen aus K in N .

$\mathfrak{P}_0$ zerfällt in N auf dieselbe Art wie p in C . Die Primteiler $\mathfrak{P}_i$ von p in K zerfallen in N gleichartig wie $\mathfrak{P}_0$ oder vollständig, je nachdem $p/\mathfrak{f}^l$ oder nicht.

Satz V: Der Führer $\mathfrak{f}$ von H kann nur folgende Gestalt haben:

$$\mathfrak{f} = p_1 p_2 \dots p_r \cdot l^{(1 + \sigma + \dots + \sigma^{g-1})n} = p_1 p_2 \dots p_r l^{\frac{n}{e} \cdot 20})$$

mit

$$p_i \neq p_k \neq l, 2 \leq n \leq \left[\frac{el}{l-1} \right] + 1 \quad (\text{oder } n = 0).$$

D_{NC} ist demnach stets rational.

Die in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primzahlen p_i , mit der Zerlegung

$$p_i = p_i^{1 + \sigma + \dots + \sigma^{g_i-1}}, \quad N(p_i) = p_i^{f_i},$$

müssen der Bedingung genügen:

$$[B.] \quad f_i = \text{Exponent von } p_i \text{ mod } l.$$

Die Zerlegungsart von p_i besagt, daß p_i mod $\mathfrak{f}$ gewissen Restklassen angehört, was nicht immer für jeden Teiler f_i von t mit [B.] vereinbar ist. Bei $(\mathfrak{f}, l) = 1$ sind diese Bedingungen niemals widerspruchsvoll.

Satz VI: D_{CR} und $\mathfrak{f}$ können höchstens Primteiler von l gemeinsam haben. Geht l in $\mathfrak{f}$, aber nicht in D_{CR} auf, so ist $l^2/\mathfrak{f}$ (weil $\mu' = t$, $\mu = 1$, $v = 1$ ist).

Satz VII: Die Diskriminante von K hängt mit der Diskriminante von C und dem Führer von H durch folgende Relation zusammen:

$$D_{KR} = \pm D_{CR}' \cdot \mathfrak{f}^{l-1} = \pm (D_{CR} \mathfrak{f}^l)^{e'}.$$

¹⁹⁾ Dieses Zerlegungsgesetz ist besonders einfach für den Körper $K = R(\sqrt[l]{a})$, a rational, da für ihn $C = R(\zeta)$ wird.

²⁰⁾ Wie leicht zu verifizieren, ist $\mathfrak{f}$ dann und nur dann rational, wenn:

1. $n = 0$; dann ist $(\mathfrak{f}, l) = 1$,

2. $n > 0$, $e = 1$ oder $l = 3$, $e = 2$, $n = 4$; dann ist $l^2/\mathfrak{f}$,

3. $n = e$; dann ist $l/\mathfrak{f}$.

Die Tatsache, daß der Führer im Falle des kubischen Körpers rational ist, läßt sich also nicht verallgemeinern.

Hieraus ergibt sich folgender

Satz VIII: Ist $f(x) = 0$ eine auflösbare Gleichung vom Primzahlgrade, γ eine ihrer Wurzeln, $K = R(\gamma)$, und ist die Diskriminante von K genau die α -te (keine höhere) Potenz einer Zahl, so ist der zu K gehörige Normalkörper, d. h. der Wurzelkörper N von $f(x) = 0$, mindestens vom Grade $\frac{l(l-1)}{\alpha}$. In jedem Falle ist dieser Grad ein Vielfaches von $\frac{l(l-1)}{\alpha}$.

Ist z. B. $\alpha = 1$, so hat N die sogenannte „volle lineare Gruppe“ zur Galoisschen Gruppe.

Satz IX: Nach der Tabelle gilt folgende Beziehung:

$$D_{NR} = \pm D_{CR} D_{KR}^t.$$

Jede von l verschiedene in D_{CR} aufgehende Primzahl p hat ihre Primteiler in H .

§ 5.

Existenzbeweise durch Konstruktion der Idealgruppen.

Um sicher zu sein, keine Einschränkung allgemeiner Natur bei der Aufstellung der Tabelle vernachlässigt zu haben, wollen wir die Existenz von Körpern N beweisen, die Primideale mit beliebigen in der Tabelle als möglich erwähnten Untergruppenreihen enthalten. Wir denken uns dabei den zyklischen Körper C vom Grade t als beliebig, aber fest gegeben — die Größen g, f, e sind damit für jede Primzahl p festgelegt — und beweisen die Existenz von N durch wirkliche Konstruktion der N in C zugeordneten Idealgruppe H .

Wie leicht zu sehen, beschränkt sich unsere Aufgabe allein darauf, zu zeigen, daß man in C Idealgruppen vom Index l , $l \equiv 1 \pmod{t}$, konstruieren kann, die die Invariantenbedingungen [I.] erfüllen und einen vorgeschriebenen, in der Tabelle als zulässig genannten Führer haben; mit anderen Worten: nur die Existenz der Zeilen III und V bedarf eines besonderen Beweises. Jeder einer solchen Idealgruppe zugeordnete Klassenkörper N hat gemäß den Betrachtungen von § 3 eine lineare Gruppe als Galoissche Gruppe. Nach dem bekannten Frobeniusschen Existenzbeweis existieren unendlich viele Primideale in N mit den gruppentheoretisch zulässigen Untergruppenreihen für Nichtdiskriminantenteiler; die Existenz der Zeilen I und II ist hiermit dargetan. Aber auch die Zeilen IV und VI sind gesichert, sobald die Zeilen III und V als möglich erwiesen sind; denn in ihnen ist die Zerlegungsart in N allein durch die Zerlegung in C und durch die Teilerfremdheit zu f bedingt. Da letztere Bedingtheit, die allein bei der Erweiterung von C zu N zu berücksichtigen ist, negativer Natur ist, kann sie ohne weiteres erfüllt werden, sobald man weiß, daß die f zusammensetzenden Primideale p

sogar beliebig nur gewisse Bedingungen erfüllend vorgeschrieben werden können.

Wir wenden uns jetzt der Konstruktion von Idealgruppen in C zu, die [I.] erfüllen, und werden sehen, daß sämtliche Einschränkungen der Tabelle, die wir für die in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideale und für die Potenz, in der sie in $\mathfrak{f}$ aufgehen, auf anderem Wege ableiteten, sich bei der Konstruktion von H von selbst ergeben.

Wir wollen zunächst Zahlgruppen H in C konstruieren, die [I.] erfüllen und $\mathfrak{f}$ als Modul haben, und werden dann zu Idealgruppen übergehen. Wir nehmen das allgemeinste invariante Ideal $\mathfrak{f}$ — invariant muß $\mathfrak{f}$ wegen $H^\sigma = H$ sein — als Modul:

$$\mathfrak{f} = \prod \mathfrak{p}_i^{(1+\sigma+\dots+\sigma^{g_i-1})(v_i+1)}, \quad \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i, \quad N(\mathfrak{p}_i) = p_i^{f_i}, \quad e_i f_i g_i = t.$$

Nach Herrn Hensel kann man $u_i + 1 = e_i f_i + 1$ Zahlen $\varrho^{(i)}, \eta_1^{(i)}, \dots, \eta_{u_i}^{(i)}$ angeben, die eine Basis²¹⁾ der primen Restklassen mod jeder Potenz $\mathfrak{p}_i^x$ bilden. Für $x = 1$ ist $\varrho^{(i)}$ allein die Basis. Die Ordnungen der $\eta^{(i)}$ sind Potenzen von p_i , und die $\eta^{(i)}$ können daher für $p_i \neq l$ bei einer Gruppe vom Index $l \bmod \mathfrak{f}$ nicht mitsprechen. Das bedeutet, das jedes nicht in l aufgehende Primideal in $\mathfrak{f}$ nur in erster Potenz aufgehen kann. Aber ein Diskriminantenteiler kann in erster Potenz niemals, auch nicht wenn p/l ist, in $\mathfrak{f}$ aufgehen, weil dann nach bekannten Sätzen jede Zahl von C einer Zahl aus dem Trägheitskörper T kongruent ist, und T für Diskriminantenteiler ein echter Teilkörper von C ist. Nach Kriterium II müßten dann alle Restklassen ϱ^x in H liegen, und $\mathfrak{p}_i$ ginge dem Modul verloren. Der Modul muß also notwendig die Gestalt haben:

$$\mathfrak{f} = p_1 p_2 \dots p_z l^{(1+\sigma+\dots+\sigma^{g-1})(v+1)} = l^\omega \prod \mathfrak{p}_i, \quad \omega = \frac{v+1}{e}, \quad v \neq 0 \text{ }^{22)}$$

mit

$$p_i = \mathfrak{p}_i^{1+\sigma+\dots+\sigma^{g_i-1}}, \quad N(\mathfrak{p}_i) = p_i^{f_i}, \quad \mathfrak{p}_i \neq l, \quad f_i g_i = t,$$

$$l = l^{(1+\sigma+\dots+\sigma^{g-1})e}, \quad N(l) = l', \quad e f g = t.$$

Bei der Aufstellung der Basis mod $\mathfrak{f}$ wollen wir für jedes $\mathfrak{p}_i$ und für l^{v+1} gesondert vorgehen, weil wir die Basiselemente nachher dadurch

²¹⁾ Hensel, Untersuchungen der Zahlen..., Crelles Journ. **146** (1916). S. 219, 227. Diese Basis gilt nur, wenn C die l -ten Einheitswurzeln nicht enthält oder, wenn das der Fall ist, also C der Körper der l -ten Einheitswurzeln ist, nur wenn v nicht den bei uns zulässigen Höchstwert l hat. Dieser letztere Fall wird später extra behandelt.

²²⁾ Formal wollen wir hier in der Formel für $\mathfrak{f}$ auch die Werte $v = -1$ bzw. $z = 0$ zulassen, nämlich, wenn l keinen Beitrag bzw. nur l einen Beitrag zu $\mathfrak{f}$ liefert. In diesen Fällen erfährt das Folgende eine vereinfachende Modifikation, indem nur die ϱ_{ik} bzw. nur die $\eta_{\mu\nu\lambda}$ zu betrachten sind.

unabhängig machen können, daß wir sie $\equiv 1 \pmod{\frac{f}{p_i}}$ bzw. $\pmod{\frac{f}{l^{v+1}}}$ normieren. Für die konjugierten von p_i bzw. l^{v+1} wählen wir die konjugierten Basiselemente.

Es sei ϱ_i primitive Wurzel $\pmod{p_i}$. Da H vom Index l sein soll, muß die Ordnung von ϱ_i , d. i. $p_i^{f_i} - 1$, durch l teilbar sein. Daß f_i genau die Ordnung von $p_i \pmod{l}$ sein muß, haben wir auf S. 147 auf Grund von Kriterium II mit elementaren Mitteln bewiesen. $\varrho_i^{g_i}$ ist ebenfalls primitive Wurzel $\pmod{p_i}$ und kann durch geeignete Wahl von ϱ_i als $\equiv \varrho_i^{p_i} \pmod{p_i}$ angenommen werden, da bekanntlich $\varrho_i^{p_i} \equiv \varrho_i^{\sigma_{g_i}^x} \pmod{p_i}$ mit $(x, f_i) = 1$ ist (siehe Definition des Frobeniussymbols).

$\text{Mod } l^{v+1}$ bilden nach Herrn Hensel folgende Zahlen eine Basis (wenn man das für unsere Zwecke unwichtige Element mit einer zu l teilerfremden Ordnung vernachlässigt):

$$\eta_{\mu v} = 1 + w_\mu \lambda^v$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, f; v = 1, 2, \dots, v; \text{ jedoch } v < e \text{ für } v > e).$$

Die w_i sind dabei eine Basis der additiven Restklassengruppe $\text{mod } l$, und λ ist ein Primelement für l , d. h. eine genau durch l teilbare Zahl.

Die Anwendung der Substitutionen $s = \sigma^g, s^2, \dots, s^n = 1$, die eine zyklische Gruppe bilden, auf die Restklassengruppe $\text{mod } l^{v+1}$ (additiv geschrieben ist sie als Modul aufzufassen) ergibt eine Matrizendarstellung dieser Gruppe, als deren Darstellungsmodul eben jene Basis $\eta_{\mu v}$ verwendet werden kann. Die erzeugende Matrix ist gegeben durch

$$\eta_{\mu v}^g \equiv \prod_{\beta \geq v} \eta_{\alpha \beta}^{b_{\mu v} g \alpha \beta} \pmod{l^{v+1}}.$$

Daß nur über $\beta \geq v$ zu multiplizieren ist, ersieht man aus dem Übergang zu l^x , $x < v$, als Modul. Die Matrix und daher auch die Darstellung ist also halbreduziert, und zwar enthält sie in der Diagonale v Bestandteile je vom Grade f , welche immer den f Basiseinheiten eines festen Grades v entsprechen.

Nun ist bekanntlich jede halbreduzierte Darstellung einer endlichen Gruppe durch Basistransformation im selben Körper vollreduziert zu machen. Diese Transformationsmatrix kann, wie aus dem Beweis von Herrn Schur²³⁾ hervorgeht, auch in derselben Art halbreduziert gewählt werden, wie die Gruppe selbst es ist. Daraus ersieht man, daß die spezielle Kongruenzstruktur der Basis bei der Transformation nicht zerstört wird, d. h. für die neue Basis gilt auch:

$$\eta_{\mu v} \equiv 1 + w_\mu \lambda^v \pmod{l^{v+1}}.$$

²³⁾ J. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berl. Akad. Ber. 1905, S. 415.

Die Bestandteile f -ten Grades kann man durch eine auf die w_i erstreckte Basistransformation auf Bestandteile ersten Grades zurückführen, da es sich um eine zyklische (also Abelsche) Gruppe handelt, in der bekanntlich die irreduziblen Bestandteile vom ersten Grade sind²⁴⁾. Diese Bestandteile liegen im Körper der Einheitswurzeln der betreffenden Ordnung. Da der Koeffizientenkörper unserer Darstellung der Restklassenkörper $\text{mod } l$ ist, der doch die $(l-1)$ -ten, also wegen $n|l-1$ erst recht die n -ten Einheitswurzeln enthält, ist eine Erweiterung des Körpers nicht erforderlich. Es existiert also eine Basis, die wir der Einfachheit halber wieder durch $\eta_{\mu\nu}$ bezeichnen wollen:

$$\eta_{\mu\nu} \equiv 1 + w_{\mu\nu} \lambda^\nu \text{ mod } l^{\nu+1},$$

für die gilt:

$$\eta_{\mu\nu}^s \equiv \eta_{\mu\nu}^{c_{\mu\nu}} \text{ mod } l^{\nu+1}$$

oder also:

$$(w_{\mu\nu} \lambda^\nu)^s \equiv c_{\mu\nu} w_{\mu\nu} \lambda^\nu \text{ mod } l^{\nu+1}.$$

Normieren wir die Basiselemente ϱ_i und $\eta_{\mu\nu}$, d. h. wählen wir $\varrho_i = \varrho_{i0} \equiv 1 \text{ mod } \frac{f}{p_i}$ und $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu 0} \equiv 1 \text{ mod } \frac{f}{l^{\nu+1}}$ und bezeichnen wir $\varrho_i^{o^k}$ durch ϱ_{ik} und $\eta_{\mu\nu}^{o^\lambda}$ durch $\eta_{\mu\nu\lambda}$, so bilden sämtliche²⁵⁾ ϱ_{ik} und $\eta_{\mu\nu\lambda}$ eine unabhängige Basis für die Gruppe H_l , die die Faktorgruppe aus der Gruppe aller zu f teilerfremden Zahlen aus C und der Gruppe der l -ten Potenzreste $\text{mod } f$ bedeuten möge. Es ist also jede Zahl α aus C :

$$\alpha \equiv \prod_{(l)} \varrho_{ik}^{a_{ik}} \prod \eta_{\mu\nu\lambda}^{b_{\mu\nu\lambda}} \text{ mod } f.$$

H_l ist eine Abelsche Gruppe vom Typus $(l, l, \dots, l)$, und jede Untergruppe vom Index l , also auch die gesuchte Gruppe H , erhält man durch eine Linearkongruenz:

$$L = L(\alpha) = \sum A_{ik} a_{ik} + \sum B_{\mu\nu\lambda} b_{\mu\nu\lambda} \equiv 0 \text{ mod } l.$$

Die Forderung $H'' = H$ besagt, daß die H definierende Linearkongruenz so beschaffen sein muß, daß jedesmal, wenn $L(\alpha) \equiv 0 \text{ mod } l$, auch $L(\alpha'') \equiv 0 \text{ mod } l$ sein muß. Nach den vorherigen Bezeichnungen ist nun:

$$\begin{aligned} L(\alpha'') &= \sum A_{i0} p_i a_{i, g_i-1} + \sum A_{i, k+1} a_{ik} \\ &+ \sum B_{\mu, \nu, \lambda+1} b_{\mu\nu\lambda} + \sum B_{\mu, \nu 0} b_{\mu, \nu, g-1} c_{\mu\nu} (k \neq g_i-1, \lambda \neq g-1), \end{aligned}$$

²⁴⁾ Wir bewegen uns zwar in einem Körper der Charakteristik l , aber da der Grad n der Gruppe zu l teilerfremd ist, gelten diese Sätze auch in unserem Fall.

²⁵⁾ Im folgenden durchlaufen die Indizes stets die Werte:

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, r; & k &= 0, 1, \dots, g-1; & \mu &= 1, 2, \dots, f; \\ \nu &= 1, 2, \dots, v; & \lambda &= 0, 1, \dots, g-1. \end{aligned}$$

und das soll ebenfalls $\equiv 0 \pmod l$ sein. Letzte Forderung ergibt Bedingungen für die Koeffizienten A_{ik} , $B_{\mu\nu\lambda}$, die wir der besseren Übersicht wegen durch vorherige Transformation von L folgendermaßen ableiten wollen:

Wir setzen z. B. $A_{10} = 1$ ²⁶⁾ und substituieren $\bar{a}_{10} = L$, sonst $\bar{a}_{ik} = a_{ik}$ und $\bar{b}_{\mu\nu\lambda} = b_{\mu\nu\lambda}$, d. h. in der neuen Linearkongruenz, sie sei durch $\bar{L}(\alpha) \equiv 0$ bezeichnet, sind alle Koeffizienten mit Ausnahme des ersten gleich 0²⁷⁾. Dann und nur dann ist neben $\bar{L}(\alpha)$ auch $\bar{L}(\alpha') \equiv 0 \pmod l$, wenn in $\bar{L}(\alpha')$ ebenfalls alle Koeffizienten mit Ausnahme desjenigen von $\bar{a}_{10}$ gleich 0 sind. Diese $g_1 + g_2 + \dots + g_x + ng - 1 = k$ Forderungen liefern k Gleichungen für k Unbekannte A_{ik} , $B_{\mu\nu\lambda}$ ($A_{10} = 1$ bekannt). Wendet man obige Transformation auf $L(\alpha')$ an, und setzt man alle Koeffizienten mit Ausnahme desjenigen von $\bar{a}_{10}$ gleich 0, so erhält man, $A_{11} = A$ gesetzt, folgende Kongruenzen:

$$1. A_{ik} \equiv A^k A_{i0} \pmod l,$$

$$2. B_{\mu\nu\lambda} \equiv A^\lambda B_{\mu\nu 0} \pmod l,$$

$$3. p_i \equiv A^{g_i} \pmod l, \text{ also } A^t \equiv 1 \pmod l, \quad 4. B_{\mu\nu 0} c_{\mu\nu} \equiv A^g B_{\mu\nu 0} \pmod l.$$

Was bedeutet nun die Bedingung $\mathfrak{C}^{\alpha'} \neq \mathfrak{C}$? Da $A_{10} \neq 0$ ist, liegt die Klasse „ ϱ_{10} “ sicher nicht in H , da sonst alle ϱ_{1k} wegen $H^\sigma = H$ in H liegen müßten, und p_1 dem Modul verloren ginge. Also ist etwa $\mathfrak{C} = \varrho_{10}H$. Ist $\mathfrak{C}^{\alpha'} = \mathfrak{C}$, d. h. $\varrho_{10}H = \varrho_{1x}H$, so bedeutet dieses, daß $\varrho_{10} \varrho_{1x}^{-1}$ in H liegt, und daß das Koeffizientensystem dieser Zahl $L \equiv 0 \pmod l$ erfüllt. Letzteres bedeutet $A^x \equiv 1 \pmod l$. Soll also stets $\mathfrak{C}^{\alpha'} \neq \mathfrak{C}$ für jedes $x < t$ sein, so genügt es zu fordern, daß erst $A^t \equiv 1 \pmod l$ ist, d. h.

$$5. t = \text{Exponent von } A \pmod l.$$

Daß die Bedingungen 1 bis 5 auch hinreichend sind für das Erfülltsein von $H^\sigma = H$ und $\mathfrak{C}^{\alpha'} \neq \mathfrak{C}$, ist leicht zu erkennen, da dann

$$L(\alpha') \equiv A L(\alpha) \pmod l$$

wird.

Die Forderungen 1, 2, 3, 5 lassen sich immer durch geeignete Wahl von A und der A_{ik} , $B_{\mu\nu\lambda}$ erfüllen, während die Forderungen 4 dann und nur dann zu erfüllen sind, wenn die $c_{\mu\nu}$ ebenso wie A^g von der Ordnung $ef = n \pmod l$ sind. Dabei ist für die Existenz der Idealgruppe mit $\mathfrak{f}$ als Führer (bei dem 1 nicht etwa in einer niedrigeren als der $(v+1)$ -ten Potenz aufgeht) nur wichtig, daß es mindestens ein $B_{\mu\nu 0}$ gibt, welches ungleich 0 gewählt werden kann, d. h. es muß mindestens

²⁶⁾ Wir können dies tun, da $A_{10} \neq 0$ angenommen werden muß, soll p_1 in $\mathfrak{f}$ aufgehen. Geht kein $p \neq l$ in $\mathfrak{f}$ auf, so gibt es eine sinngemäße andere Transformation, die dasselbe leistet.

²⁷⁾ Geht kein $p \neq l$ in $\mathfrak{f}$ auf, so muß man ein $B_{\mu\nu 0} \neq 0$ annehmen, und die Betrachtung geht dann entsprechend weiter, ohne das Resultat zu ändern.

ein $c_{\mu v}$ die Ordnung $n \bmod l$ haben. Daß dies für $(v, e) = 1$ und nur für diesen Fall immer eintritt, wollen wir jetzt zeigen, so daß die Forderung 4 durch die Bedingung $(v, e) = 1$ ersetzt werden kann und demnach keine neue (in der Tabelle noch nicht erwähnte) Einschränkung liefert.

Die erzeugende Matrix S der Matrizendarstellung, die wir oben erwähnten, ist für die neue transformierte Basis eine Diagonalmatrix, die die $c_{\mu v}$ in der Diagonale zu stehen hat. Da $S^n = 1$ ist, sind alle $c_{\mu v}^n \equiv 1 \bmod l$. Zerlegen wir S je nach dem Einseinheitsgrad der $\eta_{\mu v}$ in v Bestandteile $S_1, S_2, \dots, S_v$ je vom f -ten Grade, so können wir zunächst zeigen, daß für $(v, e) = 1$ erst $S_v^n = 1$ wird, während für $(v, e) > 1$ schon eine frühere Potenz von S_v gleich 1 wird²⁸⁾. Ist nämlich $S_v^{n'} = 1$ für einen echten Teiler n' von n , so heißt dieses, daß $s^{n'}$ den identischen Automorphismus in der Untergruppe der Restklassen $\bmod l^{v+1}$ erzeugt, die durch die $\eta_{\mu v}$ gegeben wird. Die $\eta_{\mu v}$ lassen sich also dann schon sämtlich in dem bei $s^{n'}$ invarianten Unterkörper von C repräsentieren, was dann und nur dann der Fall ist, wenn l^v in einem echten Teilkörper von C liegt. Letzteres tritt aber seinerseits dann und nur dann ein, wenn $(v, e) > 1$ ist. Für $(v, e) > 1$ ist also S von kleinerer Ordnung als n . Erst recht sind dann alle $c_{\mu v} \bmod l$ von kleinerer Ordnung als n . Forderung 4 ist also für $(v, e) > 1$ nur durch $B_{uv0} = 0$ zu erfüllen, d. h. l^{v+1} mit $(v, e) > 1$ kann niemals den genauen Beitrag von l zu f ausmachen. Dagegen wissen wir für $(v, e) = 1$, daß S_v von der Ordnung n ist. Freilich ist der Schluß hieraus, daß ein $c_{\mu v}$ existiert, dessen Exponent $\bmod l$ genau n ist, nicht ohne weiteres gestattet. Die Ordnung von S_v ist nämlich das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der $c_{\mu v}$. Für den Fall aber, daß n eine Primzahlpotenz ist, ist jener Schluß erlaubt und damit der Fall vollständig erledigt. Den Fall des allgemeinen n wollen wir auf diesen Spezialfall zurückführen.

Es durchlaufe q alle Primteiler des Grades t von C , also $t = \prod q^z$. Wir denken uns nun C aus den zyklischen Körpern k_q vom Primzahlpotenzgrade komponiert. e_q, f_q, n_q seien die in e, f, n steckenden Potenzen von q . Bedeutet l_q den zu l gehörigen Primteiler von l in k_q , so haben e_q, f_q, n_q die entsprechende Bedeutung für l_q wie e, f, n für l . Es sei endlich:

$$\frac{1}{n} = \sum \frac{r_q}{n_q}$$

die Zerlegung von $1/n$ in Brüche mit Primzahlpotenznenner und

$$s_q = s^{\frac{n}{n_q} r_q} \text{ mit } s = \prod s_q.$$

Dieses s_q hat für l_q die entsprechende Bedeutung wie s für l .

²⁸⁾ Dafür, daß l^{v+1} in f aufgeht, ist nur S_v ausschlaggebend.

Entsprechend der Komponentenzerlegung $f = \prod f_q$ wird der Restklassenkörper mod l direktes Produkt der Restklassenkörper mod l_q . Insbesondere kann man eine Basis w_i des ersteren durch Bildung aller Produkte aus Elementen von Basen w_{i_q} der letzteren herstellen:

$$w_i = \prod_q w_{i_q, q}.$$

Ferner kann man ein Primelement λ für l durch Multiplikation geeigneter Potenzen von Primelementen λ_q für die l_q herstellen:

$$\lambda = \prod_q \lambda_q^{\frac{f}{f_q} r_q}.$$

Bildet man nun die obige Darstellung mit diesen speziellen w_i und λ und beachtet dabei, daß s_q alle übrigen Komponenten elementweise invariant läßt, so ergibt sich:

$$c_{i_v} w_i \lambda^v \equiv w_i^s \lambda^{v^s} = \prod w_{i_q, q}^s \lambda_q^{\frac{f}{f_q} r_q v^s} \equiv \prod c_{i_q, v_q, q} w_{i_q, q} \lambda_q^{\frac{f}{f_q} r_q} \pmod{l^{v+1}}.$$

Hieraus folgt, daß die gesuchte Darstellungsmatrix (c_{uv}) sich als Kroneckersches Produkt von entsprechenden Darstellungsmatrizen $(c_{u_q, v_q, q})$ für die einzelnen Komponenten darstellt, allerdings jeweils mit einem besonderen Wert $v_q = \frac{f}{f_q} r_q v$ an Stelle von v . Dies v_q ist aber jedenfalls prim zu e_q .

Bei dieser Basiswahl ergeben sich die c_{uv} durch Bildung aller Produkte aus den $c_{u_q, v_q, q}$. Bei den einzelnen Faktoren des Kroneckerschen Produktes existieren, da sie von Primzahlpotenzordnungen sind, sicher Elemente der Ordnung n_q . Dasjenige c_{uv} , welches das Produkt von $c_{u_q, v_q, q}$ mit der jeweiligen Ordnung n_q ist, hat dann die Ordnung n .

Die Forderungen 4 sind also dann und nur dann durch von Null verschiedene Zahlen zu erfüllen, wenn $(v, e) = 1$ ist.

Wir wollen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehen, Idealgruppen H zu konstruieren, die [I.] erfüllen und f als Führer haben. f habe die oben als notwendig erkannte Gestalt. Sind $r_1, r_2, \dots, r_d$ diejenigen Basiselemente der absoluten Idealklassengruppe in C , deren Ordnungen Potenzen von l sind, so ist jedes Ideal α aus C :

$$\alpha \sim_{(l)} \prod r_m^c \prod e_{ik}^a \prod \eta_{\mu\nu\lambda}^{b_{\mu\nu\lambda}} (H_0)^{29}.$$

Die Linearkongruenz:

$$L = \sum C_m c_m + \sum A_{ik} a_{ik} + \sum B_{\mu\nu\lambda} b_{\mu\nu\lambda} \equiv 0 \pmod{l},$$

die H definiert, muß so beschaffen sein, daß H [I.] erfüllt. Da es uns nicht auf die Existenz einer Idealgruppe H mit gewissen Eigenschaften

²⁹⁾ H_0 bedeutet den Strahl mod f .

allein ankommt, sondern in erster Linie auf die Forderung, daß der Führer von H eine bestimmte Form hat, und diese Forderung allein in den A_{ik} , $B_{\mu\nu}$ ihren Ausdruck finden, scheint es gerechtfertigt und bedeutet keine Einschränkung, wenn wir alle $C_m = 0$ annehmen, was sicher zulässig ist. Wie die Linearkongruenz für die Zahlgruppe H dann aussehen muß, haben wir in den Forderungen 1—5 niedergelegt. Wir haben jetzt beim Übergang von der Zahlgruppe H zur Idealgruppe H einzig und allein darauf zu achten, daß die Einheiten bzw. die l -ten Idealpotenzahlen ε_i sämtlich in der Zahlgruppe H liegen. Um dieses zu erreichen, vergrößern wir den Modul $\mathfrak{f}$ um das Produkt der Primzahlen $\bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_u$. Von den $\bar{p}_i$ setzen wir zunächst nur voraus, daß sie in C voll zerfallen, $\bar{p}_i = \bar{p}_i^{1+\alpha} + \dots + \bar{p}_i^{t-1}$ und sämtlich $\equiv 1 \pmod{l}$ sind. Ihre Anzahl u sowie ihre übrigen Eigenschaften werden sich im Laufe der Betrachtung ergeben. Sind $\tau_{\alpha\beta}$ die nach obiger Methode bei den p_i konstruierte Basis für $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \dots \bar{p}_u$, und ist in anderer Bezeichnungsart:

$$\alpha \equiv \prod_{(i)} \varrho_i^{f_i(\alpha)} \prod \eta_{\mu\nu}^{g_{\mu\nu}(\alpha)} \prod \tau_{\alpha}^{h_{\alpha}(\alpha)} \pmod{\mathfrak{f} \cdot \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \dots \bar{p}_u}$$

so ist:

$$L(\alpha) = \sum A_i f_i(A) + \sum B_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(A) + \sum C_{\alpha} h_{\alpha}(A) \equiv 0 \pmod{l}.$$

Unsere Forderung, daß alle ε_i in H liegen müssen, bedeutet: Es muß $L(\varepsilon_i) \equiv 0 \pmod{l}$ sein. Dieses ist durch geeignete Wahl der C_i und $\bar{p}_i$ zu erreichen; wir müssen nur zum Beweise etwas weiter ausholen ³⁰⁾.

Die Faktorgruppe aus der Gruppe aller ε_i nach der Gruppe der l -ten Zahlpotenzen (die ganze Betrachtung verläuft also im Körper $\mathbb{P}$ der Restklassen mod l als Exponentenbereich) sei mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Denkt man sich in $\mathfrak{E}$ die Multiplikation als „Addition“, die Potenzierung als „skalare Multiplikation“, die Anwendung von $1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{t-1}$ als „Operator-Multiplikation“, so wird $\mathfrak{E}$ zum Darstellungsmodul für den Gruppenring $\mathfrak{A}$ vom Range t der sämtlichen Polynome in $\mathbb{P}$:

$$f(\sigma) = a_0 + a_1 \sigma + \dots + a_{t-1} \sigma^{t-1}, \quad \sigma^t = 1.$$

$\mathfrak{A}$ ist bekanntlich isomorph zum Restklassenring nach dem Polynom $\sigma^t - 1$ im Bereich aller Polynome in $\mathbb{P}$, der eine direkte Summe ebensovieler Körper darstellt, als $\sigma^t - 1$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{P}$ zerfällt. Nun ist $\sigma^t - 1 = (\sigma - r)(\sigma - r^2) \dots (\sigma - r^t)$, wo r irgendeine Restklasse der Ordnung $t \pmod{l}$ bedeutet. Dementsprechend zerfällt $\mathfrak{A}$ in t direkte Summanden. Man erhält sie, indem man in bekannter Weise t Polynome $1_1, 1_2, \dots, 1_t$ mit den Kongruenzeigenschaften

$$1_{\mu} \equiv 1 \pmod{(\sigma - r^{\mu})}, \quad 1_{\mu} \equiv 0 \pmod{(\sigma - r^{\nu})}, \quad \nu \neq \mu$$

³⁰⁾ Den folgenden Gedankengang verdanke ich Herrn Hasse.

bestimmt, für die dann gilt: $1_1 + 1_2 + \dots + 1_t \equiv 1 \pmod{(\sigma^t - 1)}$, die also die Zerlegung der Haupteinheit liefern, und dann

$$f(\sigma) 1_\mu \equiv f(r) 1_\mu \pmod{(\sigma^t - 1)}$$

beachtet, in der Form

$$f(\sigma) = f(r) 1_1 + \dots + f(r^t) 1_t.$$

Nach den Sätzen der Darstellungstheorie ist jede Zerlegung von $\mathfrak{A}$ mit der entsprechenden Zerlegung von $\mathfrak{E}$ verbunden. $\mathfrak{E}$ wird also direkte „Summe“ von Darstellungsmoduln $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_t$ und zwar derart, daß die Multiplikation von $\mathfrak{E}_\mu$ mit $f(\sigma)$ auf die „Multiplikation“ von $\mathfrak{E}_\mu$ mit der Komponente $f(r^\mu)$, also auf eine „skalare Multiplikation“, hinausläuft ($\mathfrak{E}_\mu = \mathfrak{E} 1_\mu$). Man kann daher eine Basis

$$\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1u_1}; \quad \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2u_2}; \quad \dots; \quad \varepsilon_{t1}, \dots, \varepsilon_{tu_t}$$

von $\mathfrak{E}$ derart finden, daß allgemein

$$\varepsilon_{\mu\nu}^{f(\sigma)} \equiv_{(l)} \varepsilon_{\mu\nu}^{f(r^\mu)}$$

gilt ($u_1 + u_2 + \dots + u_t = u$, der Rang von $\mathfrak{E}$). Es ist also

$$L(\varepsilon_{\mu\nu}^\sigma) \equiv r^\mu L(\varepsilon_{\mu\nu}),$$

während nach unserer Wahl von L gilt: $L(\varepsilon_{\mu\nu}^\sigma) \equiv r L(\varepsilon_{\mu\nu}) \pmod{l^{31}}$. Für $\mu \neq 1$ ist demnach $L(\varepsilon_{\mu\nu}) \equiv 0 \pmod{l}$. Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß die $\bar{p}_i$ (in der Anzahl $u = u_1$) so gewählt werden können, daß die Determinante $|f_{i\nu}(r)| \not\equiv 0 \pmod{l}$ ist, falls

$$\varepsilon_{1\nu} \equiv \prod \tau_i^{f_{i\nu}(\sigma)} \pmod{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_u}$$

ist. Wegen $\varepsilon_{1\nu}^\sigma \equiv_{(l)} \varepsilon_{1\nu}^r$ ist aber

$$\varepsilon_{1\nu}^t \equiv_{(l)} \varepsilon_{1\nu}^{1+r\sigma^{-1} + \dots + r^{t-1}\sigma^{-(t-1)}} \equiv \tau_i^{f_{i\nu}(r)} \pmod{\bar{p}_i}.$$

Die $\varepsilon_{1\nu}^t$ sind wegen $(t, l) = 1$ sicher l -unabhängig, daher kann die Bestimmung der $\bar{p}_i$ etwa mit $f_{i\nu}(r) \begin{cases} \not\equiv 0 \pmod{l} & \text{für } i = \nu \\ \equiv 0 \pmod{l} & \text{für } i \neq \nu \end{cases}$ nach bekannten Prinzipien erfolgen.

Die Forderung $\bar{p}_i \equiv 1 \pmod{l}$ bedeutet nur, daß $\bar{p}_i$ im Körper $T = R(\zeta)$ der l -ten Einheitswurzeln voll zerfällt, was sicher zu erreichen ist, da die $\varepsilon_{1\nu}^t$ auch in $C(\zeta)$ l -unabhängig sind [der Grad von $C(\zeta)$ über C ist prim zu l].

Unsere vorherige Betrachtung gilt allgemein, nur nicht in dem Falle, daß C die l -ten Einheitswurzeln, also $C = R(\zeta)$ ist, und $v = l$ ist. Nach Herrn Hensel (S. 227/28) ist dann die obige Basis der η nicht mehr verwendbar. Da wir in $C = R(\zeta)$ eine für unsere Zwecke einfachere Basis

³¹⁾ Das obige A kann hier gleich r gewählt werden.

angeben können, wollen wir diesen Körper noch besonders behandeln. Wir werden speziell sehen, daß hier für $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{v+1}$ und reguläre Kreiskörper die Erweiterung des Moduls $\mathfrak{f}$ durch das Produkt $\bar{p}_i$ nicht erforderlich ist.

In $C = T = R(\zeta)$, den wir jetzt zugrundelegen wollen, ist $l = \mathfrak{l}^{v-1}$. Nach Herrn Takagi³²⁾ bilden folgende l Zahlen eine Basis nach der Gruppe „ $H_1 \equiv \alpha^l \bmod \mathfrak{l}^{v+1}$ “:

$$\kappa_i = (1 - \lambda^i)^{-\frac{\mathfrak{l}^l - 1 - 1}{\sigma - y^2} y}; \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Dabei ist $\lambda = 1 - \zeta$ und y eine Primitivzahl mod l . Diese Basis ist deshalb sehr vorteilhaft, weil man in ihr die Änderung der Restklassen bei Anwendung von σ leicht beherrscht. Es gilt nämlich:

$$\kappa_i^\sigma \equiv \kappa_i^{y^l} \bmod \mathfrak{l}^{v+1}.$$

Ist nun $\mathfrak{l}^{v+1}$ der genaue Beitrag zu $\mathfrak{f}$, so bilden $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$ (wenn sie $\equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{l}^{v+1}}$ normiert worden sind) zusammen mit den ϱ_{ik} eine Basis mod $\mathfrak{f}$. Die Forderung 4 S. 154 lautet für diese spezielle Basis ($f = 1$): $B_{v0} y^v \equiv AB_{v0} \bmod l$.

Wegen $(v, l-1) = 1$ kann bei geeigneter Wahl von y erreicht werden, daß diese Gleichung mit $B_{v0} \neq 0$ besteht, indem sonst $B_{i0} = 0$, für $i \neq v$, gesetzt wird. Wie oben ist die Bedingung $\mathfrak{C}^{\alpha^x} \neq \mathfrak{C}$ durch die Forderung $t = \text{Exponent von } A \bmod l$ gesichert. In der Tat wird $A \equiv y^v$, und y^v hat den Exponenten $t \bmod l$ wegen $(v, l-1) = 1$. Das Problem der Einheiten und der l -ten Idealpotenzzahlen ist allgemein ebenfalls wie oben zu lösen.

Nehmen wir speziell an, daß $C = R(\zeta)$ und $\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^{v+1}$ ist, so liegen die Einheiten (für reguläre C brauchen wir nur diese zu berücksichtigen) bei dieser Wahl von $L = B_v y_v \equiv 0 \bmod l$ von selbst in H ; denn ist ε eine Einheit, so ist nach Herrn Takagi $\varepsilon \equiv \underset{(l)}{\kappa_i^{e_i}} \dots \kappa_v^{e_v} \bmod \mathfrak{l}^{v+1}$, wo alle e_i mit $i = 3, 5, 7, \dots$ gleich 0 sind³³⁾. v kann aber nur ungerade Werte annehmen, da $(v, l-1) = 1$ sein muß. Bei irregulären Kreiskörpern kommt noch eine Bedingung bezüglich der l -ten Idealpotenzzahlen ω_i hinzu. Ist nämlich $\omega_i \equiv \prod \kappa_j^{a_{ij}} \bmod \mathfrak{l}^{v+1}$, so müssen, wenn alle ω_i in H liegen sollen, alle $a_{iv} = 0$ sein.

³²⁾ T. Takagi, Zur Theorie des Kreiskörpers, Crelles Journal **157** (1917), S. 231.

³³⁾ Takagi, Zur Theorie des Kreiskörpers, Crelles Journal **157** (1917), S. 233.

Resultat: Über jedem absolut-zyklischen Körper C vom Grade t lassen sich stets Klassenkörper N vom Primzahlrelativgrad l bilden, die eine lineare Gruppe zur Galoischen Gruppe besitzen. Die N in C zugeordnete Idealklasse H habe den Führer $\mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}$ hat dann notwendig folgende Gestalt:

$$\mathfrak{f} = p_1 p_2 \dots p_x l^{(1 + \alpha + \dots + \alpha^{g-1})(v+1)},$$

mit den Bedingungen:

1. p_i ist $\neq l$ und geht in der Diskriminante von C nicht auf.
2. Der Grad f_i der Primteiler p_i von p_i in C ist die Ordnung von $p_i \bmod l$.
3. $(v, e) = 1$, falls e die Ordnung von l bezeichnet.

Im übrigen ist aber der Führer im wesentlichen (er muß höchstens eventuell um das Produkt von Hilfsprimidealen erweitert werden, für die unendlich viele Möglichkeiten zur Verfügung stehen) beliebig wählbar.

Jede in der Tabelle als möglich genannte Zerlegungsart existiert wirklich bei jedem beliebig vorgegebenen Körper C . Die in der Tabelle genannten Einschränkungen sind also die einzigen.

Der Perronsche Integralbegriff.

Von

J. Ridder in Groningen.

Zwei vor kurzem erschienene Arbeiten von J. C. Burkill und von mir¹⁾ enthalten Verallgemeinerungen der Perronschen Integraldefinition. Das Ziel der folgenden Seiten ist es, zu zeigen, wie man durch Kombination von in den zitierten Arbeiten angewandten Methoden eine Integraldefinition (Def. 7*) erhalten kann, welche eine der von mir gegebenen Abänderungen der Perronschen Definition, die genau ebenso weit führt wie die allgemeine Denjoysche, als Spezialfall enthält (siehe unten Satz IX). Es wird sich zeigen, daß der neue Integralbegriff die gewöhnlichen elementaren Eigenschaften der Integrale besitzt.

Die Ober- und Unterfunktionen.

1. Definition 1. Die *untere approximative Derivierte* $\underline{AD}f(x)$ einer meßbaren Funktion $f(x)$ im Punkte x ist gleich der oberen Schranke derjenigen Zahlen a , für die die Menge der ξ -Werte mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq a$$

die (untere) Dichte 1 hat in x .

Definition 2. Die *obere approximative Derivierte* $\overline{AD}f(x)$ einer meßbaren Funktion $f(x)$ in x ist gleich der unteren Schranke derjenigen Zahlen b , für die die Menge der ξ -Werte mit

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq b$$

die Dichte 1 hat in x .

Lemma A. Im Intervall $(a \leq x \leq b)$ sei $f(x)$ *approximativ stetig* und ihre untere approximative Derivierte ≥ 0 , ausgenommen vielleicht in

¹⁾ Siehe Math. Zeitschr. 34 (1931): Ridder, S. 234–269; Burkill, S. 270–278.
Mathematische Zeitschrift. 37.

den Punkten einer abzählbaren Menge E . Dann wird $f(x)$ (monoton) nicht-abnehmend sein für $a \leq x \leq b$ ²⁾.

Beweis. Es sei ε willkürlich positiv und $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k + \dots$, wobei auch die Glieder dieser Reihe positiv sein sollen; weiter wähle man eine Zahl n zwischen 0 und 1. Wenn $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ die Punkte der abzählbaren Menge E sind, so läßt sich zu jedem x_k ein Intervall (x_k, ξ_k) angeben, derartig, daß die Menge der Punkte x' , für die gleichzeitig

$$f(x') - f(x_k) \geq -\varepsilon_k \quad \text{und} \quad x_k < x' \leq \xi_k$$

ist, den Punkt ξ_k enthält und ein Maß hat $\geq n(\xi_k - x_k)$.

Zu jedem Punkte x des abgeschlossenen Intervalls, der nicht zu E gehört, läßt sich ein Intervall (x, ξ) finden, derartig, daß die Menge der Punkte x' , für die gleichzeitig

$$f(x') - f(x) \geq -\varepsilon(x' - x) \quad \text{und} \quad x < x' \leq \xi$$

ist, den Punkt ξ enthält und ein Maß hat $\geq n(\xi - x)$.

Zu jedem Punkt des abgeschlossenen Intervalls (a, b) , b ausgenommen, gehört mithin ein Intervall, das einer der beiden oben genannten Bedingungen genügt. Mit Hilfe dieser Intervalle läßt sich nun eine Lebesguesche Kette³⁾ konstruieren, welche bei a anfängt und b erreicht. Es wird darum

$$f(b) - f(a) \geq -\varepsilon(b - a) - \varepsilon$$

sein müssen. Da ε willkürlich ist, folgt daraus

$$f(b) \geq f(a).$$

Der Beweis gilt ungeändert für jedes Intervall (c, d) , deren Endpunkte den Ungleichungen

$$a < c < d \leq b$$

genügen. Also ist $f(x)$ in $(a \leq x \leq b)$ nicht abnehmend⁴⁾.

Lemma B. Wenn sich das abgeschlossene Intervall (a, b) , ausgenommen in den Punkten einer (eventuell leeren) abzählbaren Menge überdecken läßt von abzählbar vielen Mengen (E_i) , so hat jede in (a, b) enthaltene perfekte Menge K ein Stück, auf dem eine der Mengen (E_i) überall dicht liegt⁵⁾.

2. Definition 3. $f(x)$ sei definiert in (a, b) . Dann wird $\varphi(x)$ eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte Oberfunktion sein, wenn sie approxi-

²⁾ Vgl. Burkill, l. c. ¹⁾, S. 272.

³⁾ Siehe Hobson, Theory of functions I, § 78, 79.

⁴⁾ Wie Burkill, l. c. ¹⁾, S. 273 bemerkt, muß $f(x)$ nun stetig sein für $a \leq x \leq b$.

⁵⁾ Siehe Ridder, l. c. ¹⁾, S. 246.

mativ stetig ist für $a \leq x \leq b$ und daneben den Bedingungen genügt: α) $\psi(a) = 0$; β) es läßt sich (a, b) , ausgenommen in den Punkten einer (eventuell leeren) abzählbaren Menge M , überdecken von abzählbar vielen, perfekten Mengen (E_j) , derartig, daß 1. jede Funktion $\psi_j(x)$, welche in den Punkten der zugehörigen Menge E_j und in a und b mit $\psi(x)$ zusammenfällt und sich in den zu E_j komplementären Intervallen von (a, b) linear ändert, approximativ stetig ist in $(a \leq x \leq b)$ und in den Punkten von E_j , mit Ausnahme einer (eventuell leeren) abzählbaren Teilmenge M_j , gleichzeitig

$$\underline{AD} \psi_j(x) \neq -\infty \quad \text{und} \quad \geq f(x)$$

ist; 2. zu jeder perfekten Teilmenge H_j von E_j eine Funktion $\psi_{H_j}(x)$ gehört, welche in bezug auf H_j den gleichen Bedingungen genügt, wie $\psi_j(x)$ in bezug auf E_j .

Definition 4. $\varphi(x)$ wird eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte Unterfunktion sein, wenn sie approximativ stetig ist für $a \leq x \leq b$ und daneben den Bedingungen genügt: α) $\varphi(a) = 0$; β) es läßt sich (a, b) , ausgenommen in den Punkten einer (eventuell leeren) abzählbaren Menge M , überdecken von abzählbar vielen, perfekten Mengen (E_j) , derartig, daß 1. jede Funktion $\varphi_j(x)$, welche in den Punkten der zugehörigen Menge E_j und in a und b mit $\varphi(x)$ zusammenfällt und sich in den zu E_j komplementären Intervallen von (a, b) linear ändert, approximativ stetig ist in $(a \leq x \leq b)$ und in den Punkten von E_j , mit Ausnahme einer (eventuell leeren) abzählbaren Teilmenge M_j , gleichzeitig

$$\overline{AD} \varphi_j(x) \neq +\infty \quad \text{und} \quad \leq f(x)$$

ist; 2. zu jeder perfekten Teilmenge H_j von E_j eine Funktion $\varphi_{H_j}(x)$ gehört, welche in bezug auf H_j den gleichen Bedingungen genügt wie $\varphi_j(x)$ in bezug auf E_j .

Satz I. Die Differenz einer jeden Oberfunktion $\psi(x)$ und einer jeden Unterfunktion $\varphi(x)$, adjungiert zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, ist eine nicht-abnehmende Funktion.

Beweis. Nach dem Lemma B enthält (a, b) eine nirgends dichte, abgeschlossene Menge D_1 mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt ξ der in bezug auf (a, b) komplementären Menge $C(D_1)$ eine Umgebung $\mathcal{U}(\xi)$ hat, in der eine der zu $\psi(x)$ gehörenden Mengen (E_j) (siehe Def. 3) und eine der übereinstimmenden, zu $\varphi(x)$ gehörenden Mengen (siehe Def. 4) überall dicht liegen.

Nach Lemma A wird $\omega(x) \equiv \psi(x) - \varphi(x)$ nicht-abnehmend sein in $\mathcal{U}(\xi)$. Aus der approximativen Stetigkeit folgt jene Eigenschaft auch für jedes zu D_1 komplementäre, abgeschlossene Intervall von (a, b) .

D_1 besteht aus dem perfekten Kern K_1 und einem abzählbaren (in jedem Lückenintervall von K_1 reduziblen) Rest R_1 ⁶⁾. Für ein zu K_1 komplementäres Intervall (a_k, b_k) , das Punkte von R_1 enthält, ist $\omega(x)$ nicht-abnehmend in einem jeden abgeschlossenen Teilintervall U , das keine inneren Punkte von R_1 enthält, dann auch in jedem Lückenintervall der ersten Ableitung von R_1 und, sukzessive so weitergehend, in jedem Lückenintervall irgendeiner höheren Ableitung von R_1 , also schließlich nach abzählbar vielen Operationen im abgeschlossenen Intervall (a_k, b_k) . $\omega(x)$ ist nicht-abnehmend für jedes zu K_1 komplementäre, abgeschlossene Intervall von (a, b) .

K_1 enthält (Lemma B) eine auf K_1 nirgends dichte abgeschlossene Menge D_2 mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punkt ξ von $K_1 - D_2$ ein Stück $S(\xi)$ von K_1 existiert, dessen Endpunkte α und β ein ξ im Innern enthaltendes Intervall (α, β) bilden und auf dem eine der perfekten Mengen (E_j) aus Def. 3 und eine der übereinstimmenden Mengen aus Def. 4 überall dicht liegen. Die Funktionen $\psi_1^*(x)$ und $\varphi_1^*(x)$, welche in den Punkten von $S(\xi)$ und in α und β mit $\psi(x)$ bzw. $\varphi(x)$ zusammenfallen und sich in den zu $S(\xi)$ komplementären Intervallen von (α, β) linear ändern, sind approximativ stetig in (α, β) und haben in den Punkten von $S(\xi)$, vielleicht mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, eine untere approximative Derivierte $\neq -\infty$ und $\geq f(x)$ bzw. eine obere approximative Derivierte $\neq +\infty$ und $\leq f(x)$.

Da die Variation von $\psi_1^*(x)$ in jedem komplementären Intervall von $S(\xi)$ nicht kleiner ist als diejenige von $\varphi_1^*(x)$, so ist auf der in bezug auf (α, β) komplementären Menge $C(S)$ ebenfalls:

$$(1) \quad \underline{AD} \psi_1^*(x) \neq -\infty, \quad \overline{AD} \varphi_1^*(x) \neq +\infty$$

und

$$(2) \quad \underline{AD} \psi_1^*(x) \geq \overline{AD} \varphi_1^*(x).$$

Nach Lemma A wird die Differenz $\omega_1^*(x) \equiv \psi_1^*(x) - \varphi_1^*(x)$ nicht-abnehmend sein in (α, β) ; auch $\omega(x)$, welche auf $S(\xi)$ mit $\omega_1^*(x)$ zusammenfällt, ist nicht-abnehmend in (α, β) und dadurch weiter auch in jedem zu D_2 komplementären, abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) .

D_2 besteht wieder aus einem perfekten Kern K_2 und einem abzählbaren Rest R_2 . Wie soeben sieht man, daß K_2 eine auf K_2 nirgends dichte, abgeschlossene Menge D_3 enthält, in deren in (a, b) liegenden komplementären, abgeschlossenen Intervallen $\omega(x)$ nirgends abnimmt. So fortfahrend muß es eine Zahl β der ersten oder zweiten Zahlenklasse

⁶⁾ Siehe Hobson, l. c. ³⁾, § 81.

geben, für die K_β leer ist⁷⁾. Somit ist $\omega(x)$ auch nicht-abnehmend in (a, b) .

3. Definition 5. $f(x)$ sei eine in (a, b) definierte Funktion. Dann wird eine für $a \leq x \leq b$ approximativ stetige Funktion $\psi^*(x)$ eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte, „verallgemeinerte“ Oberfunktion sein, wenn sie den gleichen Bedingungen α und β genügt wie $\psi(x)$ in Def. 3, mit dieser Abänderung, daß dabei für jedes j in den Punkten einer Teilmenge N_j von E_j vom Maße Null [in den Punkten von $N_j \cdot H_j$] die in β , 1. [in β , 2.] betrachtete untere approximative Derivierte der zugehörigen Funktion $\psi_j^*(x)$ [der zugehörigen $\psi_{H_j}^*(x)$] nicht $\geq f(x)$ zu sein braucht⁸⁾.

Definition 6. Ändert man die Definition 4 in analoger Weise ab wie Def. 3, so entsteht die Definition einer „verallgemeinerten“ Unterfunktion $\varphi^*(x)$.

Satz II. Die unteren Schranken aller $\psi(b)$ -Werte und aller $\psi^*(b)$ -Werte, wobei $\psi(x)$ und $\psi^*(x)$ in (a, b) zu $f(x)$ adjungiert sein sollen gemäß Def. 3 bzw. 5, sind einander gleich.

Beweis. Zu jedem j wähle man ein positives ε_j , derartig, daß bei willkürlich gewähltem positiven ε : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_j + \dots = \varepsilon$ sei. Es läßt sich dann eine für $a \leq x \leq b$ stetige und nicht-abnehmende Funktion $\chi_j(x)$ konstruieren mit $\chi_j(a) = 0$ und $\chi_j(b) < \varepsilon_j$, welche in den Punkten von N_j (siehe Def. 5) eine Ableitung $= +\infty$ hat⁹⁾. Die Funktion $\psi^*(x) + \sum_j \chi_j(x)$ wird dann eine Oberfunktion im Sinne der Def. 3 sein, welche um weniger als ε von $\psi^*(x)$ abweicht. Daraus folgt der Satz jedoch unmittelbar.

Wendet man Satz II auf die Funktion $-f(x)$ an, so erhält man

Satz III. Die oberen Schranken aller $\varphi(b)$ -Werte und aller $\varphi^*(b)$ -Werte, wobei $\varphi(x)$ und $\varphi^*(x)$ in (a, b) zu $f(x)$ adjungiert sein sollen gemäß Def. 4 bzw. 6, sind einander gleich.

Definition und Eigenschaften der S-Integrale.

4. Aus den Sätzen II und III geht hervor, daß die beiden folgenden Integraldefinitionen den gleichen Umfang haben.

Definition 7. $f(x)$ sei eine in (a, b) definierte Funktion, welche daselbst adjungierte Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ hat. Die untere Schranke

⁷⁾ Siehe Hobson, l. c. ³⁾, § 82.

⁸⁾ Man vergleiche Kamke, Das Lebesguesche Integral, Leipzig und Berlin 1925, S. 132.

⁹⁾ Vgl. z. B. Kamke, l. c. ⁸⁾, S. 133 oder Burkill, l. c. ¹⁾, S. 274.

aller ψ -Werte in einem willkürlichen Punkte x von (a, b) ist der Wert des unbestimmten oberen P -Integrals $\Psi(x)$ in diesem Punkte, während das unbestimmte untere P -Integral $\Phi(x)$ in x definiert wird gleich der oberen Schranke aller φ -Werte in x . Wenn in (a, b) $\Psi(x) = \Phi(x)$ ist, so definiert ihr gemeinsamer Wert das unbestimmte P -Integral $S(x)$ in (a, b) .

Definition 7*. Benutzt man in obiger Definition die adjungierten Funktionen $\varphi^*(x)$ und $\psi^*(x)$, so erhält man die Definitionen der unbestimmten unteren und oberen P -Integrale, $\Phi^*(x)$ bzw. $\Psi^*(x)$, und des unbestimmten P -Integrals $S^*(x)$.

5. Satz IV. Wenn $S(b)$ existiert [$= \Psi(b) = \Phi(b)$], so existiert $S(x)$ für jeden Punkt x von (a, b) ,

Dieser Satz folgt in einfacher Weise aus dem Satz I ebenso wie der Satz V. Wenn $S(x)$ in (a, b) existiert, so sind für willkürliche $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Differenzen $\psi(x) - S(x)$ und $S(x) - \varphi(x)$ in (a, b) nicht-abnehmende Funktionen.

Satz VI. Die Oberfunktionen $\psi(x)$, $\psi^*(x)$ und die Unterfunktionen $\varphi(x)$, $\varphi^*(x)$ haben fast überall endliche approximative Ableitungen.

Beweis. Es genügt, dies für die Funktionen $\psi^*(x)$ und $\varphi^*(x)$ zu beweisen.

Die Funktionen $\psi_j^*(x)$ und $\varphi_j^*(x)$, welche in den Def. 5 und 6 eingeführt wurden, sind approximativ stetig, also auch meßbar in (a, b) ¹⁰. Nach einem Satz von Denjoy-Khintchine¹¹) hat jede in (a, b) meßbare Funktion in fast jedem Punkte ξ entweder eine endliche approximative Ableitung oder zwei untere Derivierte $= -\infty$ für die Punkte von Mengen, welche in ξ die obere linke bzw. obere rechte Dichte $+1$ haben, und zwei obere Derivierte $= +\infty$ für die Punkte von Mengen, welche ebenfalls in ξ obere linke bzw. obere rechte Dichten $= +1$ haben. Daraus und aus den Def. 5 und 6 geht hervor, daß die $\psi_j^*(x)$ und $\varphi_j^*(x)$ fast überall endliche approximative Ableitungen haben müssen; da die zugehörigen Mengen E_j bzw. $E_{j'}$ in fast jedem ihrer Punkte die Dichte 1 haben und die Funktionen $\psi_j^*(x)$ und $\psi^*(x)$ auf E_j , die Funktionen $\varphi_j^*(x)$ und $\varphi^*(x)$ auf $E_{j'}$ zusammenfallen, so werden auch $\psi^*(x)$ auf E_j und $\varphi^*(x)$ auf $E_{j'}$ fast überall endliche approximative Ableitungen haben. Daraus folgt der Satz unmittelbar.

Satz VII. Das unbestimmte Integral $S(x)$ einer Funktion $f(x)$ besitzt fast überall eine approximative Ableitung $= f(x)$.

¹⁰) Siehe z. B. Stepanoff, Rec. Soc. Math. de Moscou 31 (1922—1924), S. 487, oder Ridder, Math. Ann. 103 (1930), S. 709.

¹¹) Siehe Denjoy, Ann. Éc. Norm. (3) 33 (1916), S. 181, 182, 208, 209 und Khintchine, Rec. Soc. Math. de Moscou 31 (1922—1924), S. 265—285 (russisch); Fund. Math. 9 (1927), S. 212, 213.

Beweis. Nach Satz VI hat die willkürlich gewählte Oberfunktion $\psi(x)$ fast überall eine endliche approximative Ableitung. $\psi(x) - S(x)$ ist, nach Satz V, nicht-abnehmend, hat also fast überall eine endliche Ableitung. Somit muß $S(x)$ fast überall eine endliche approximative Ableitung haben.

Man betrachte eine Folge von Oberfunktionen $\{\psi^{(k)}(x)\}$ und eine Folge von Unterfunktionen $\{\varphi^{(k)}(x)\}$, welche mit zunehmendem k (gleichmäßig) nach $S(x)$ konvergieren. In einem maßgleichen Kerne K von (a, b) haben $S(x)$, alle $\psi^{(k)}$ und alle $\varphi^{(k)}$ endliche approximative Ableitungen (Satz VI).

Bei positivem ε sei K_ε die Menge derjenigen Punkte von K , in denen die approximativen Ableitungen von $\psi^{(j)}$ und $\varphi^{(j)}$ eine Differenz $\geq \varepsilon$ haben. Das Maß dieser Menge wird mit zunehmendem j nach Null konvergieren. Sonst existierte eine positive Zahl δ , derartig, daß für unendlich viele Werte (j') $m[K_{j'}(\varepsilon)] \geq \delta$ wäre. Dies ist unmöglich. Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes¹²⁾ würde zeigen, daß für die nicht-abnehmenden Funktionen $\{\psi^{(j')} - \varphi^{(j')}\}$

$$\psi^{(j')}(b) - \varphi^{(j')}(b) \geq \delta \cdot \varepsilon$$

sein, während doch

$$\lim_{j'=\infty} \{\psi^{(j')}(b) - \varphi^{(j')}(b)\} = 0$$

ist. Die approximative Ableitung von $S(x)$ weicht somit fast überall in (a, b) um weniger als ε von $f(x)$ ab. Da ε willkürlich ist, wird $S'_{\text{appr.}}(x)$ fast überall in (a, b) gleich $f(x)$ sein¹³⁾.

Satz VIII. Wenn $f(x)$ für $a \leq x \leq b$ ein unbestimmtes Integral $S(x)$ hat, so wird $S(x)$ für jeden dieser x -Werte approximativ stetig sein.

Beweis. Denn $S(x)$ ist Grenzwert einer in (a, b) gleichmäßig konvergenten Folge $\{\psi^{(k)}(x)\}$. Daraus und aus der approximativen Stetigkeit der $\{\psi^{(k)}(x)\}$ schließt man leicht zu der approximativen Stetigkeit von $S(x)$.

Satz IX. Jede nach der allgemeinen Denjowschen Definition integrierbare Funktion wird auch S -integrierbar sein (d. h. integrierbar nach den Definitionen 7 und 7*) und die Integralwerte sind dann einander gleich¹⁴⁾.

¹²⁾ Siehe Carathéodory. Vorles. über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1927, § 288, Satz 1.

¹³⁾ Es zeigt sich nebenbei, daß für die S -Integrierbarkeit einer Funktion $f(x)$ notwendig ist, daß diese fast überall endlich und meßbar ist.

¹⁴⁾ Ein einfaches, von Burkill, l. c. 1), S. 271 konstruiertes Beispiel zeigt, daß es Funktionen gibt, welche S -integrierbar sind, ohne integrierbar zu sein. nach der allgemeinen Denjowschen Definition.

Beweis. Denn die Ober- und Unterfunktionen, benutzt in einer der von mir, l. c. ¹⁾, S. 235, gegebenen Abänderungen der Perronschen Definition, die ebenso weit führt wie die allgemeine Denjoysche Definition, fallen unter die hier in den Def. 5 und 6 eingeführten Klassen von Ober- und Unterfunktionen.

Weitere Eigenschaften des S -Integrals.

6. Satz X. Wenn $f(x)$ über (a, b) S -integrierbar ist, so wird das auch jede Funktion $g(x)$ sein, welche fast überall in (a, b) mit $f(x)$ zusammenfällt, und ihre Integrale haben dann denselben Wert ¹⁵⁾.

Satz XI. Wenn $f(x)$ über (a, b) S -integrierbar ist, so wird sie es auch sein über jedes Teilintervall von (a, b) . Liegt c zwischen a und b , so ist das S -Integral über (a, b) gleich der Summe der S -Integrale über (a, c) und über (c, b) ¹⁵⁾.

Satz XII. Wenn eines der beiden folgenden Integrale existiert, so gilt:

$$\int_{(S)a}^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_{(S)a}^b f(x) dx.$$

Hierbei ist c eine willkürliche endliche Konstante ¹⁵⁾.

Satz XIII. Wenn die Integrale der rechten Seite existieren, so gilt:

$$\int_{(S)a}^b \{f_1(x) \pm f_2(x)\} dx = \int_{(S)a}^b f_1(x) dx \pm \int_{(S)a}^b f_2(x) dx.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Summe zweier willkürlicher Oberfunktionen $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ von f_1 bzw. $\pm f_2$ und die Summe zweier willkürlicher Unterfunktionen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ von f_1 bzw. $\pm f_2$ Ober- bzw. Unterfunktion von $f_1 \pm f_2$ sind. Dies läßt sich zeigen dadurch, daß man eine jede perfekte Menge E_j , welche in der Definition von $\psi^{(1)}$ auftritt (siehe Def. 3), durchschneidet mit einer jeden derartigen Menge, welche nach ihrer Definition zu $\psi^{(2)}$ gehört, und die (abgeschlossene) Durchschnittsmenge zerlegt in ihren perfekten Kern und einen abzählbaren Rest; während man dasselbe tut mit den perfekten Mengen (E_j) , zu $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ gehörend (siehe Def. 4).

Satz XIV. Wenn $f_1(x) \leq f_2(x)$ ist in jedem Punkt x von (a, b) und die Funktionen S -integrierbar sind über (a, b) , so wird auch

$$\int_{(S)a}^b f_1(x) dx \leq \int_{(S)a}^b f_2(x) dx$$

sein ¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Für den Beweis vgl. Kamke, l. c. ⁸⁾, § 14.

Satz XV. Eine in einem Intervall (a, b) ihr Vorzeichen nicht wechselnde Funktion $f(x)$ hat daselbst gleichzeitig ein Lebesguesches Integral und ein S -Integral und diese sind dann einander gleich.

Beweis. Anwendung des Satzes IX gibt, daß aus der Integrierbarkeit nach Lebesgue folgt die Existenz des S -Integrals und die Gleichheit beider Integrale. Daß, umgekehrt, aus der Existenz des S -Integrals die Integrierbarkeit nach Lebesgue folgt, läßt sich zeigen nach einem Beweisverfahren übereinstimmend mit demjenigen meiner Arbeit l. c. ¹⁾, S. 268.

Satz XVI. Es existiere das S -Integral über (a, b) für jede der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, konvergierend nach $f(x)$. Wenn für jedes n und jedes x in (a, b)

$$g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$$

ist und $g(x)$ und $h(x)$ über (a, b) S -integrierbar sind, so wird auch $f(x)$ über (a, b) S -integrierbar sein, und es ist dann:

$$(3) \quad \int_{(S)a}^b f(x) dx = \lim_{n=\infty} \int_{(S)a}^b f_n(x) dx^{16)}.$$

Beweis. Nach Satz XV sind die nicht-negativen Funktionen $f_n - g$ und $h - g$ integrierbar nach Lebesgue. Da $f_n - g \leq h - g$ ist, wird auch $f - g$ nach Lebesgue integrierbar sein und es ist:

$$\int_a^b (L) [f - g] dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b (L) [f_n - g] dx.$$

Daraus folgt leicht die Gültigkeit von (3).

Weitere Sätze über partielle Integration und Änderung der Integrationsvariablen würden sich hinzufügen lassen.

¹⁶⁾ Vgl. Burkill, l. c. ¹⁾, S. 278.

On the Hölder and Cesàro means of an analytic function.

By

L. S. Bosanquet in London and M. L. Cartwright in Cambridge.

1. Introduction.

1. 1. Suppose that

$$f(z) = f(x + iy) = f(re^{i\theta}) = \sum a_n z^n$$

is regular in $|z| < 1$, and let¹⁾

$$(1.11) \quad f_1(z) = \frac{1}{1-z} \int_z^1 f(u) du, \quad f_2(z) = \frac{1}{1-z} \int_z^1 f_1(u) du. \dots$$

We call $f_k(z)$ the k -th Hölder mean of $f(z)$ at $z = 1$, and we call

$$(1.12) \quad C^{(k)}(z) = \frac{k}{(1-z)^k} \int_z^1 (u-z)^{k-1} f(u) du, \quad k > 0,$$

the k -th Cesàro mean. When k is an integer, $f_k(z) \rightarrow l$ as $z \rightarrow 1$ implies $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ and conversely²⁾, provided that $z \rightarrow 1$ in the same manner in each case. These means are closely related to the Hölder and Cesàro means of the series $\sum a_n$ and have many analogous properties; but means of a function of a complex variable have the following property which has no analogue for means of a series or of real functions.

Theorem Ia. *If $f(z)$ is regular in $|z| < 1$, and*

$$(1.13) \quad |f(z)| \leq A(1-r)^{-K}$$

where $K \geq 0$ in a sector $0 < r < 1$, $|\Theta| \leq \delta$, and if

$$(1.14) \quad f_k(z) \rightarrow l$$

¹⁾ Here and elsewhere, unless the contrary is explicitly stated, $\int_z^1$ is to be interpreted as $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \int_z^\zeta$, where $\zeta \rightarrow 1$ along the straight line $(z, 1)$. See lemmas 1 and 2.

²⁾ See lemma 6.

when $z \rightarrow 1$ in

$$(1.15) \quad |1 - z| \leq B(1 - r)^{\alpha^3},$$

where $0 < \alpha < 1$, then

$$(1.16) \quad f_{k'}(z) \rightarrow l$$

where $k' > k_0(k, \alpha, K)$, when $z \rightarrow 1$ in $|z| \leq 1$.

$f_{k'}(e^{i\theta})$ is to be interpreted as $\lim_{r \rightarrow 1} f_{k'}(re^{i\theta})$, and the existence of this limit is implied in the proof. It can also be shown that $\lim_{r \rightarrow 1} f_{k'}(re^{i\theta})$ exists for every $k' > K$ provided that $0 < |\theta| < \delta^4$.

It will be seen that we can take

$$(1.17) \quad k_0 = \max \left\{ k; \frac{K}{(1 - \alpha)} \right\}.$$

If $\alpha = 0$ the region (1.15) is essentially $|z| \leq 1$, and the result is trivial. If $\alpha = 1$ the result ceases to be true without some further hypothesis.

1.2. Theorem Ia originally arose in connection with a theorem on the Cesàro summability of $\sum a_n$ obtained by M. L. Cartwright.

Theorem A. *Under the hypotheses of Theorem Ia with $\delta = \pi$ the series $\sum a_n$ is summable by some Cesàro mean.*

This theorem may be proved by the method used by Hardy and Littlewood⁵⁾ in the first part of the following theorem; we have only to divide the contour of integration a little differently.

Theorem B. *The necessary and sufficient conditions that $\sum a_n$ should be summable by some Cesàro mean to sum l are that (1) $f(z) = \sum a_n z^n$ should be regular and of the form (1.13) in $|z| < 1$, (2) there should be an integer k such that $f_k(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 1$ in $|z| \leq 1$.*

Professor Hardy pointed out that theorem Ia, with $\delta = \pi$, is a consequence of theorem A and the "necessary" part of theorem B; and we are indebted to him for suggesting that we should investigate further in this direction. A direct proof, that is to say one which does not depend on the summability of $\sum a_n$, not only yields a smaller value for the constant k_0 , but also brings out the fact that the result depends only on the "local" properties of the function. It is therefore natural to transform the problem, and consider the behaviour of a function at the centre of a semicircle, or sector, of regularity.

1.3. Theorem Ia is Tauberian by nature; the corresponding Abelian result can hardly be considered new; it is

³⁾ i. e. when z tends to 1 in any manner in (1.15).

⁴⁾ See § 2. 8.

⁵⁾ Hardy and Littlewood 8.

Theorem IIa. Suppose that $f(z)$ is regular and of the form (1.13) in $|z| < 1$, and suppose that $f_k(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 1$ in $|z| \leq 1$, then

$$(1.31) \quad |f(z)| \leq \varepsilon \left(\frac{|1-z|}{1-r} \right)^k$$

for every $\varepsilon > 0$ and for $|1-z| < |1-z_0(\varepsilon)|$ in $|z| < 1$. In particular $f(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 1$ in $|\arg(1-z)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ for every $\delta > 0$.

This theorem is the analogue of the series result: If $\sum a_n$ is summable (C, k) then $a_n = o(n^k)$. The last part may be deduced from the "sufficient" part of theorem B and the following classical Abelian theorem.

Theorem C. If $\sum a_n$ is summable (C, k) to sum l , then $f(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 1$ in $|\arg(1-z)| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ for every $\delta > 0$.

The direct proof of theorem IIa is very easy. We shall use a result of the same type as theorem IIa in proving theorems of the type Ia; it therefore seems desirable to consider both types of theorem and to prove them in a general form for Hölder and for Cesàro means. For bounded functions and functions with bounded means we prove further results which combine the characteristics of Montel's theorem⁶) on the limit of a bounded function with those of "convexity" theorems for Cesàro means⁷).

1.4. In theorem B, and also in theorems A and Ia, the integrals of the form (1.11) that arise may be taken indifferently along the straight line $(z, 1)$ or the broken line $(z, 0), (0, 1)$. In theorem IIa we may omit the condition (1.13) if we take the broken line definition, and in the other cases the two forms of the integral are only equivalent in virtue of (1.13). If the straight line definition is used, it is not at all obvious that $f_k(z)$ is regular in the unit circle, and this is essential to the proof. A discussion of such points for the corresponding integrals in a semicircle, or sector, will be found in (2.2), (2.3) and (2.6).

2. Hölder Means.

2.1. In what follows we consider the behaviour of a function near the origin instead of near $z = 1$, and near the imaginary axis instead of near $|z| = 1$. We first introduce our main theorem in a simple and rather crude form, using only means of *integral order*. Suppose that $\varphi(z)$ is regular in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$, and let

$$(2.11) \quad \varphi_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \varphi(u) du, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \varphi_1(u) du, \quad \dots,$$

⁶) Montel, 12.

⁷) Riesz, 15.

where $\int_0^z$ means $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{\zeta}^z$ and $\zeta \rightarrow 0$ along the straight line $(0, z)$, unless the contrary is explicitly stated.

Theorem Ib. *If $\varphi(z)$ is regular and of the form*

$$(2.13) \quad |\varphi(z)| \leq A x^{-K},$$

where $K \geq 0$, in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$, and if

$$(2.14) \quad \varphi_k(z) \rightarrow l$$

when $z \rightarrow 0$ in

$$(2.15) \quad r \leq B x^\alpha,$$

where $0 < \alpha < 1$, then

$$(2.16) \quad \varphi_{k'}(z) \rightarrow l,$$

where k' is an integer such that

$$(2.17) \quad k' > \max \left\{ k; \frac{K}{(1-\alpha)} \right\},$$

when $z \rightarrow 0$ inside or on the boundary of the semicircle.

There is an alternative definition of Hölder means⁸⁾ which is valid for non-integral k , and by using it we can prove a slightly sharper theorem, viz. theorem IIIb. The proof given here, depending on the definition (2.11), is simpler; but when the method is applied to theorem IIIb for integral k and k' it fails by a logarithm for certain values of k , α and K ⁸⁾.

The proofs of theorems Ia and Ib are, in principle, exactly the same, and the theorems may be deduced from one another by the conformal transformation $f(w) = f\{(1-z)/(1+z)\} = \varphi(z)$. We have chosen to give the theorem for a semicircle for convenience, and it will appear from the proof that the positive and negative imaginary axes are considered quite separately. Hence we may replace the semicircle by any angle $\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2$ provided that we replace x in (2.13) and (2.15) by $r \sin(\Theta - \Theta_1)$ or $r \sin(\Theta_2 - \Theta)$ according to the arm of the angle considered. We interpret $\varphi_{k'}(iy)$ as $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_{k'}(x + iy)$ and the existence of the limit is implied in the proof. The integrals which appear in (2.14) and (2.16) may also be interpreted as integrals along the broken line $(0, a)$ (a, z) , where a is any interior point of the semicircle.

If $k = 0$ we may proceed at once to the main proof in § 2.7, but if $k > 0$ we need theorem IIb and a lemma to show that $\varphi_k(z)$ is regular inside the semicircle.

⁸⁾ See § 3.1.

2.2. We shall generalize theorem IIa as well as transform it. Let D denote a convex domain bounded by part of the circle $|z| = R$, and two simple Jordan curves γ_1 and γ_2 touching the lines $\Theta = -\beta$, $\Theta = \beta$, where $0 < \beta \leq \frac{1}{2}\pi$, at the origin.

Theorem IIb. Suppose that $\varphi(z)$ is regular in D and that

$$(2.21) \quad \varphi_k(z) \rightarrow 0$$

when $z \rightarrow 0$ in D . Suppose further that for every $\delta > 0$ there exist $\varrho = \varrho(\delta) > 0$ and $r_0 = r_0(\delta, \varrho)$ such that

$$(2.22) \quad |\varphi(z)| < e^{-r^\varrho}$$

for $|\Theta| \leq \beta - \delta$, $0 < r < r_0$. Then, in D

$$|\varphi_{k'}(z)| < \varepsilon (r/d)^{k-k'},$$

where k' is an integer such that $0 \leq k' \leq k$ and d is the shortest distance from z to the boundary of D , for every $\varepsilon > 0$ and every $r < r_0(\varepsilon)$.

In particular, $\varphi(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$.

Corollary. If γ_1 and γ_2 are parts of the curve $r = Bx^\alpha$, then

$$\varphi_{k'}(z) = o(r/x)^{k-k'},$$

where $0 \leq k' \leq k$, when $z \rightarrow 0$ so that $r \leq B'x^\alpha$, where $B' < B$.

The hypothesis (2.22) is only used to prove that $\varphi_k(z)$ regular in D^9 . If, on the other hand, $\varphi_k(z)$ is defined by integrating along the broken line $(0, a)$ (a, z) , where a lies in D , then $\varphi_k(z)$ is obviously regular, if it exists at all. For

$$z \varphi_1(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{\zeta}^a \varphi(u) du + \int_a^z \varphi(u) du = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} F(\zeta) + F(z),$$

where $\zeta \rightarrow 0$ along $(a, 0)$. Hence $z \varphi_1(z) = L + F(z)$, where L is a constant and $F(z)$ is regular in D . We repeat the argument for $\varphi_2, \varphi_3, \dots$. Hence we have

Theorem IIb'¹⁰). If $\varphi(z)$ is regular in D and $\varphi_k(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ in D , the integrals being taken along the broken line $(0, a)$ (a, z) , then the conclusions of theorem IIb still hold.

2.3. Before anything else we must show that $\varphi_k(z)$ is an analytic function, provided that $\varphi(z)$ satisfies the conditions of theorems Ib and IIb. The following lemma is the generalized form of a result due to Ingham¹⁰), transformed conformally as we indicated in § 2.1.

⁹) See lemma 1.

¹⁰) See Hardy and Littlewood 8, 71 and 80.

Lemma 1. *The existence of the integrals (2.11) by the straight line definition at every point of D together with (2.22) implies their existence by either definition at every point of D . The two integrals represent the same function, which is regular in D . In particular, if (2.13) and (2.14) are satisfied, then $\varphi_*(z)$ is regular in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$.*

Let $F(z) = \int_a^z \varphi(u) du$; then $F(z)$ is regular and of the form

$$(2.31) \quad |F(z)| < e^{r^{-\varrho}}$$

in D . The existence of the straight-line integral implies that

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_{\zeta}^z \varphi(u) du$$

exists when $\zeta \rightarrow 0$ along $(z, 0)$. Applying Cauchy's theorem to the triangle (ζ, a, z) , we have

$$z \varphi_1(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\zeta}^a + \int_a^z \right\} \varphi(u) du = - \lim_{\zeta \rightarrow 0} F(\zeta) + F(z),$$

where $\zeta \rightarrow 0$ along $(z, 0)$. Now $\lim_{\zeta \rightarrow 0} F(\zeta)$ depends, *prima facie*, on the path along which $\zeta \rightarrow 0$, and is therefore a function of Θ , $L(\Theta)$, say. To prove that φ_1 is regular, we have only to show that $L(\Theta)$ is a constant when z lies in D ; and for this it is obviously sufficient to show that $L(\Theta)$ is constant in $|\Theta| \leq \beta - \delta$, $0 < r < R$, for every $\delta > 0$. Now, given ϱ , we can divide the angle $|\Theta| \leq \beta - \delta$ into a finite number of parts each less than π/ϱ . Suppose that $\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2$ is one of these subdivisions. Then $F(z)$ satisfies (2.31) for $\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2$ and $F(z) \rightarrow L(\Theta_1)$ on $\Theta = \Theta_1$ and $F(z) \rightarrow L(\Theta_2)$ on $\Theta = \Theta_2$. It follows from a theorem of Phragmén and Lindelöf¹¹) that $F(z)$ is bounded in the angle, and then by a theorem of Montel¹²) it follows that

$$L(\Theta) = L(\Theta_1) = L(\Theta_2) \text{ for } \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2.$$

Repeating this argument in each subdivision, we have

$$L(\Theta) = L(\beta - \delta) \text{ for } |\Theta| \leq \beta - \delta.$$

Hence $\varphi_1(z)$ is regular in D , and also the broken line integral exists and is equal to the straight line integral. We repeat the argument for $\varphi_2, \varphi_3, \dots$

¹¹) See Pólya and Szegő 14, 149, Aufgaben 330.

¹²) Montel, 12, or by a theorem of Lindelöf. See Pólya and Szegő, 14, 151, Aufgaben 340.

If (2.13) is satisfied, then

$$\varphi(z) = O(x^{-K}) = O\{\max(r \cos \Theta)^{-K}\} = O(r^{-K})$$

when $r \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$, where $\delta > 0$. Hence (2.22) is certainly satisfied.

Without the condition (2.22) we can only infer that there is some angle $\frac{1}{2}\pi < \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2 < \frac{1}{2}\pi$ in which $L(\Theta)$ is constant¹³.

2.4. Proof of Theorem IIb and IIb'. We have shown that in both cases $\varphi_k(z)$ is regular in D , and we have

$$\varphi_{k-1}(z) = \frac{d}{dz} \{z \varphi_k(z)\}.$$

Hence

$$\varphi_{k-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u \varphi_k(u)}{(u-z)^2} du$$

where C is a circle with centre z and radius $\frac{1}{2}d$, d being the shortest distance from z to the boundary of D . Then C lies entirely in D ; and given any $\varepsilon > 0$ we can choose $r_0(\varepsilon)$ so that $|\varphi_k(u)| < \varepsilon$ on C , provided that C also lies in $|u| < r_0(\varepsilon)$. It follows that

$$|\varphi_{k-1}(z)| \leq \frac{\varepsilon(r + \frac{1}{2}d)}{\pi d} \int_0^{2\pi} d\Theta < \frac{4\varepsilon r}{d},$$

provided that $r + \frac{1}{2}d < r_0$. Again

$$\varphi_{k-2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u \varphi_{k-1}(u)}{(u-z)^2} du,$$

where C is the circle $|u-z| = \frac{1}{2}d$ and further $r + d < r_0$. Then

$$|\varphi_{k-1}(u)| < 8\varepsilon(r + \frac{1}{2}d)/d$$

on C , and we have

$$|\varphi_{k-2}(z)| < \frac{16\varepsilon(r + \frac{1}{2}d)^2}{\pi d^2} \int_0^{2\pi} d\Theta < 128\varepsilon\left(\frac{r}{d}\right)^2,$$

provided that $r + d < r_1(\varepsilon)$. After $k - k'$ similar steps we obtain

$$|\varphi_{k'}(z)| < \varepsilon' (r/d)^{k-k'}$$

for every $\varepsilon' > 0$ and every $r < r_0(\varepsilon')$.

In particular, if $|\Theta| \leq \beta - \delta$, we have $d \geq \frac{1}{2}r \sin \delta$, provided that $r < r_0(\delta)$; and hence $|\varphi(z)| < \varepsilon (\sin \delta)^{-k}$ for every $\varepsilon > 0$ and every $r < r_0(\varepsilon, \delta)$. Given δ and η we can choose ε so that $|\varphi(z)| < \eta$ for $r < r_0(\varepsilon) = r_0(\eta, \delta)$ and $|\Theta| \leq \beta - \delta$. This completes the proof.

¹³) See Bohr, 2.

2. 5. To establish the corollary we have only to show that the shortest distance from a point $z_1 = x_1 + i y_1$, on the inner curve, $r = B' x^\alpha$, to the outer curve, $r = B x^\alpha$, is greater than $A x_1$, where A depends on $B - B'$. We can write the equation $r = B x^\alpha$ in the form

$$(2. 51) \quad y = B x^\alpha \left(1 - \frac{x^{2(1-\alpha)}}{B^2}\right)^{1/2}.$$

Hence it is easy to see that $\tan \psi = dy/dx \sim B \alpha x^{\alpha-1}$ as $x \rightarrow 0$. Let $z_2 = x_2 + i y_2$ be the point on $r = B x^\alpha$ nearest to z_1 ¹⁴). Then $x_2 < x_1$, $y_2 > y_1$; and if $x_2 \rightarrow 0$ so also do y_2 , x_1 and y_1 . We have

$$x_1 = x_2 + d \sin \psi = x_2 + d \{1 + O(x_2^{2(1-\alpha)})\}$$

so that

$$d = (x_1 - x_2) \{1 + o(1)\} \text{ as } x_2 \rightarrow 0.$$

Also

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 + d \cos \psi = y_2 + O\{(x_1 - x_2) x_2^{1-\alpha}\} \\ &= y_2 + O(x_1^{2-\alpha}). \end{aligned}$$

Hence, by (2. 51), we have

$$B' x_1^\alpha \{1 + o(1)\} = B x_2^\alpha \{1 + o(1)\},$$

and therefore

$$x_2 = (B'/B)^{1/\alpha} x_1 \{1 + o(1)\}.$$

It follows that

$$\begin{aligned} d &\geq (x_1 - x_2) \{1 - o(1)\} = \{1 - (B'/B)^{1/\alpha}\} x_1 \{1 - o(1)\} \\ &> A x_1, \end{aligned}$$

provided that $A < \{1 - (B'/B)^{1/\alpha}\}$, for all sufficiently small x_1 .

2. 6. We are now in a position to complete the connection between the two definitions of the integrals (2. 11).

Lemma 2. If $\varphi(z)$ is regular in D , and if $\varphi_k(z) \rightarrow 0$ with the broken-line definition when $z \rightarrow 0$ in D , then the straight line integrals exist and are equal to the broken-line integrals in D .

It follows from theorem II b' that $\varphi(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$, and hence the straight line integrals exist for every point such that $|\Theta| \leq \beta - \delta$, i. e. every point in D . Also $\varphi(z)$ is regular inside the triangle $(0, a, z)$ and continuous on the boundary, for all points z in D . It follows from Cauchy's theorem that the straight-line integrals are equal to the broken-line integrals in D .

It is not true that if the broken-line integrals exist at every point of D , then the straight-line integrals also exist at every point of D . For suppose that

$$\varphi(z) = e^{1/z^2} = e^{(\cos 2\Theta - i \sin 2\Theta)/r^2}.$$

¹⁴) If z_1 is sufficiently near the origin it is easy to see that there is only one point at which $|z_1 - z_2|$, where z_2 lies on $r = B x^\alpha$, is a minimum.

Then $\varphi(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ when $r \rightarrow 0$ so that $\frac{1}{4}\pi < |\theta| < \frac{1}{2}\pi$, but $\varphi(re^{i\theta}) \rightarrow \infty$ when $r \rightarrow 0$ so that $|\theta| < \frac{1}{4}\pi$. The broken-line integral exists, provided that a is chosen so that $|\arg a| > \frac{1}{4}\pi$, for all points in D . But the straight-line integrals do not exist for points such that $|\theta| < \frac{1}{4}\pi$.

2.7. Proof of Theorem Ib. We may suppose without loss of generality that $l = 0$. Suppose that $y > 0$ and let z_1 be the point on the line $(0 + iy, \infty + iy)$ at which $r_1 = B' x_1^\alpha$, where $B' < B$. Suppose that $0 < x < x_1$, and consider the integral

$$(2.71) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(u) du$$

taken round the triangle $(0, z_1, z)$. It follows from theorem IIb that $\varphi(z)$ is regular in the triangle and continuous on the contour. We may therefore apply Cauchy's theorem, and we have

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \left\{ \int_0^{z_1} + \int_{z_1}^z \right\} \varphi(u) du = I_1 + I_2.$$

Since the line $(0, z_1)$ lies inside $r = B' x^\alpha$, it follows from the corollary of theorem IIb that, if $k \geq 1$,

$$I_1 = \frac{r_1}{r} o \left\{ \left(\frac{r_1}{x_1} \right)^{k-1} \right\}.$$

But

$$r > y = y_1 = (r_1^2 - x_1^2)^{1/2} = B' x_1^\alpha \left(1 - \frac{x_1^{2(1-\alpha)}}{B'^2} \right)^{1/2} > \frac{1}{2} B' x_1^\alpha = \frac{1}{2} B' r_1,$$

provided that r and therefore y , r_1 and x_1 are sufficiently small. Hence

$$I_1 = o \left\{ \left(\frac{r_1}{x_1} \right)^{k-1} \right\} = o \{ x_1^{(\alpha-1)(k-1)} \}.$$

If $k < 1$, it is obvious that $I_1 = o(1)$.

Since $|\varphi(z)| \leq A x^{-K}$, we have

$$\begin{aligned} |I_2| &< \frac{A}{r} \int_x^{x_1} u^{-K} du < A_1 x_1^{-\alpha} \max \left\{ x^{1-K} \log \frac{1}{x}; x_1^{1-K} \log \frac{1}{x_1} \right\}^{15)} \\ &< \eta \max \{ x^{1-K-\varepsilon} x_1^{-\alpha}; x_1^{1-K-\alpha-\varepsilon} \} \end{aligned}$$

for every η , $\varepsilon > 0$ and every $x_1 < x_0(\eta, \varepsilon)$.

We remark that, if $K < 1$, the second expression is the larger. In this case I_2 converges for $x = 0$, and therefore $\varphi_1(iy) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_1(x + iy)$ exists.

If $1 - \alpha - K > 0$, we have $|I_2| \leq \eta x_1^{1-K-\alpha-\varepsilon}$; if $1 - \alpha - K \leq 0$ we

¹⁵⁾ Of course the logarithm only arises when $K = 1$ and this does not occur at all with Cesàro means or the alternative definition of Hölder means. Cf. theorems IIIa and IIIb. See also §§ 2. 1 and 3. 1.

have $|I_2| \leq \eta x^{1-K-\alpha-\varepsilon}$. For $x_1^{-\alpha} < x^{-\alpha}$ and $x_1^{1-\alpha-K-\varepsilon} < x^{1-\alpha-K-\varepsilon}$. Hence

$$\varphi_1(z) = o(\max\{x_1^{(\alpha-1)(k-1)}; 1; x^{1-\alpha-K-\varepsilon}; x_1^{1-\alpha-K-\varepsilon}\}).$$

There are now three possibilities:

(1) Suppose $1-\alpha-K > 0, k < 1$;

then

$$\varphi_1(z) = o(1) \text{ as } x_1 \rightarrow 0,$$

and therefore as $z \rightarrow 0$ inside or on the boundary of the semicircle, which is the desired result.

(2) Suppose $k \geq 1, 1-\alpha-K > (\alpha-1)(k-1)$;

then

$$\varphi_1(z) = o\{x_1^{(\alpha-1)(k-1)}\} = o\{x^{(\alpha-1)(k-1)}\}.$$

(3) Suppose $k \geq 0, 1-\alpha-K \leq (\alpha-1)(k-1)$;

then

$$\varphi_1(z) = o(x^{1-\alpha-K-\varepsilon}).$$

In case (2) we repeat the argument, with φ_1 in place of φ , $k-1$ in place of k , and $(\alpha-1)(k-1)$ in place of K , and we have

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= o(\max\{x_1^{(\alpha-1)(k-2)}; 1; x^{(\alpha-1)(k-1)+1-\alpha-\varepsilon}; x_1^{(\alpha-1)(k-1)+1-\alpha-\varepsilon}\}) \\ &= o(\max\{x_1^{(\alpha-1)(k-2)-\varepsilon}; 1; x^{(\alpha-1)(k-2)-\varepsilon}\}), \end{aligned}$$

and so on, until we obtain

$$\varphi_{k'}(z) = o(\max\{x_1^{(\alpha-1)(k-k')-\varepsilon}; 1\}) = o(1)$$

for $k' > k$.

In case (3), if the argument is repeated in a similar way, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_{k'}(z) &= o(\max\{x_1^{(\alpha-1)(k-k')-k'\varepsilon}; 1; x^{k'(1-\alpha)-K-k'\varepsilon}; x_1^{k'(1-\alpha)-K-k'\varepsilon}\}) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

provided that $k' > K/1-\alpha$.

Whichever case we consider, we arrive finally at the state of things considered in case (1) so that $\varphi_{k'}(iy)$ exists and $\varphi_{k'}(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ inside or on the boundary of the semi-circle.

2. 8. It may perhaps be as well to add a few remarks about the behaviour of $\varphi_k(z)$ on the imaginary axis at points other than the origin. Suppose that x_1 and y are fixed. Then it is evident from the preceding work that

$$\int_{z_1}^z \varphi_k(u) du$$

converges for $x = 0$, provided that k is sufficiently large, and therefore $\varphi_{k+1}(iy)$ exists, except perhaps at the origin. We can however, prove more.

Theorem Ib'. If $\varphi(z)$ is regular and of the form (2.13) in the semi-circle $x > 0$, $0 < r < R$, and if $\varphi(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ for every $\delta > 0$, then

$$\varphi_k(iy) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_k(x + iy)$$

exists for every integer $k > K$, provided that $0 < |y| < R$. Further, if $0 < k - K \leq 1$, then $\varphi_k(iy)$ belongs to $\text{Lip}(k - K - \varepsilon)$ for every $\varepsilon > 0^{16)}$ in the intervals $\eta < |y| < R - \eta$ for every $\eta > 0$.

Proof. As in theorem Ib we have $\varphi(z) = I_1 + I_2$, but now x_1 and y are fixed and z_1 is on $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$. It follows that I_1 is continuous for $x \geq 0$ provided that $y \neq 0$. We also have

$$|I_2| < \frac{A_1}{r} \int_x^{x_1} u^{-K} du.$$

If $K < 1$ the integral converges, and $\varphi_1(iy)$ exists provided that $0 < |y| < R$. If $K \geq 1$ we have

$$\varphi_1(x + iy) = o(x^{1-K-\varepsilon})$$

as $x \rightarrow 0$. Repeating the process we find that $\varphi_k(iy)$ exists for every $k > K$. This completes the first part of the theorem.

Now suppose that $0 < k - K \leq 1$. We show as above that

$$(2.81) \quad \varphi_{k-1}(x + iy) = o(x^{k-1-K-\varepsilon})$$

for every $\varepsilon > 0$. By lemma 1 we can write

$$z \varphi_k(z) = \left\{ \int_0^a + \int_a^z \right\} \varphi_{k-1}(u) du = J_1 + J_2.$$

J_1 is independent of z ; and, since z^{-1} is regular except at the origin $\varphi_k(iy)$ will belong to $\text{Lip}(k - K - \varepsilon)$ if $J_2(iy)$ does. It will be enough, therefore, to show that¹⁷⁾

$$|J_2\{i(y+h)\} - J_2(iy)| < A_2 h^{k-K-\varepsilon}$$

for every $\varepsilon > 0$. We deform the contour of integration in $J_2\{i(y+h)\}$ into the contour consisting of the straight lines $[a, h + iy]$, $[h + iy, h + i(y+h)]$, $[h + i(y+h), i(y+h)]$, and the contour of integration in $J_2(iy)$ into $[a, h + iy]$, $[h + iy, iy]$.

Then we have

$$\begin{aligned} J_2\{i(y+h)\} - J_2(iy) &= \left\{ \int_{h+iy}^{h+i(y+h)} + \int_{h+i(y+h)}^{i(y+h)} - \int_{h+iy}^{iy} \right\} \varphi_{k-1}(u) du \\ &= J_3 + J_4 + J_5. \end{aligned}$$

¹⁶⁾ i. e. $|\varphi_k(iy) - \varphi_k\{i(y-h)\}| = O(h^{k-K-\varepsilon})$ uniformly in y .

¹⁷⁾ Cf. Hardy and Littlewood, 9.

It follows from (2.81) that

$$|J_3| < A_3 h^{k-K-\varepsilon},$$

$$|J_4| < A_4 \int_0^h u^{k-1-K-\varepsilon} du < A_5 h^{k-K-\varepsilon},$$

and similarly

$$|J_5| < A_6 h^{k-K-\varepsilon}.$$

This completes the proof.

3. Cesàro Means.

3.1. Let

$$(3.11) \quad \begin{cases} \Phi_k(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^z (z-u)^{k-1} \varphi(u) du, & k > 0, \\ \Phi_0(z) = \varphi(z). \end{cases}$$

$$(3.12) \quad C^{(k)}(z) = \Gamma(k+1) z^{-k} \Phi_k(z), \quad k \geq 0.$$

Theorem IIIa. If $\varphi(z)$ is regular and of the form

$$(3.13) \quad |\varphi(z)| < \varepsilon x^{-K}$$

where $K > 0$ for every $\varepsilon > 0$ and every $x < x_0(\varepsilon)$ in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$, and if

$$C^{(k)}(z) \rightarrow l$$

when $z \rightarrow 0$ so that (2.15) is satisfied, then $C^{(k')}(z) \rightarrow 0$, for every k' such that

$$k' \geq \max \left\{ k; \frac{K}{(1-\alpha)} \right\},$$

when $z \rightarrow 0$ so that $x \geq 0$, $0 < r < R$.

In the form just given $C^{(k)}(z)$ is strictly speaking analogous to the k -th Rieszian mean of a series, but integration by parts¹⁸⁾ shows that, if k is an integer,

$$(3.14) \quad C^{(k)}(z) = \Gamma(k+1) z^{-k} \int_0^z du_1 \int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_{k-1}} \varphi(u_k) du_k,$$

which is analogous to the Cesàro form. In this form the proof given for Hölder means can be applied, but, as before, it introduces a logarithm for certain values of K , and therefore only gives a result for

$$k' > \max \left\{ k; \frac{K}{(1-\alpha)} \right\}.$$

¹⁸⁾ Cf. lemma 3.

We can write Hölder means in the form

$$(3.15) \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{z \Gamma(k)} \int_0^z (\log z - \log u)^{k-1} \varphi(u) du^{19};$$

and the relation of this form to (2.11) is much the same as that of (3.12) to (3.14). The part of the integral near z is practically the same in (3.12) and (3.15). For

$$\log \frac{u}{z} = \log \left(1 + \frac{u-z}{z} \right) = \frac{u-z}{z} + O\left(\frac{u-z}{z}\right)^2$$

as $\frac{(u-z)}{z} \rightarrow 0$. The method used in theorem IIIa can be applied to Hölder means in the form (3.15) for all k and k' .

Theorem IIIb. *We may replace $C^{(k)}(z)$ and $C^{(k')}(z)$ in theorem IIIa by $\varphi_k(z)$ and $\varphi_{k'}(z)$ and the result still holds.*

The proof of theorems IIIa and IIIb depends on integrating round the triangle $(0, z_1, z)$ considered in §2.7, and it will be seen that the forms (2.11) and (3.14) are most convenient for the integral taken along $(0, z_1)$ and the forms (3.12) and (3.15) are more suitable for the integral along (z_1, z) . When we use (3.12) we have to integrate by parts along $(0, z_1)$, so that we reduce the mean to a form similar to (3.14). When we use (2.11) or (3.14) this part of the contour is easy to deal with, but we may get an irrelevant logarithm from the line (z_1, z) . To get the best result we have to combine the advantages of both forms.

3.2. As before, if $k = 0$ we can proceed at once to the main proof in §3.9. If $k > 0$ we need the following theorem and various lemmas besides.

Theorem IV. *If we replace $\varphi_k(z)$ and $\varphi_{k'}(z)$ in theorem IIb by $C^{(k)}(z)$ and $C^{(k')}(z)$, the results still hold even if k and k' are not integers.*

If k and k' are integers, this is easily proved by applying the method of Theorem IIb to (3.14). For non-integral k and k' we need considerably more machinery²⁰.

3.3. We suppose throughout §§3.3—3.5 that $\varphi(z)$ is regular in D , the domain defined in §2.2.

3.3. Lemma 3. *If $\Phi_k(z)$ exists in D , then $\Phi_{k'}(z)$ exists in D , and*

$$(3.31) \quad \Phi_{k'}(z) = \frac{1}{\Gamma(k'-k)} \int_0^z (z-u)^{k'-k-1} \Phi_k(u) du,$$

¹⁹) Cf. Jacob 11.

²⁰) We shall only use the result for k' an integer, but this requires just as much working if k is allowed to be non-integral.

provided that $k' > k > 0$. Also if $\Phi_k(z)$ exists on one line, say $\Theta = \alpha$ in D , then $\Phi_{k'}(z)$ exists, and (3.31) holds on $\Theta = \alpha$ for $k' > k > 0$ ²¹).

Proof. We have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(k'-k)} \int_0^z (z-u)^{k'-k-1} \Phi_k(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(k'-k) \Gamma(k)} \int_0^z (z-u)^{k'-k-1} du \int_0^u (u-v)^{k-1} \varphi(v) dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(k'-k) \Gamma(k)} \int_0^z \varphi(v) \int_v^z (z-u)^{k'-k-1} (u-v)^{k-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(k')} \int_0^z (z-v)^{k'-1} \varphi(v) dv \end{aligned}$$

by a well known identity. The inversion of the repeated integral is easily justified, and we leave the details to the reader²²).

For completeness we state the following lemma.

Lemma 4. If $\Phi_k(z)$ exists for some $k > 0$, then it exists for every $k > 0$.

We shall not require this lemma, and the proof is left to the reader.

3.4. Lemma 5. If $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in D , then $C^{(k')}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in D , provided that $k' \geq k \geq 0$. Also if $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ along one line only in D , say $\Theta = \alpha$, then $C^{(k')}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ along $\Theta = \alpha$ for $k' \geq k \geq 0$.

The lemma, as it stands, says nothing about the boundary of D , but this is a rather trivial point in the applications which we shall make. Suppose for instance that D is the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$, and suppose that

$$C^{(k)}(iy) = \lim_{x \rightarrow 0} C^{(k)}(x + iy)$$

exists and $C^{(k)}(z)$ tends to 0 when $z \rightarrow 0$ so that $x \geq 0$. Then by the lemma $C^{(k')}(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ in D ; in other words $|C_{k'}(z)| < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$ and every z in D such that $r < r_0$. It follows that $|C^{(k')}(iy)| < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$ and every $|y| < r_0$, provided that it exists. The existence of $C^{(k)}(iy)$ is considered more fully in §3.91.

²¹) The second statement of course includes the first.

²²) Cf. Bosanquet 3, lemmas 1 and 6. Here of course the conditions on $\varphi(z)$ are more stringent and the proof is correspondingly simpler.

Proof of lemma 5. We may suppose that $l = 0$, $k' > k$. Then, by lemma 3, if $k > 0$ we have

$$\frac{z^{k'} C^{(k')}(z)}{\Gamma(k' + 1)} = \Phi_{k'}(z) = \frac{1}{\Gamma(k' - k)} \int_0^z (z - u)^{k' - k - 1} \Phi_k(u) du$$

$$= \int_0^z (z - u)^{k' - k - 1} o(u^k) du = o(z^{k'}),$$

when $z \rightarrow 0$ in D . If $k = 0$ the argument is the same, but we can use (3.12), so that lemma 3 is not needed.

3.5. Lemma 6. If $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ where k is an integer, when $z \rightarrow 0$ in D , then $\varphi_k(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in D , and conversely. Also if $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ along one line in D , say $\Theta = \alpha$, then $\varphi_k(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ along $\Theta = \alpha$, and conversely.

The proof of this lemma is closely analogous to that for real variables, but cannot be deduced from it²³). As in the case of the previous lemma, the result holds for the closed semicircle $x \geq 0$, $0 \leq r \leq R$, provided that $\varphi_k(iy)$ and $C^{(k)}(iy)$ exist for $0 \leq |y| \leq R$.

It should be observed that the existence of the Cesàro means does not imply the existence of the Hölder means of order greater than 1. This is easily seen by taking

$$\varphi(z) = z^{-1} (\log z)^{-1-\delta}, \quad \delta > 0.$$

3.6. Lemma 7. If $\varphi(z)$ is regular and $C^{(k)}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in D , for some $k \geq 0$, and if (2.22) is satisfied for some $\rho > 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$ and every $r < r_0(\rho, \delta)$, then $C^{(k')}(z)$ is regular in D for all $k' > 0$.

If k and k' are integers, this follows from (3.14) by the method of lemma 1. In the general case suppose that $l = 0$; then, by lemma 5, we have $C^{(k')}(z) \rightarrow 0$, where $k'' = [k] + 1$. We can now use theorem IV with $k = k''$, an integer, and $k' = 0$; or, if we prefer it, we can use lemma 6 and then theorem IIb. In either case we obtain $\varphi(z) \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$. The argument used in theorem IIb shows also that $z \varphi'(z) \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$. Hence, if z is any point in D , $t \varphi'(zt)$ is continuous uniformly in $0 \leq t \leq 1$.

Writing

$$C^{(k')}(z) = k' \int_0^1 (1-t)^{k'-1} \varphi(zt) dt, \quad k' > 0,$$

we have

$$\frac{d}{dz} (C^{(k')}(z)) = k' \int_0^1 (1-t)^{k'-1} t \varphi'(zt) dt.$$

Thus $C^{(k)}(z)$ is regular in D .

²³) See Bosanquet 5, Hardy and Littlewood 7.

3. 7. Lemma²⁴) 8. If $\varphi(z)$ is regular in D and satisfies (2. 22), and if $C^{(k)}(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ in D , where $k \geq 0$, then

$$\Phi_{k+\lambda}(z+h) - \Phi_{k+\lambda}(z) = o(r^k |h|^\lambda),$$

where z and $z+h$ lie in D , $|h| \leq r$, $0 < \lambda \leq 1$, when $z \rightarrow 0$.

Proof. By (3. 12) and lemma 3 we have

$$\begin{aligned} \Phi_{k+\lambda}(z+h) - \Phi_{k+\lambda}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{z+h} (z+h-u)^{\lambda-1} \Phi_k(u) du \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z-u)^{\lambda-1} \Phi_k(u) du. \end{aligned}$$

By lemma 7, $\Phi_k(z)$ is regular in D , and since $C^{(k)}(z) \rightarrow 0$ in D , $\Phi_k(z)$ is continuous on the boundary of the triangle $(0, z, z+h)$. Applying Cauchy's theorem to the triangle, we have

$$\begin{aligned} \Phi_{k+\lambda}(z+h) - \Phi_{k+\lambda}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_z^{z+h} (z+h-u)^{\lambda-1} \Phi_k(u) du \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z \{(z+h-u)^{\lambda-1} - (z-u)^{\lambda-1}\} \Phi_k(u) du = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Now $|z+h| \leq 2r$ and $\Phi_k(z) = o(r^k)$, so that

$$I_1 = o(r^k \int_z^{z+h} |z+h-u|^{\lambda-1} du) = o(r^k |h|^\lambda).$$

Also

$$|I_2| \leq \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left\{ \int_0^{r-|h|} + \int_{r-|h|}^r \right\} |(z+h-u)^{\lambda-1} - (z-u)^{\lambda-1}| |\Phi_k(u)| du = I_3 + I_4.$$

In I_3 put $u = ve^{i\theta}$, and we have $|z+h-u| \geq |r-|h||-v|$, so that

$$\begin{aligned} I_3 &= o(r^k \int_0^{r-|h|} ||z+h-u|^{\lambda-1} - |z-u|^{\lambda-1}| du) \\ &= o(r^k \int_0^{r-|h|} \{(r-|h|-v)^{\lambda-1} - (r-v)^{\lambda-1}\} dv) \\ &= o(r^k \{r^\lambda - (r-|h|)^\lambda - |h|^\lambda\}) \\ &= o(r^k |h|^\lambda), \end{aligned}$$

since $\{r^\lambda - (r-|h|)^\lambda\}/|h|^\lambda$ is bounded, if $0 < \lambda \leq 1$, $|h| \leq r$, as $r \rightarrow 0$.

²⁴) Cf. Bosanquet 3, lemma 2, and 6, lemma 8.

In I_4 , if $|z+h| \geq r$, we have $|z+h-u| \geq |z+h| - |u| \geq r - |u|$. Hence, since $\lambda \leq 1$,

$$I_4 = o(r^k \int_{r-|h|}^r (r-v)^{\lambda-1} dv) = o(r^k |h|^\lambda).$$

If

$$|z+h| \leq r, \quad |z+h-u| \geq r - |h| - v.$$

Hence

$$I_4 = o(r^k \int_{r-|h|}^r \{(r-|h|-v)^{\lambda-1} - (r-v)^{\lambda-1}\} dv) = o(r^k |h|^\lambda).$$

In both cases we have the desired result.

3. 8. Proof of Theorem IV. Suppose that $k' = k - p + \lambda$, where p is an integer and $0 < \lambda \leq 1$. We have

$$\Phi_{k+\lambda}(z) = \int_0^z \Phi_{k-1+\lambda}(u) du,$$

so that

$$\Phi_{k-1+\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi_{k+\lambda}(u) du}{(u-z)^2},$$

where C is a circle with centre z and radius $\frac{1}{2}d$. By lemma 8 we can write

$$\Phi_{k+\lambda}(u) = \Phi_{k+\lambda}(z) + o(r^k d^\lambda)$$

on the circle. Hence

$$\Phi_{k-1+\lambda}(z) = \frac{\Phi_{k+\lambda}(z)}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(u-z)^2} + o\left(\frac{r^k d^{\lambda-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\right) = o(r^k d^{\lambda-1}).$$

Again we have

$$\Phi_{k-2+\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi_{k-1+\lambda}(u)}{(u-z)^2} du = o(r^k d^{\lambda-2}),$$

and repeating the argument we have finally

$$\Phi_{k'}(z) = \Phi_{k-p+\lambda}(z) = o(r^k d^{\lambda-p}) = o(r^k d^{k'-k}).$$

The corollary follows as in § 2. 5.

3. 9. Proof of Theorem IIIa. We have to show that $\Phi_{k'}(z) = o(z^{k'})$ when $z \rightarrow 0$ so that $x > 0$, provided that $k' \geq \max\{k; K/(1-\alpha)\}$. We apply Cauchy's theorem to the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int (z-u)^{k'-1} \varphi(u) du$$

taken round the triangle $(0, z_1, z)$, where z_1 is defined as in § 2. 7. We have, supposing as we may that $0 < x < x_1$,

$$\Gamma(k') \Phi_{k'}(z) = \left\{ \int_0^{z_1} + \int_{z_1}^z \right\} (z-u)^{k'-1} \varphi(u) du = I_1 + I_2.$$

Now for every $\varepsilon > 0$ and $x_1 < x_0(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} |I_2| &< \varepsilon \int_x^{x_1} (u-x)^{k'-1} u^{-K} du \\ &< \varepsilon x^{k'-K} \int_1^{x_1/x} (w-1)^{k'-1} w^{-K} dw \\ &< \varepsilon x^{k'-K} \max\{1; (x_1/x)^{k'-K}\} \\ &< \varepsilon x_1^{k'-K} \end{aligned}$$

provided that $k' > K$. Hence

$$I_2 = o(x_1^{k'-K}) = o(x_1^{k'\alpha}) = o(r_1^{k'}) = o(r^{k'}),$$

provided that $k' - K \geq k'\alpha$, i. e. $k' \geq K/(1-\alpha)$.

It is evident from the above working that I_2 converges for $x = 0$ provided that $k' > K$, so that this result holds for $x \geq 0$.

It remains to consider I_1 , for which we must employ theorem IV. Let $k' = p + \lambda$, where p is an integer and $0 < \lambda \leq 1$, and integrate by parts p times. We have

$$I_1 = \sum_{n=1}^p A_n (z-z_1)^{k'-n} \Phi_n(z_1) + A \int_0^{z_1} (z-u)^{\lambda-1} \Phi_p(u) du,$$

where the A 's are independent of z and z_1 . Then, by theorem IV,

$$|(z-z_1)^{k'-n} \Phi_n(z_1)| = o(x_1^{k'-n} r_1^k x_1^{n-k}) = o(r_1^k x_1^{k'-k}) = o(r_1^{k'}),$$

provided that $n \leq k$. If $n > k$ we have

$$|(z-z_1)^{k'-n} \Phi_n(z_1)| = o(x_1^{k'-n} r_1^n) = o(r_1^{k'}).$$

Finally

$$\begin{aligned} \int_0^{z_1} (z-u)^{\lambda-1} \Phi_p(u) du &= \int_0^{z_1} (z_1-u)^{\lambda-1} \Phi_p(u) du \\ &+ \int_0^{z_1} \{(z-u)^{\lambda-1} - (z_1-u)^{\lambda-1}\} \Phi_p(u) du = I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Since z_1 lies in $r \leq Bx^\alpha$, $I_3 = o(r_1^{k'})$ provided that $k' \geq k$.

If $p \leq k$, it follows from theorem IV that, if $u = ve^{i\theta}$ lies on the line $(0, z_1)$, we have

$$\begin{aligned} \Phi_p(u) &= o\{v^k (v \cos \Theta_1)^{p-k}\} = o\{v^p (\cos \Theta_1)^{p-k}\} \\ &= o\{r_1^p (x_1/r_1)^{p-k}\} = o(r_1^k x_1^{p-k}). \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} I_4 &= o(r_1^k x_1^{p-k} \int_0^{z_1} |(z-u)^{\lambda-1} - (z_1-u)^{\lambda-1}| |du|) \\ &= o(r_1^k x_1^{p-k} |z_1 - z|^\lambda) = o(r_1^k x_1^{p+\lambda-k}) \\ &= o(r_1^{k'}), \end{aligned}$$

by the method used for I_2 in § 3.7. If $p > k$, we have $\Phi_p(u) = o(u'')$, so that

$$\begin{aligned} I_4 &= o\left(r_1^p \int_0^{z_1} |(z-u)^{k-1} - (z_1-u)^{k-1}| |du|\right) \\ &= o(r_1^p x_1^k) = o(r_1^{p+k}) = o(r_1^{k'}). \end{aligned}$$

Collecting these results we have $I_1 = o(r_1^{k'}) = o(r^{k'})$ for $k' \geq k$ and for every $x > 0$. But since $I_1(iy) = \lim_{x \rightarrow 0} I_1(x + iy)$ exists we have $I_1 = o(r^{k'})$ for $x \geq 0$, which completes the theorem.

3.91. A result for Cesàro means corresponding to theorem Ib', but more precise, is

Theorem IIIa'. *If the hypotheses of theorem Ib' are satisfied, then*

$$C^{(k)}(iy) = \lim_{x \rightarrow 0} C^{(k)}(x + iy)$$

exists for every $k > K$, provided that $0 < |y| < R$. Further, if $0 < k - K < 1$, then $C^{(k)}(iy)$ belongs to $\text{Lip}(k - K)$ in the intervals $\eta < |y| < R - \eta$ for every $\eta > 0$.

The first part follows at once from considering I_1 and I_2 in the preceding paragraph. The second part is false for $k - K = 1$.

For $k - K < 1$ we consider the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int (z-u)^{k-2} \varphi(u) du$$

taken round the triangle $(0, z_1, z)$. Keeping x_1 and y fixed and making $x \rightarrow 0$ we have, using the notation of § 3.9,

$$I_1 = O(1) \quad \text{and} \quad I_2 = O(x^{k-1-K}).$$

Hence

$$\Phi_{k-1}(z) = O(x^{k-1-K}).$$

Now

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \int_0^z \Phi_{k-1}(u) du = \left\{ \int_0^a + \int_a^z \right\} \varphi(u) du \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

As in § 2.8 we show that J_1 is independent of z , and that $J_2(iy)$ belongs to $\text{Lip}(k - K)$ in every interval $\eta < |y| < R - \eta$, where $\eta > 0$. Since z^{-k} is regular except at the origin, the result follows immediately.

4. Functions with Bounded Means.

4.1. Combining the ideas of the previous theorems with those of Montel's theorem we have

Theorem V. *Suppose $\varphi(z)$ is regular for*

$$|\Theta| < \beta < \frac{1}{2}\pi, \quad 0 < r < R,$$

and of the form (2. 22) when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$, for every $\delta > 0$. Suppose that

$$(4. 11) \quad |\varphi_k(z)| \leq A$$

for $0 < r < R$, $|\Theta| < \beta$, and that

$$(4. 12) \quad \varphi_{k'}(z) \rightarrow l$$

when $z \rightarrow 0$ along $\Theta = \gamma$, where $|\gamma| < \beta$. Then (1) $\varphi(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$, (2) $\varphi_{k+1}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta$.

If we make $\beta \rightarrow 0$, the condition (2. 22) drops out and the theorem reduces to the real variable one²⁵): If $\varphi_k(z) = O(1)$ and $\varphi_{k'}(z) = o(1)$ for some k' , then $\varphi_{k+1}(z) = o(1)$. However for $\beta > 0$ it depends on different ideas.

As in the case of the previous theorems a mild form of theorem V can be deduced from summability theorems for series. For instance suppose that $k = k' = 0$, and consider Andersen's theorem²⁶).

Theorem D. If $f(z) = \sum a_n z^n$ is regular and bounded in the unit circle, and if $f(z) \rightarrow l$ as $z \rightarrow 1$ along the real axis, then $\sum a_n$ is summable (C, δ) to l for every $\delta > 0$.

This theorem can be deduced from Littlewood's Tauberian theorem, or more simply by using Montel's theorem and Cauchy's theorem²⁷). Combining theorem D with theorems B and C we have a result similar to theorem V. With a little trouble we can also obtain results for $k > 0$ from well known summability theorems, but the direct proof is much simpler.

As usual the condition (2. 22) is only used to prove that $\varphi_k(z)$ is regular, and may be omitted if we use broken-line integrals.

4. 2. Proof of Theorem V. Let $k'' = \max(k; k')$. It follows immediately from (4. 11) and (4. 12) that $\varphi_{k''}(z) = O(1)$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| < \beta$, and that $\varphi_{k''}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ along $\Theta = \gamma$. Also in virtue of (2. 22) $\varphi_{k''}(z)$ is regular for $|\Theta| < \beta$, $0 < r < R$. Hence by Montel's theorem²⁸) $\varphi_{k''}(z) \rightarrow l$ as $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$; and therefore by theorem IIb $\varphi(z) \rightarrow l$ as $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta - \delta$ for every $\delta > 0$. This completes the first part.

We may suppose for convenience that $l = 0$ and that $\beta = \frac{1}{2}\pi$; or else we may turn the angle of the theorem so that one arm

²⁵) Riesz, 15.

²⁶) Andersen, 1.

²⁷) Offord, 13.

²⁸) Montel, 12.

coincides with the positive imaginary axis. Supposing, as we may, that $\frac{1}{2}\pi > \arg z > \frac{1}{2}\pi - \delta$, we apply Cauchy's theorem to

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi_k(u) du,$$

where C is the triangle $(0, z_1, z)$ and z_1 divides the line $(z, \infty + iy)$ at the point where $|\Theta| = \frac{1}{2}\pi - \delta$. Then

$$z \varphi_{k+1}(z) = \left\{ \int_0^{z_1} + \int_{z_1}^z \right\} \varphi_k(u) du = I_1 + I_2.$$

Since $\varphi(z) \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ we have $\varphi_k(z) \rightarrow 0$, and therefore $I_1 = o(r_1) = o(r)$. Since $\varphi_k(z) = O(1)$ we have

$$I_2 = O(1) \int_x^{x_1} du = O(x_1) = O(r_1 \delta).$$

Choosing δ first sufficiently small and then $r < r_0(\delta)$, we have $|\varphi_{k+1}(z)| < \varepsilon$ for every $\varepsilon > 0$ and every z such that $r < r_0$, $x > 0$.

We also have

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_{k+1}(x + iy) \right| < \varepsilon$$

for every $\varepsilon > 0$ and every $y < r_0$, provided that this limit exists. But its existence is obvious from consideration of I_2 , and this completes the proof.

4. 3. Theorem VI. *If we replace $\varphi_k(z)$ and $\varphi_{k'}(z)$ in theorem V by $C^{(k)}(z)$, $C^{(k')}(z)$, then the result holds for all positive k and k' , and further $C^{(k+\eta)}(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ in $|\Theta| \leq \beta$ for every $\eta > 0$.*

Proof. Taking $k'' = \max([k] + 1; [k'] + 1)$, the first part of the proof goes as before. We suppose that $l = 0$; then it remains to prove that $\Phi_{k+\eta}(z) = o(r^{k+\eta})$ when $z \rightarrow 0$ so that $|\Theta| \leq \beta$. Taking $\beta = \frac{1}{2}\pi$ and applying Cauchy's theorem to the triangle used in § 4. 2, we have

$$\Phi_{k+\eta}(z) = \left\{ \int_0^{z_1} + \int_{z_1}^z \right\} (z - u)^{\eta-1} \Phi_k(u) du = I_1 + I_2.$$

Since $C^{(k)}(z) \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ so that $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$, we have

$$\Phi_k(u) = o(u^k)$$

in I_1 . Hence

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^{z_1} |z - u|^{\eta-1} o(u^k) du \leq \int_0^{r_1} (r_1 - u)^{\eta-1} o(u^k) du \\ &= o(r_1^{k+\eta}) \int_0^1 (1 - w)^{\eta-1} w^k dw = o(r_1^{k+\eta}). \end{aligned}$$

Also in I_2 we have $\Phi_k(u) = O(u^k) = O(r_1^k)$, so that

$$|I_2| \leq O(r_1^k) \int_x^{x_1} (u-x)^{\eta-1} du = O(r_1^k x_1^\eta) = O(r_1^{k+\eta} \delta^\eta).$$

Now given any $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, we can choose δ so that $\delta^\eta < \varepsilon$. Hence

$$\Phi_{k+\eta}(z) = o(r_1^{k+\eta}) = o(r^{k+\eta}).$$

4.4. A few simple examples may help to show the significance of the various conditions in theorems V and VI. The function $z^{\alpha i}$ (α real) is bounded in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$, but does not tend to a limit along any line. Hence we see that (4.12) is essential. The function $e^{-(1/z)}$ is bounded in the semicircle and tends to 0 as $z \rightarrow 0$ along the real axis, but does not tend to a limit along the boundary, $x = 0$. Hence the second part of the conclusion of theorem VI does not hold with $\eta = 0$. The condition $\varphi_k(z) = O(1)$, where $k > 0$, allows us to include many functions which are unbounded, such as $\log z e^{-(1/z)}$.

In the earlier theorems, where $\varphi_k(z)$ is not bounded, it is essential that the limit should exist in $r \leq Bx^\alpha$, where $\alpha < 1$. For we have

Theorem VII. *There are functions $\varphi(z)$ such that (1) $\varphi(z)$ is regular and of the form*

$$|\varphi(z)| < x^{-\varepsilon}$$

for every $\varepsilon > 0$ and every $x < x_0(\varepsilon)$ in the semicircle $x > 0$, $0 < r < R$ (2) $\varphi(z) \rightarrow l$ when $z \rightarrow 0$ so that $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ for every $\delta > 0$, and yet (3) for any k , there is a path in $x > 0$ leading to the origin along which $\varphi_k(z)$ does not tend to a limit

The region $|\Theta| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$ may be regarded as the limiting case of $r \leq Bx^\alpha$ when $\alpha \rightarrow 1$; for we have

$$x \geq r \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \delta) \geq r \sin \delta.$$

Proof. Consider the functions $\varphi(z) = \sum a_n e^{-nz}$ constructed by Ingham²⁹). These functions satisfy (2) and have $a_n = O(\kappa(n)/n)$, where $\kappa(n) \rightarrow \infty$ as slowly as we please. Taking $\kappa(n) = \log n$ it is easy to show that $\varphi(z) = O\{(\log x)^2\}$, and therefore $\varphi(z)$ satisfies (1). Further the series $\sum a_n$ is not summable (C, k) for any k . It follows from theorem B that $\varphi_k(z)$ does not tend to l along every path in the semicircle for any $k > 0$, and therefore (3) is also satisfied.

References.

1. A. F. Andersen, *Studier over Cesàros summabilitetsmethode* (Copenhagen 1921).
2. H. Bohr, On the limit values of analytic functions. *Journ. London Math. Soc.* **2** (1927), p. 180--181.

²⁹) Ingham, 10.

3. L. S. Bosanquet, On Abel's integral equation and fractional integrals. Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), p. 134—143.
4. —, On the summability of Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), p. 144—164.
5. —, Note on the limit of a function at a point. Journ. London Math. Soc. **7** (1932), p. 100—105.
6. —, On the summability of power series. Annals of Math. **33** (1932), p. 758—770.
7. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The equivalence of certain integral means. Proc. London Math. Soc. (2) **22** (1924), p. xi—xiv.
8. — —, Solution of the Cesàro summability problem for power series and Fourier series. Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 67—96.
9. — —, Some properties of fractional integrals. II. Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 403—439.
10. A. E. Ingham, A note on the converse of Abel's continuity theorem. Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1924), p. 326—336.
11. M. Jacob, Über die Äquivalenze der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reellen Ordnung $\alpha > 0$. Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 672—682.
12. P. Montel, Sur la représentation conforme. Journ. de Math. (7) **3** (1917), p. 1—54.
13. A. C. Offord, On the summability of power series. Proc. London Math. Soc. **2** (33) (1932), p. 467—480.
14. G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze, Bd. 1, Berlin 1925.
15. M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Univ. Hungaricae, Szeged, **1** (1923), p. 114—126.

(Eingegangen am 28. Januar 1932.)

The number of solutions of some congruences in two variables.

By

L. J. Mordell, Manchester.

1. Let $f(x, y)$, or say f , be a polynomial in x, y with integer coefficients. Let p be a prime. Not much is really known concerning the number of solutions, say N , of the congruence in two variables x, y ,

$$(1.1) \quad f(x, y) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Some results have been deduced from Gauss' theory of the division of the circle. Thus consider

$$(1.2) \quad x^3 + y^3 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

When $p \equiv 2 \pmod{3}$, it is a trivial result that $N = p$, since an arbitrary value for x gives a unique value for y . When $p \equiv 1 \pmod{3}$, $N = \xi + p - 2$, where ξ is uniquely determined from the integer solutions of

$$\xi^2 + 27\eta^2 = 4p, \quad \xi \equiv 1 \pmod{3}.$$

This is an old result due to Libri¹⁾ and is easily proved from known formulae²⁾. Hence

$$(1.3) \quad |N - p + 2| < 2p^{1/2},$$

and so for large p ,

$$(1.4) \quad N = p + O(p^{1/2}).$$

Other results are also known for the congruence,

$$(1.5) \quad x^l + y^l + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

where l is a given integer, which is of interest³⁾ in connection with Fermat's last theorem.

The first precise result of any kind for more general cubic functions than (1.2), excluding the case $f = y^2 - x^3 - a_4$ considered in 1906 by

¹⁾ Journal für Mathematik 9 (1832), S. 270—275.

²⁾ Matthews, Theory of numbers, S. 222—223.

³⁾ See my booklet "Three lectures on Fermat's last theorem" (1922), S. 26.

Jacobsthal, was found recently by Davenport⁴). Though slightly differently stated, it is equivalent to the theorem that the number of solutions of the congruence

$$(1.6) \quad y^2 \equiv (x-a)(x-b)(x-c)$$

is

$$(1.7) \quad N = p + O(p^{3/4}).$$

Throughout this paper, all the coefficients and parameters denote integers. The constants implied in O are absolute constants, independent of p and all the parameters (even though the latter take the values $0, 1, \dots, p-1$) unless otherwise stated. All congruences are taken mod p .

Davenport's result marks an important advance on the previous results dealing with (1.6) which are comparatively rough approximations. His proof is very ingenious. By a different method, I have succeeded in sharpening and generalising his result. Thus I prove that the number of solutions of the congruence

$$(1.8) \quad y^m \equiv a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_{n+1},$$

or say

$$y^m \equiv f(x),$$

is given when p is large by

$$(1.9) \quad N = p + O(p^{\varphi(m,n)}),$$

where, firstly,

$$(1.10) \quad \varphi(2, 3) = \varphi(2, 4) = \frac{3}{3},$$

provided that $f(x)$ is not congruent to an algebraic square, that is, we exclude the case

$$f(x) \equiv b(b_1 x^2 + b_2 x + b_3)^2.$$

Next

$$(1.11) \quad \varphi(3, 3) = \frac{1}{2},$$

provided that $f(x)$ is not congruent to an algebraic cube, that is

$$f(x) \equiv b(b_1 x + b_2)^3.$$

For any fixed $m > 3$,

$$(1.12) \quad \varphi(m, 3) = \frac{3}{4}.$$

Also

$$(1.13) \quad \varphi(2, 5) = \varphi(2, 6) = \frac{7}{8},$$

⁴) On the distribution of quadratic residues (mod p), Journal of the London Mathematical Society 6 (1931), S. 49—54. This paper contains references to the earlier literature. I take this opportunity of thanking Mr. Davenport for his helpful criticism and suggestions on reading my manuscript.

provided that $f(x)$ is not congruent to an algebraic square; and

$$(1.14) \quad \varphi(4, 4) = \frac{5}{6},$$

provided that $f(x)$ is not congruent to an algebraic square.

There is also the particular case of (1.8), namely

$$(1.15) \quad ax^m + by^n + c \equiv 0,$$

where $abc \not\equiv 0 \pmod{p}$; and when, say $m < 0$, $x \not\equiv 0$ and x^m is interpreted mod p . Write

$$m_1 = [m, p-1], \quad n_1 = [n, p-1],$$

where $m_1 > 0$ denotes the highest common factor of m and $p-1$ etc. Then

$$(1.16) \quad |N-p| \leq p^{1/2} [m_1 n_1 (m_1 + 1) (n_1 + 1)]^{1/2},$$

and so a solution always exists if

$$(1.17) \quad p > m_1 n_1 (m_1 + 1) (n_1 + 1).$$

The congruence (1.15) is well known^{4a)} when $m = n$. This case has been discussed by Dickson and I. Schur when $a \equiv b \equiv c$, and by Hurwitz without this restriction. An account of their work has been given by Bachmann⁵⁾.

Finally, take the general cubic congruence in two variables,

$$(1.18) \quad a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 + a_6 x y + a_7 y^2 + a_8 x + a_9 y + a_{10} \equiv 0,$$

or say $f \equiv 0$. It may be supposed that f is irreducible mod p , that is, there do not exist linear, quadratic and cubic functions of x, y with integer coefficients f_1, f_2, f_3 such that

$$f = f_1 f_2 + p f_3$$

identically, or as it is usually written

$$f \equiv f_1 f_2.$$

We may also suppose that f is irreducible algebraically. A function may be reducible algebraically but not mod p . Thus

$$f = x^3 + 2y^3 + 4 - 6xy$$

has a linear factor $x + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}$, but if $p \equiv 1 \pmod{6}$, f is not reducible mod p , and also $f \equiv 0 \pmod{p}$ has no solutions, unless 2 is a cubic residue of p .

Then the number of solutions of (1.18) is given by

$$(1.19) \quad N = p + O(p^{2/3}).$$

^{4a)} Results similar to (1.16) are given by Dickson and Hurwitz.

⁵⁾ Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung (1919), S. 76-95.

When, however, a certain invariant of f is divisible by p , in which case the canonical form of f is

$$f \equiv \sum_{r=1}^3 (b_r x + c_r y + d_r)^3,$$

where b_r, c_r, d_r are any constants, not necessarily rational. (e. g. a particular case is

$$f \equiv y^3 - a_1 x^3 - a_2 x^2 - a_3 x - a_4,$$

where a_1, a_2, a_3, a_4 are integers), the number of solutions is given by

$$(1.11) \quad N = p + O(p^{1/2}).$$

Two questions are immediately suggested by these theorems. The first is their generalisation. Mr. Davenport informs me that by a combination of his methods and mine, he has proved

$$\varphi(4, 4) = \frac{2}{3}, \quad \varphi(m, 4) = \frac{5}{6},$$

$$\varphi(5, 5) = \frac{5}{6},$$

$$\varphi(3, 6) = \varphi(6, 6) = \frac{7}{8},$$

$$\varphi(2, 7) = \frac{19}{20},$$

provided that the exceptional cases are excluded. He has also found some others.

The second question is the best possible results, that is, what are the lowest possible exponents of p in these formulae. Thus in (1.4), it seems likely that no lower exponent than $\frac{1}{2}$ can occur, since probably $\eta = 1$ for an infinity of values of p , that is, $\xi^2 + 27$ is a prime for an infinity of values of ξ . Perhaps some of the other exponents are too great. Prof. Artin informs me that the case $m = 2, n = 3$ in (1.8) arises in some of his investigations and that he thinks the best possible result then is

$$\varphi(2, 3) = \frac{1}{2}.$$

In fact, he gives⁶⁾ the empirical result for $p > 3$,

$$(1.20) \quad -2\sqrt{p} < S < 2\sqrt{p},$$

where

$$(1.21) \quad S = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^3 + ax + b}{p} \right),$$

and the bracket denotes the Legendre symbol of quadratic residuacity. This result is suggested by his study of a function $Z(s)$ analogous to the Riemann zetafunction. The function $Z(s)$ is formed in the field $K(\sqrt{D})$ derived by the adjunction to the field K of the rational polynomials

⁶⁾ Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen, Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 154—296, insbesondere S. 230, 231.

in $t \bmod p$, (i. e. K consists of the rational functions of t with integer coefficients, excluding functions with denominators all of whose coefficients are congruent to zero mod p) of $\sqrt[n]{D}$ where D is a polynomial in t free from square factors and of degree n . A zetafunction

$$Z(s) = Z(s, p, \sqrt[n]{D})$$

exists for every prime $p \geq 3$ and every such D . But now $(1 - p^{-(s-1)})Z(s)$ is a polynomial of degree $n-1$ in $1/p^s$, thus

$$(1.22) \quad [1 - p^{-(s-1)}]Z(s) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\sigma_v}{p^{vs}},$$

where $\sigma_0 = 1$, and

$$\sigma_v = \sum \left[\frac{D}{F_v} \right],$$

where the summation is extended over all polynomials $F_v \bmod p$ prime to D and of the v th degree in t with coefficient of t^v equal to 1. The symbol $\left[\frac{D}{F} \right] = \pm 1$ is that of quadratic residuacity in the field $K(\sqrt[n]{D})$. In the special case $v = 1$, the result can be written as

$$\sigma_1 = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{D(x)}{p} \right),$$

and this is (1.21) when $n = 3$ and $p > 3$.

The new zetafunction has, however, many of the properties associated with the Riemann zetafunction, e. g. a functional equation of the same type. There is also a hypothesis that its non trivial zeros have their real parts equal to $\frac{1}{2}$, which Prof. Artin has actually verified in some forty numerical instances.

Thus when $n = 3$, $p \geq 3$, these zeros are given by the equation

$$1 + \frac{\sigma_1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} = 0,$$

or

$$2p^s = -\sigma_1 \pm \sqrt{\sigma_1^2 - 4p}.$$

Hence the roots are complex and $R(s) = \frac{1}{2}$ if and only if (1.20) holds. My result (1.10) means that for any given $\varepsilon > 0$ and $n = 3, 4$, the function $Z(s, p, D)$ formed from any prime p with $p > p(\varepsilon)$ has no non trivial zeros such that $R(s) > \frac{2}{3} + \varepsilon$.

Clearly

$$S = r - n,$$

where r, n respectively denote the number of values of x ($0 \leq x < p$), for which $x^3 + ax + b$ is a quadratic or non quadratic residue. But

$$2r = N - \varepsilon,$$

where N is the number of solutions of

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b,$$

and ε is the number of solutions for which $y \equiv 0$. Also

$$n + r = p - \varepsilon,$$

and so

$$\begin{aligned} S &= 2r - p + \varepsilon \\ &= N - p. \end{aligned}$$

Hence S is really the error term $O(p^{(2,3)})$.

It may be remarked that Jacobsthal and Davenport work with the sum S and not with N .

2. Let $f(x, y)$ be any polynomial in x, y with integer coefficients. Then N , the number of solutions of

$$(2.1) \quad f(x, y) \equiv 0,$$

is given by

$$pN = \sum_{t=0}^{p-1} \sum_{x,y=0}^{p-1} e[tf(x, y)],$$

where $e(x)$ denotes $e^{\frac{2\pi i x}{p}}$. For clearly the sum in t gives p if $f(x, y) \equiv 0$, and 0 if $f(x, y) \not\equiv 0$. Isolate the term with $t = 0$ and so

$$p(N - p) = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x,y=0}^{p-1} e[tf(x, y)].$$

Hence if r is any positive integer,

$$(2.2) \quad p^r(N - p)^r = \sum_{t=1}^{p-1} e\left[\sum_{s=1}^r t_s f_s\right],$$

where f_s denotes $f(x_s, y_s)$, and the summation means that the variables $t_1, t_2, \dots, t_r$ take all the values $1, 2, \dots, p-1$, and that $x_1, y_1, \dots, x_r, y_r$ run through the values $0, 1, \dots, p-1$. This formula is the starting point for the new results.

I prove now the result (1.10) for the quartic

$$(2.2') \quad y^3 \equiv a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x + a_5.$$

For from (2.2),

$$(2.3) \quad p^6(N - p)^6 = \sum_{t=1}^{p-1} e\left(\sum_{s=1}^6 t_s (y_s^3 - a_1 x_s^4 - \dots - a_5)\right).$$

This result holds of course for all integer values of the a 's. Sum it now for a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 from 0 to $p-1$. This gives p^5 or 0 according as the t 's and x 's satisfy the five congruences

$$(2.4) \quad \begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_6 \equiv 0, \\ t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_6 x_6 \equiv 0, \\ t_1 x_1^2 + t_2 x_2^2 + \dots + t_6 x_6^2 \equiv 0, \\ t_1 x_1^3 + t_2 x_2^3 + \dots + t_6 x_6^3 \equiv 0, \\ t_1 x_1^4 + t_2 x_2^4 + \dots + t_6 x_6^4 \equiv 0, \end{cases}$$

or not. For every such set of values for the x 's and t 's, the sum for the y 's in (2.3) becomes

$$(2.5) \quad \sum_{y=0}^{p-1} e\left(\sum_{s=1}^6 t_s y^s\right).$$

Since

$$\sum_{y=0}^{p-1} e(t y^2) = \sqrt{p} \left(\frac{t}{p}\right) i^{\frac{(p-1)^2}{4}}, \quad t \not\equiv 0,$$

the well known formula for a Gauss' sum, the sum (2.5) has modulus p^3 . Hence from (2.3),

$$\sum_a (N - p)^6 \leq M p^2,$$

where M is the number of solutions of (2.4) in the t 's and x 's.

I prove that $M \leq p^7 + O(p^6)$. Suppose first that no two of the x 's are congruent. Then for otherwise arbitrary values of the x 's, and arbitrary $t_6 \not\equiv 0$, unique values of t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 follow from the congruences (2.4). We must exclude, however, $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \equiv 0$. Clearly there are not more than p^7 sets of solutions in which no two x 's are congruent.

Suppose next $x_1 \equiv x_2$. Then

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2) + t_3 + \dots + t_6 &\equiv 0, \\ x_3(t_1 + t_2) + x_3 t_3 + \dots + x_6 t_6 &\equiv 0, \\ x_3^2(t_1 + t_2) + x_3^2 t_3 + \dots + x_6^2 t_6 &\equiv 0, \\ x_3^3(t_1 + t_2) + x_3^3 t_3 + \dots + x_6^3 t_6 &\equiv 0, \\ x_3^4(t_1 + t_2) + x_3^4 t_3 + \dots + x_6^4 t_6 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Eliminate the t 's. It is clear then that since $t_3 t_4 t_5 t_6 \not\equiv 0$, two of x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 must be congruent, say, either $x_2 \equiv x_3$ or $x_3 \equiv x_4$. If $x_2 \equiv x_3$,

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2 + t_3) + t_4 + t_5 + t_6 &\equiv 0, \\ x_4(t_1 + t_2 + t_3) + x_4 t_4 + \dots + x_6 t_6 &\equiv 0, \\ x_4^2(t_1 + t_2 + t_3) + x_4^2 t_4 + \dots + x_6^2 t_6 &\equiv 0, \\ x_4^3(t_1 + t_2 + t_3) + x_4^3 t_4 + \dots + x_6^3 t_6 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Hence two of x_3, x_4, x_5, x_6 must be congruent. This gives the following possibilities

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &\equiv 0, & x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3, \\ t_4 + t_5 + t_6 &\equiv 0, & x_4 &\equiv x_5 \equiv x_6, \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &\equiv 0, & x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4, \\ t_5 + t_6 &\equiv 0, & x_5 &\equiv x_6, \end{aligned} \right\}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 \equiv 0, \quad x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6.$$

In each of these cases, there are $O(p^0)$ sets of solutions for the t 's and the x 's. Thus for the first case, $t_2, t_3, t_5, t_6, x_1, x_4$ are arbitrary apart from the restriction that $t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \not\equiv 0$. Take next the case when $x_3 \equiv x_4$. Then

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) + t_5 + t_6 &\equiv 0, \\ x_2(t_1 + t_2) + x_4(t_3 + t_4) + x_5 t_5 + x_6 t_6 &\equiv 0, \\ x_2^2(t_1 + t_2) + x_4^2(t_3 + t_4) + x_5^2 t_5 + x_6^2 t_6 &\equiv 0, \\ x_2^3(t_1 + t_2) + x_4^3(t_3 + t_4) + x_5^3 t_5 + x_6^3 t_6 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Hence two of the x_2, x_4, x_5, x_6 are congruent, and we find the new possibility not included above

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &\equiv 0, & x_1 &\equiv x_2, \\ t_3 + t_4 &\equiv 0, & x_3 &\equiv x_4, \\ t_5 + t_6 &\equiv 0, & x_5 &\equiv x_6. \end{aligned} \right\}$$

This also gives $O(p^0)$ sets of solutions. This disposes of all the possible types of solutions in which two x 's are congruent. Hence

$$M \leq p^7 + O(p^0),$$

and so

$$\sum_a (N - p)^6 \leq p^9 + O(p^8).$$

On the left hand side, we isolate the solutions of two special classes of congruences, each containing $\frac{1}{2}p^2(p-1)$ congruences. The first is

$$y^2 \equiv r(x^2 + Ex + F)^2,$$

where r is any quadratic residue of p and $0 \leq E, F < p$; and for which $N = 2p + O(1)$.

The second is

$$y^2 \equiv q(x^2 + Ex + F)^2,$$

where q is any nonquadratic residue of p , and $0 \leq E, F < p$, and for which $N \leq 2$. Hence

$$(2.6) \quad \sum'_a (N - p)^6 = O(p^8),$$

the dash denoting the omission of the special congruences just considered.

Now the same N may arise from different quartics (2.2'). I show, in fact, that are at least $k p^4$ congruences (2.2'), where $k > 0$ is an

absolute constant, such that for the corresponding N , say N' , $|N - N'| \leq 1$. It then follows at once from (2.6) that for the given quartic (2.2'),

$$k p^4 (N - p)^6 = O(p^8),$$

and so

$$N - p = O(p^{2/3}).$$

(The result for

$$y^2 \equiv a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

is the same as is obvious on writing $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x^2}$ for x , y respectively.)

For let A , B , C , D be any integers with $0 \leq A$, B , C , $D < p$ and $AD - BC \not\equiv 0$. There are certainly more than $p^2(p-1)^2$ sets of such integers, for put

$$(2.6') \quad AD - BC = 1, 2, \dots, p-1,$$

and take A , D arbitrarily. We have then at least $p^2(p-1)^2$ sets on taking $B = 1, 2, \dots, p-1$. For given A , B , C , D , let N' denote the number of solutions of the congruence

$$(2.7) \quad Y^2 \equiv a_1 (AX + B)^4 + a_2 (AX + B)^3 (CX + D) + \dots + a_5 (CX + D)^4.$$

Then $|N - N'| \leq 1$. For we can establish a (1.1) correspondence between the solutions of (2.2') and (2.7) by means of the transformation

$$x \equiv \frac{AX + B}{CX + D}, \quad y \equiv \frac{Y}{CX + D}.$$

We may have to exclude, however, one solution of (2.7) if for this $CX + D \equiv 0$, and also one solution of (2.2') if for this $Cx \equiv A$. It still remains to be shown that there are at most k_1 sets of values of A , B , C , D , where k_1 is an absolute constant, for given a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 for which the congruence (2.7) is the same. This is tantamount, with a slight change of notation, to showing that if

$$f(x, y) \equiv a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 x y^3 + a_5 y^4,$$

that there are at most k_1 linear substitutions

$$x \equiv AX + BY, \quad y \equiv CX + DY$$

such that $f(x, y) \equiv f(X, Y)$ identically.

The comparison of coefficients shows that five conditions have to be satisfied by the four constants A , B , C , D . This at once suggests the required result. But I give a rigorous proof which is also perfectly general.

Let $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ be the roots of the equation $f(\Theta, 1) = 0$. Let K be the field defined by them and let P be a prime ideal factor of p in the field K . We have then

$$f(x, y) \equiv f(X, Y) \pmod{P},$$

or

$$a_1 \prod_{r=1}^4 (x - \Theta_r y) \equiv a_1 \prod_{r=1}^4 (X - \Theta_r Y) \pmod{P}.$$

We may suppose $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, and then also $a_1 \not\equiv 0 \pmod{P}$. Hence

$$\prod_{r=1}^4 [(A - \Theta_r C) X + (B - \Theta_r D) Y] \equiv \prod_{r=1}^4 (X - \Theta_r Y) \pmod{P}.$$

Put $X \equiv \Theta_r$, $Y \equiv 1$ both mod P , and then

$$(2.8) \quad (A - \Theta C) \Theta_r + (B - \Theta D) \equiv 0 \pmod{P},$$

that is, when $\Theta = \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, we can find a corresponding Θ_r . There are four relations of the type (2.8) of which a suitable three will either give no values or at most one set of values for the ratios of $A, B, C, D \pmod{P}$ if there are three incongruent numbers mod P among the four $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$.

Thus if

$$\Theta_1 \not\equiv \Theta_2, \Theta_2 \not\equiv \Theta_3, \Theta_3 \not\equiv \Theta_1 \pmod{P},$$

the congruences

$$\left. \begin{aligned} B - \Theta_1 D + \Theta_\lambda A - \Theta_1 \Theta_\lambda C &\equiv 0, \\ B - \Theta_2 D + \Theta_\mu A - \Theta_2 \Theta_\mu C &\equiv 0, \\ B - \Theta_3 D + \Theta_\nu A - \Theta_3 \Theta_\nu C &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \pmod{P}$$

cannot give more than one set of ratios for A, B, C, D unless

$$\left. \begin{aligned} \Theta_\lambda (\Theta_2 - \Theta_3) + \Theta_\mu (\Theta_3 - \Theta_1) + \Theta_\nu (\Theta_1 - \Theta_2) &\equiv 0, \\ \Theta_1 \Theta_\lambda (\Theta_2 - \Theta_3) + \Theta_2 \Theta_\mu (\Theta_3 - \Theta_1) + \Theta_\nu (\Theta_1 - \Theta_2) &\equiv 0, \end{aligned} \right\} \pmod{P}.$$

Hence since $\Theta_2 \not\equiv \Theta_3 \pmod{P}$ etc.,

$$\Theta_\lambda \equiv \Theta_\mu \equiv \Theta_\nu \equiv \Theta \pmod{P},$$

say, and then

$$B + \Theta A \equiv 0, \quad D + \Theta C \equiv 0 \pmod{P}.$$

whence

$$AD - BC \equiv 0 \pmod{P}$$

contrary to (2.6').

The relation

$$\prod_{r=1}^4 (A - \Theta_r C) \equiv 1 \pmod{P}$$

then gives the actual residues of $A, B, C, D \pmod{P}$ and hence their residues $\pmod{p}$ since A, B, C, D are rational integers. The maximum number of sets of values arising is clearly independent of p and the coefficients a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Consider now the exceptional cases. Suppose first that

$$\Theta_3 \equiv \Theta_1, \quad \Theta_4 \equiv \Theta_2 \pmod{P}.$$

Then

$$f(x, y) \equiv a_1(x - \Theta_1 y)^2(x - \Theta_2 y)^2 \pmod{P}.$$

Comparing coefficients, $\Theta_1 + \Theta_2$, and $\Theta_1 \Theta_2$ are both congruent to rational integers mod P , and so

$$f(x, y) \equiv a_1(x^2 + b_1 xy + b_2 y^2)^2 \pmod{P}$$

where b_1, b_2 are rational integers. Hence

$$f(x, y) \equiv a_1(x^2 + b_1 xy + b_2 y^2)^2 \pmod{p}$$

and this is the form we have excluded.

Suppose next that

$$\Theta_4 \equiv \Theta_3 \equiv \Theta_1 \pmod{P}, \quad \Theta_2 \not\equiv \Theta_1 \pmod{P},$$

so that

$$f(x, y) \equiv a_1(x - \Theta_1 y)^3(x - \Theta_2 y) \pmod{P}.$$

Now

$$f(\Theta_1, 1) \equiv 0 \equiv f'(\Theta_1, 1) \equiv f''(\Theta_1, 1) \pmod{P}.$$

But $f''(\Theta_1, 1)$ is not a divisor mod P of both $f(\Theta_1, 1)$, $f'(\Theta_1, 1)$ as then

$$f(x, y) \equiv a_1(x - \Theta_1 y)^4,$$

and so the congruences for Θ_1 mean that Θ_1 and hence also Θ_3 are both congruent to rational integers mod P . Hence

$$f(x, y) \equiv a_1(x - c_1 y)^3(x - c_2 y) \pmod{p}$$

where c_1, c_2 are rational integers. The main theorem (1.10) then becomes trivial since there are $p + O(1)$ solutions of

$$y^2 \equiv a_1(x - c_1)(x - c_2) \pmod{p}.$$

3. I prove now the result (1.13) for the general sextic

$$(3.1) \quad y^2 \equiv a_1 x^6 + a_2 x^5 + a_3 x^4 + a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7.$$

The procedure is the same as for (1.10). We have

$$p^8(N-p)^8 = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{x, y=0}^{p-1} e\left(\sum_{s=1}^8 t_s(y_s^2 - a_1 x_s^6 - \dots - a_7)\right),$$

$$\sum_a (N-p)^8 \leq \frac{1}{p^8} \cdot p^7 \cdot p^4 \cdot M,$$

where M is the number of solutions of the seven congruences in the twelve variables x_s, t_s

$$\sum_{s=1}^8 t_s x_s^r \equiv 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 6).$$

Now $M \leq p^9 + O(p^8)$, for as before, we can take $t_8, x_1, x_2, \dots, x_8$ nearly arbitrary. The cases $x_1 \equiv x_2$ etc. lead to solutions such as

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &\equiv 0, & t_3 + t_4 &\equiv 0, & t_5 + t_6 &\equiv 0, & t_7 + t_8 &\equiv 0, \\ x_1 &\equiv x_2, & x_3 &\equiv x_4, & x_5 &\equiv x_6, & x_7 &\equiv x_8, \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &\equiv 0, & t_4 + t_5 + t_6 &\equiv 0, & t_7 + t_8 &\equiv 0, \\ x_1 &\equiv x_3 \equiv x_5, & x_4 &\equiv x_5 \equiv x_6, & x_7 &\equiv x_8, \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 &\equiv 0, & t_7 + t_8 &\equiv 0, \\ x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6, & x_7 &\equiv x_8, \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &\equiv 0, & t_5 &\equiv t_6, & t_7 &\equiv t_8, \\ x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4, & x_5 &\equiv x_6, & x_7 &\equiv x_8, \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 &\equiv 0, & t_6 + t_7 + t_8 &\equiv 0, \\ x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5, & x_6 &\equiv x_7 \equiv x_8, \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &\equiv 0, & t_5 + t_6 + t_7 + t_8 &\equiv 0, \\ x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4, & x_5 &\equiv x_6 \equiv x_7 \equiv x_8. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

These give clearly $O(p^8)$ solutions. We isolate as before the special $\frac{1}{2}p^3(p-1)$ congruences

$$y^2 \equiv r(x^3 + Ex^2 + Fx + G)^2,$$

where r is any quadratic residue and $0 \leq E, F, G < p$, for which $N = 2p + O(1)$; and also the $\frac{1}{2}p^3(p-1)$ congruences

$$y^2 \equiv q(x^3 + Ex^2 + Fx + G)^2,$$

where q is any nonquadratic residue and for which $N \leq 3$. Hence

$$(3.2) \quad \sum'_a (N-p)^8 = O(p^{11}),$$

the dash denoting the omission of the special congruences above.

Let $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5, \Theta_6$ be the six roots of the equation

$$a_1\Theta^6 + a_2\Theta^5 + a_3\Theta^4 + a_4\Theta^3 + a_5\Theta^2 + a_6\Theta + a_7 = 0,$$

and let P be a prime ideal factor of p in the field determined by the Θ 's. If there are at least three incongruent Θ 's mod P , and we note that the case typified by

$$\Theta_4 \equiv \Theta_1, \quad \Theta_5 \equiv \Theta_2, \quad \Theta_6 \equiv \Theta_3 \pmod{P}$$

has been really excluded in the special congruences above, then as before the same N or rather N' with $|N' - N| \leq 1$ arises $k_2 p^4$ times where k_2 is an absolute constant greater than zero and so

$$(N-p)^8 = O(p^7),$$

the desired result.

If there are only two incongruent Θ 's mod P , the sextic has the form

$$a_1(x - \Theta_1 y)^s (x - \Theta_2 y)^{6-s} \pmod{P} \quad (s = 0, 1, \dots, 6)$$

and hence similarly as before, the form

$$a_1(x - b_1 y)^s (x - b_2 y)^{6-s} \pmod{p} \quad (s = 0, 1, \dots, 6)$$

where b_1, b_2 are rational integers. The main result is then trivial when $s = 1, 3, 5$ while the cases $s = 0, 2, 4, 6$ are excluded as they occur among the special congruences.

The result $\varphi(2, 5) = \varphi(2, 6)$ is proved in the same way as

$$\varphi(2, 3) = \varphi(2, 4).$$

If we had taken the general polynomial of the $2n$ 'th degree,

$$y^3 \equiv a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_{2n+1},$$

we should find in the same way

$$\sum_a (N - p)^{2n+2} = p^{3n+3} + O(p^{3n+2}),$$

and on allowing for the reducible congruences,

$$(3.3) \quad \sum'_a (N - p)^{2n+2} = O(p^{3n+2}).$$

Hence

$$(N - p)^{2n+2} = O(p^{3n+2}),$$

and gives a trivial result for $n \geq 4$.

4. For fixed $m > 3$, the details for

$$(4.1) \quad y^m \equiv a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

are much simpler. For now

$$\sum_a (N - p)^4 = \sum_{y=0, t=1}^{p-1} e(t_1 y_1^m + t_2 y_2^m + t_3 y_3^m + t_4 y_4^m),$$

the summation in the t 's referring to the solutions in t ' x of the four congruences,

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &\equiv 0, \\ x_1 t_1 + \dots + x_4 t_4 &\equiv 0, \\ x_1^3 t_1 + \dots + x_4^3 t_4 &\equiv 0, \\ x_1^3 t_1 + \dots + x_4^3 t_4 &\equiv 0. \end{aligned}$$

From these

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 &\equiv 0, & t_3 + t_4 &\equiv 0 \\ x_1 &\equiv x_2, & x_3 &\equiv x_4 \end{aligned} \right\},$$

etc. or

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &\equiv 0 \\ x_1 &\equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \end{aligned} \right\},$$

so that there are $O(p^4)$ solutions.

Hence

$$\sum_a (N - p)^4 = O(p^6),$$

on using the result

$$(4.2) \quad \sum_{y=0}^{p-1} e(t y^m) = O(p^{1/2}), \quad t \not\equiv 0$$

of which a proof is given in Landau's book⁷). It is also easy to see that we need not use (4.2) if we note that

$$\sum_{t=1, \delta_1, \delta_2=0}^{p-1} e[t(\beta_1^m - \beta_2^m)] = O(p^2),$$

since the sum for t gives $p-1$ if $\beta_1^m \equiv \beta_2^m$, and -1 if $\beta_1^m \not\equiv \beta_2^m$.

Also the same $N - O(1)$ arises $k_3 p^3$ times, k_3 an absolute constant, namely on putting

$$y \equiv CY, \quad x \equiv AX + B.$$

Now the actual equating of coefficients shows easily that the form (4.1) is changed into itself by this transformation only $O(1)$ times; hence

$$N - p = O(p^{3/4}).$$

The result $N - p = O(p^{2/4})$ arises when $m = 3$, for now the same $N - O(1)$ arises from $k_4 p^4$ congruences namely,

$$(4.3) \quad Y^3 \equiv a_1 (AX + B)^3 + a_2 (AX + B)^2 (CX + D) \\ + a_3 (AX + B) (CX + D)^2 + a_4 (CX + D)^3.$$

It is easy to see that there are at most k_5 sets of values for A, B, C, D for which the form (4.3) is the same provided that the roots of the equation

$$a_1 \Theta^3 + a_2 \Theta^2 + a_3 \Theta + a_4 = 0$$

are incongruent mod P .

When two of the roots are equal the congruence (4.1) becomes

$$y^3 \equiv a_1 (x - b_1)^2 (x - b_2),$$

or say

$$y_1^3 \equiv a_1 (x - b_2)/(x - b_1).$$

It is trivial that this has $p + O(1)$ solutions since we can take y_1 arbitrarily.

When all three of the roots are congruent mod P , the congruence becomes

$$y^3 \equiv a_1 (x - b_1)^3$$

and this is the special case excluded.

Take next (1.14) for the congruence

$$y^4 \equiv a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5.$$

⁷) Vorlesungen über Zahlentheorie I (1927), 297, Satz 311. Simpler proofs and new results for exponential sums are given in my paper "On sums analogous to Gauss' sums" which will appear, I hope, in the Quarterly Journal. (Sept. 1932, Vol. 3.)

Apply the formulae corresponding to (2. 3). We still have (2. 4) but instead of (2. 5), we require (4. 2).

Hence

$$p^6 \sum_a (N - p)^6 = p^5 O, (p^7) O (p^3),$$

and so

$$\sum_a (N - p)^6 = O (p^3).$$

There are still $k p^4$ congruences giving practically the same N , i. e. $N - O(1)$, and so

$$N - p = O (p^{5/6}).$$

Next for (1. 15) for the congruence

$$a x^m + b y^n + c \equiv 0.$$

Here

$$\sum_{a, b, c} (N - p)^3 = p M,$$

where M is the number of solutions of

$$t_1 + t_2 \equiv 0, \quad t_1 x_1^m + t_2 x_2^m \equiv 0, \quad t_1 y_1^n + t_2 y_2^n \equiv 0.$$

This gives $p - 1$ sets of values for t_1, t_2 . Then if x_1 is arbitrary, x_2 has $m_1 = [m, p - 1] > 0$, values or at most one according as $x_1 \not\equiv 0$ or $x_1 \equiv 0$. Similarly for y_1, y_2 etc. Hence

$$M \leq (p - 1) (1 + m_1 (p - 1)) (1 + n_1 (p - 1)).$$

The same value for an $N_{a, b, c}$ occurs at least $(p - 1)^3 / m_1 n_1$ times. For $N_{a, b, c}$ is also the number of solutions of each of the congruences

$$a h f^m x^m + b h g^n y^n + c h \equiv 0,$$

where $h = 1, 2, \dots, p - 1$ and f^m runs through the $(p - 1) / m_1$ residues of m th powers mod p , and similarly for g^n . Hence

$$(p - 1)^3 (N - p)^2 \leq m_1 n_1 p (p - 1) (1 + m_1 (p - 1)) (1 + n_1 (p - 1))$$

$$(N - p)^2 \leq p m_1 n_1 \left(m_1 + \frac{1}{p - 1} \right) \left(n_1 + \frac{1}{p - 1} \right)$$

and so

$$|N - p| \leq p^{1/2} [m_1 n_1 (m_1 + 1) (n_1 + 1)]^{1/2}.$$

It is easy to see in the same way that if N_ρ is the number of solutions of the more general congruence in ρ variables

$$a_1 x_1^{l_1} + a_2 x_2^{l_2} + \dots + a_\rho x_\rho^{l_\rho} + a \equiv 0,$$

where $a_1 a_2 \dots a_\rho a \not\equiv 0$, and $x \equiv 0$ is omitted when the corresponding l is negative; then

$$|N - p^{\rho-1}| \leq p^{\rho-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\rho \left(\lambda_1 + \frac{1}{p - 1} \right) \dots \left(\lambda_\rho + \frac{1}{p - 1} \right),$$

where $\lambda_1 = [p, l_1] > 0$ etc.

5. We consider now the general cubic congruence (1.18). If we apply the formula (2.2) with $r = 4$ and then sum for the ten parameters $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, we find

$$\sum_a (N - p)^4 = Mp^6,$$

where M is the number of solutions in the twelve variables t_s, x_s, y_s ($s = 1, 2, 3, 4$) of the ten congruences

$$\sum_{s=1}^4 t_s x_s^\lambda y_s^\mu \equiv 0,$$

where

$$\begin{aligned} \mu = 0, \lambda = 0, 1, 2, 3; \quad \lambda = 0, \mu = 1, 2, 3; \\ \lambda = 1, \mu = 1, 2; \quad \lambda = 2, \mu = 1. \end{aligned}$$

Their solutions are given by combinations such as

$$\begin{aligned} & t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0, \\ & x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4, \quad y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv y_4, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ & t_1 + t_2 \equiv 0, \quad t_3 + t_4 \equiv 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ & x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4, \quad y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv y_4, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ & t_1 + t_2 \equiv 0, \quad t_3 + t_4 \equiv 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ & x_1 \equiv x_2, x_3 \equiv x_4, \quad y_1 \equiv y_2, y_3 \equiv y_4. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \end{aligned}$$

We have clearly $O(p^9)$ solutions and so

$$\sum_a (N - p)^4 = O(p^{12}).$$

There will now be at least $k p^9$ congruences (k an absolute constant > 0), arising from the substitutions

$$x \equiv \frac{A_1 X + B_1 Y + C_1}{A X + B Y + C}, \quad y \equiv \frac{A_2 X + B_2 Y + C_2}{A X + B Y + C},$$

giving rise to nearly the same N , i. e. $N - O(1)$, and so $N - p = O(p^{3/4})$ which is not so good as (1.19).

When the invariant of the cubic mentioned in § 1 is divisible by p , there are effectively only nine constants a and the $O(p^{12})$ is replaced by $O(p^{11})$ and the result. But instead of developing this theory, as I did originally before I found the sharper result (1.19), I observe that the required result follows from (1.10) as soon as we know one solution of the ternary congruence (1.18) say x_1, y_1 . For writing $x + x_1, y + y_1$ for x, y , we may suppose that the solution is 0, 0, i. e. the term a_{10} in $f(x, y)$ is congruent to zero. Put now $y \equiv tx \pmod{p}$ and we have a quadratic congruence for x , say, $x^2 f_3(t) + x f_2(t) + f_1(t) \equiv 0$. On solving we have x expressed by the square root of a quartic in t and so the result (1.10) applies. The existence of one solution follows either

from the cruder result just mentioned or by applying (1. 13). For we can take the cubic to be of the form

$$a_1 x^3 + x(a_2 y^2 + a_3 y + a_4) + a_5 y^3 + a_6 y^2 + a_7 y + a_8 \equiv 0.$$

By a known formula this will have a solution for x if a certain sextic congruence, that is $m = 2$, $n = 6$, in (1. 8) has solutions and this is so by (1. 13). For it is known that the cubic congruence

$$x^3 + g x + h \equiv 0,$$

where g, h are integers, will certainly have at least⁸⁾ one solution if $-4g^3 - 27h^2$ is a quadratic nonresidue of p . The result then follows.

⁸⁾ See H. J. S. Smith, Collected Works Vol. I, S. 145.

(Eingegangen am 25. Februar 1932.)

Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Es gibt in der Funktionentheorie eine ganze Reihe sehr allgemeiner Aussagen über den Wertevorrat einer analytischen Funktion. Die Mehrzahl dieser zum Teil grundlegenden Sätze hat ihren gemeinsamen Ursprung in dem folgenden elementaren Ansatz, den man vielleicht am besten als Majorantenprinzip der Funktionentheorie charakterisieren kann:

Es sei $W = F(z)$ eine im Einheitskreise $|z| < 1$ meromorphe und im Kleinen schlichte Funktion, mit $F(0) = W_0$ ¹⁾. Es wird also der Kreis $|z| < 1$ durch sie auf ein (nicht notwendig schlichtes) einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}(F)$ über der Riemannschen W -Kugel abgebildet.

Es sei ferner $w = f(z)$ eine im $|z| < 1$ meromorphe (aber nicht notwendig im Kleinen schlichte) Funktion, für die ebenfalls $f(0) = W_0$ ist.

$F(z)$ heißt Majorante von $f(z)$ in $|z| < 1$, symbolisch

$$(1) \quad f(z) < F(z) \quad \text{in} \quad |z| < 1,$$

wenn, zunächst anschaulich gesprochen, der Wertevorrat $\{w\}$ von $f(z)$ sich eindeutig und stetig (aber nicht notwendig schlicht) von W_0 aus in $\mathfrak{G}(F)$ verteilen läßt. Präzise gesagt, soll die Funktion

$$(2) \quad \varphi(z) = F^{-1}(f(z))$$

im $|z| < 1$ eindeutig regulär sein. Übrigens ist dann ersichtlich

$$(3) \quad |\varphi(z)| < 1 \quad \text{in} \quad |z| < 1; \quad \varphi(0) = 0.$$

Dieser eben formulierte Ansatz des Majorantenprinzips wird nun zu Wertevorratsaussagen in zwei geradezu diametral entgegengesetzten Richtungen ausgewertet.

I.

Die erste Richtung des Majorantenprinzips ist als sogenanntes Lindelöfsches Prinzip²⁾ wohlbekannt.

¹⁾ Es darf auch $W_0 = \infty$ sein.

²⁾ E. Lindelöf, Memoire sur certaines inégalités ..., Acta Soc. Sc. Fenn. 35 (1908), Nr. 7; vgl. auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie (1927 bei Teubner), Bd. II, S. 117.

Man setzt für die zu untersuchende Funktion $f(z)$ eine Beschränkung ihres Wertevorrats von der Form (1) voraus. Man kann dann genauere Angaben über die Werteverteilung von $f(z)$ im $|z| < 1$ machen.

1. Den ersten Schritt liefert hierbei das elementare Schwarzsche Lemma³⁾, angewandt auf die Funktion $\varphi(z)$ aus (2). Es ergibt für $|z| < 1$ die Ungleichung

$$(4) \quad |F^{-1}(f(z))| \leq |z|,$$

und hier ist das Gleichheitszeichen nur für $\varphi(z) \equiv z e^{i\vartheta}$, das ist

$$(5) \quad f(z) \equiv F(z e^{i\vartheta}), \quad \vartheta \text{ beliebig reell,}$$

richtig.

Bezeichnet also $\mathfrak{G}_r(F)$ für $0 < r < 1$ den Teil von $\mathfrak{G}(F)$, welcher bei der Abbildung durch $F(z)$ den $|z| \leq r$ entspricht, so liegt $f(z)$ für $|z| \leq r$ bei der genannten stetigen Ausbreitung des Wertevorrates $\{w\}$ in $\mathfrak{G}_r(F)$. Für $|z| = r$ werden dabei Randpunkte nur im Falle (5) angenommen.

In dieser einfachsten Form ist das Lindelöfsche Prinzip in zahlreichen Abhandlungen⁴⁾ systematisch ausgenutzt worden. So erhält man bekanntlich, um eine besonders wichtige Anwendung zu nennen, wenn für $F(z)$ eine geeignete elliptische Modulfunktion gewählt wird, den Schottkyschen Satz⁵⁾ aus dem Picardschen Ideenkreise.

2. Man kann aber das Lindelöfsche Prinzip feiner ausgestalten, wenn man noch die genauere Kenntnis der Eigenschaften von $\varphi(z)$, also von $f(z)$ und $F(z)$ in $z = 0$ heranzieht. Ist

$$(6) \quad \varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad |z| < 1,$$

und kennt man die ersten K -Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$, so kann man bekanntlich⁶⁾ in Verschärfung des Schwarzschen Lemmas einen Kreis $\mathfrak{R}(z; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$ angeben, in dem $\varphi(z)$ liegen muß. Und $f(z)$ liegt dann in dem zugehörigen Teilgebiet von $\mathfrak{G}(F)$, welches dem genannten Kreise bei der Abbildung durch $F(z)$ entspricht. Die Randpunkte werden nur bei wohlangebbaren Funktionen wirklich erreicht. Bei wachsendem K bilden diese Gebiete natürlich eine Gebietsschachtelung, die gegen den

³⁾ H. A. Schwarz, Zur Theorie der Abbildung, Ges. Abhdlg. Bd. II, S. 108 ff., insbesondere S. 110—111; L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 114.

⁴⁾ Genannt seien etwa die ausführlichen Abhandlungen von P. Koebe, Über das Schwarzsche Lemma ..., Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 52—84 (Literaturnachweis auf S. 52!). — I. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. of the London Math. Soc. 23 (1924), S. 481—519.

⁵⁾ F. Schottky, Über den Picardschen Satz ..., Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. (1904), S. 1244—1262.

⁶⁾ Vgl. etwa L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 145.

Punkt $w = f(z)$ auf $\mathfrak{G}(F)$ konvergiert. Besonders beachtenswert aber ist, daß diese Gebiete nicht nur von $|z|$, sondern von z selbst abhängig sind.

Wir wollen hier nur auf den Fall $K = 1$ etwas näher eingehen. Er-sichtlich ist für die in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\frac{\varphi(z)}{z}$ die Majoranten-beziehung

$$(7) \quad \frac{\varphi(z)}{z} < \frac{z - \alpha_1}{z \bar{\alpha}_1 - 1} \quad \text{in } |z| < 1$$

richtig. Nach dem Lindelöfschen Prinzip liegt also $\frac{\varphi(z)}{z}$ für $|z| \leq r < 1$

in demjenigen Kreise $\mathfrak{R}_r(\alpha_1)$, in den die Substitution $\frac{z - \alpha_1}{z \bar{\alpha}_1 - 1}$ den Kreis $|z| = r$ abbildet. Der Rand wird dabei nur von den Funktionen $\frac{\varphi(z)}{z} = \frac{z e^{i\vartheta} - \alpha_1}{z e^{i\vartheta} \bar{\alpha}_1 - 1}$ erreicht.

Für die Anwendungen empfiehlt sich die Normierung $\alpha_1 \geq 0$ ⁷⁾, die man bei geeignetem reellen φ durch Übergang von der ursprünglichen Majorante $F(z)$ zur neuen $F(z e^{i\varphi})$ stets erzielen kann. Dann ist $\mathfrak{R}(z; \alpha_1)$ der Kreis über der Strecke

$$(8) \quad z \cdot \frac{r - \alpha_1}{r \alpha_1 - 1}, \quad z \cdot \frac{r + \alpha_1}{r \alpha_1 + 1}; \quad 0 < |z| = r < 1$$

als Durchmesser. Und die zum Rande gehörigen Extremalfunktionen sind die Funktionen

$$(9) \quad f(z) \equiv F\left(z \cdot \frac{z e^{i\vartheta} - \alpha_1}{z e^{i\vartheta} \bar{\alpha}_1 - 1}\right).$$

Sei etwa in $|z| < 1$

$$(10) \quad f(z) = 1 + az + \dots; \quad a \geq 0,$$

und daselbst $\Re f(z) \geq 0$. Dann ist in $|z| < 1$

$$(11) \quad f(z) < \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + \dots = F(z),$$

und es wird $\alpha_1 = \frac{f'(0)}{F'(0)} = \frac{a}{2} \geq 0$. Ubrigens ist $a \leq 2$ ⁷⁾. Man erhält so, etwa für $z = r$, $0 < r < 1$, nach leichter Rechnung, daß $f(r)$ in dem Kreise über der Strecke

$$(12) \quad \frac{1 - r^2}{1 - ar + r^2}, \quad \frac{1 + ar + r^2}{1 - r^2}$$

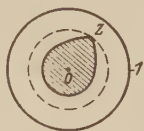
als Durchmesser liegt. Die Randpunkte dieses Kreises werden für $z = r$ nur von den nach (9) ersichtlichen Extremalfunktionen angenommen. Das (und das entsprechende für beliebiges z) ist eine unter Umständen nicht unwichtige Verschärfung der bekannten Carathéodoryschen Ungleichungen⁸⁾ für die Funktionen positiven Realteils.

⁷⁾ Es ist, wenn W_0 endlich ist, $\alpha_1 = \frac{f'(0)}{F'(0)}$ und übrigens $|\alpha_1| \leq 1$.

⁸⁾ Vgl. etwa L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 119; siehe auch (14) dieser Arbeit!

3. Man kann nun aber durch das in 2. geschilderte Verfahren eine *Verschärfung des Lindelöfschen Prinzips* (in seiner unter 1. genannten einfachsten Form) von *sehr allgemeinem Charakter* erhalten. Verzichtet man nämlich auf die genaue Kenntnis von α_1 und verlangt nur die Normierung $\alpha_1 \geq 0$, so besagt das, wenn etwa W_0 endlich und $f'(0) \neq 0$ ist, daß die beiden Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ in $z = 0$ eine Abbildung von gleichem Linienelement liefern. Man benötigt zu dieser Normierung also nur die Kenntnis des genannten Linienelements; das zugehörige $F(z)$ heiße dann kurz *gleichnormiert*.

Ist also $F(z)$ gleichnormiert, so liegt doch $\frac{\varphi(z)}{z}$ für $|z| = r < 1$ jedenfalls in der Vereinigungsmenge $z \mathfrak{B}_r$ aller Kreise $\mathfrak{R}_r(\alpha_1)$ mit $0 \leq \alpha_1 \leq 1$. Dies ist ein birnenförmiger Bereich (Figur!), der von der Enveloppe der genannten Kreisschaar berandet ist. Für diese findet man nach leichter Rechnung, die im § 1 dieser Arbeit dargestellt ist, in der $z = x + iy$ -Ebene die Darstellung

Fig. 1. $z \mathfrak{B}_r$.

$$(13) \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_1(1+r^2)}{1+\alpha_1^2 r^2} \\ y = \pm \frac{r(1-\alpha_1^2)}{1+\alpha_1^2 r^2} \end{cases}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1.$$

Die Berandung besteht also aus drei Kreisbögen. Es ergibt sich so der folgende sehr allgemeine

Satz A. *Besitzt $f(z)$ im $|z| < 1$ die gleichnormierte Majorante $F(z)$, so liegt der Wert $w = f(z)$ in demjenigen Bereiche $\mathfrak{G}_{|z|}(F)$, der bei der Abbildung des $|z| < 1$ durch $F(z)$ dem Bereiche $z \mathfrak{B}_{|z|}$ aus (13) entspricht. Dabei werden die Randpunkte von $\mathfrak{G}_{|z|}(F)$ nur von den Funktionen (9) erreicht.*

Das Lindelöfsche Prinzip in der durch diesen Satz verschärften Form scheint mir nun recht beachtenswert zu sein. Einmal ist es ersichtlich kaum schwieriger zu handhaben als sonst. Dabei wirken sich jetzt aber die Abbildungseigenschaften der Majorante natürlich viel inniger auf die Beschränkung des Wertevorrates von $f(z)$ aus, so daß man bei festem z (und nicht nur bei festem $|z|$) im allgemeinen wesentlich schärfere Aussagen, als dies sonst möglich ist, erzielen kann. Man beachte insbesondere, daß der Rand von $z \mathfrak{B}_{|z|}$ einen vollen Halbkreis vom Radius $|z|^2$ um 0 (statt sonst $|z|$) enthält; ferner, daß $\mathfrak{G}_{|z|}(F)$ im allgemeinen nicht gerade das Maximum der $|F(\zeta)|_{|\zeta|=|z|}$ enthalten wird, was für die Abschätzung von $|f(z)|$ von Wichtigkeit ist.

Wir dürfen hier auf ein näheres Eingehen auf die Anwendungen in der üblichen Richtung verzichten, obschon sie im Einzelfalle (z. B. beim Schottkyschen Satze) gewiß Interesse verdienen. Als Beispiel diene

die Verschärfung der bekannten (Harnack -) Carathéodoryschen Ungleichungen⁸⁾

$$(14) \quad \frac{1-r}{1+r} \leq \Re f(z) \leq \frac{1+r}{1-r}; \quad |z| = r$$

für die Funktionen (10) zu etwa

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{1-r^2}{1+r^2} \leq \Re f(r) \leq \frac{1+r}{1-r}, \\ \frac{1-r}{1+r} \leq \Re f(-r) \leq \frac{1+r^2}{1-r^2}. \end{cases}$$

4. Es seien noch einige weitere Verschärfungsmöglichkeiten des Lindelöfschen Prinzips wenigstens erwähnt. Man kann z. B. in der üblichen Weise das Schwarzsche Lemma durch Heranziehung der weiteren Nullstellen von $\varphi(z)$, das ist (gewisser) weiterer W_0 -Stellen von $f(z)$ schärfer ausnutzen⁹⁾. Oder man wird bei der Diskussion der Berandung des Wertevorrats $\{w\}$ von $f(z)$ mit Vorteil von einer bekannten Ergänzung des Schwarzschen Lemmas, die von Herrn Julia¹⁰⁾ stammt, Gebrauch machen. Endlich ist, wenn etwa $f(z)$ und $F(z)$ Entwicklungen um $z = 0$ mit reellen Koeffizienten besitzen, eine Verschärfung des Schwarzschen Lemmas anwendbar, welche ich unlängst für die $\varphi(z)$ mit reellen Koeffizienten α_k angegeben habe¹¹⁾. Es bedarf ferner kaum des Hinweises, daß unsere Auszeichnung des Einheitskreises $|z| < 1$ als Grundgebiet und die seines Mittelpunktes $z = 0$ nur für die Einfachheit der Aussagen wesentlich ist.

II.

Die zweite Wendung des Majorantenprinzips, obschon in Einzelfällen und zwar gerade den wichtigsten den Kennern dieses ganzen Fragenkreises wohlbekannt, hat bisher nicht wie das Lindelöfsche Prinzip die ihr ohne Zweifel gebührende Würdigung als eine der fruchtbarsten elementaren funktionentheoretischen Methoden (z. B. in der Lehrbuchliteratur) erhalten. Ich habe diese Methode in einer Abhandlung, die kürzlich in der Schriftenreihe der Königsberger Gelehrten-Gesellschaft¹²⁾ erschien (*im folgenden mit K. G. zitiert*), systematisch dargestellt und

⁹⁾ Vgl. etwa L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 120; siehe auch II, 4 dieser Einleitung!

¹⁰⁾ G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, Acta Mathem. **42** (1920), S. 349. Vgl. auch L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 125.

¹¹⁾ W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 93—121; siehe S. 110/111.

¹²⁾ W. Rogosinski, Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion, Schriften der Königsberger Gelehrten-Gesellschaft, Naturwiss. Klasse, 8. Jahr (1931), Heft 1 (bei Max Niemeyer, Halle), S. 1—31.

ihre Fruchtbarkeit durch eine Fülle von Anwendungen sehr allgemeiner Art zu belegen gesucht. Auch in der vorliegenden Arbeit will ich auf dieses *zweite Majorantenprinzip* etwas genauer eingehen und es in gewissen Richtungen (über das in K. G. Dargestellte hinausgehend) vertiefen. Die Brauchbarkeit auch dieser neuen Variante hoffe ich wieder durch eine Reihe von Anwendungen belegen zu können.

Der Hauptgedanke des zweiten Majorantenprinzips ist der folgende: Es wird jetzt keine Beschränkung der Form (1) vorausgesetzt, sondern man sucht im Gegenteil eine solche Annahme ad absurdum zu führen. Das bedeutet natürlich eine positive Aussage über den Wertevorrat $\{w\}$ der zu untersuchenden Funktion $f(z)$. Zugleich handelt es sich jetzt nicht, wie beim Lindelöfschen Prinzip, um durch eine Majorantenrelation definierte Funktionsklassen, sondern um Aussagen *ganz allgemeiner Natur*, die in ihrer feinsten Form, z. B. den Picardschen Satzkreis umfassen.

1. In der einfachsten Form geschieht dies so:

Aus (3) folgt nach Cauchy

$$(16) \quad |\alpha_1| \leq 1,$$

und das Gleichheitszeichen ist nur für die Funktionen (5) richtig. Dabei ist (16), falls etwa W_0 endlich ist, mit

$$(17) \quad |f'(0)| \leq |F'(0)|$$

gleichbedeutend.

Sind also $f(z)$ und $F(z)$ zwei sonst beliebige Funktionen der eingangs dieser Arbeit erklärten Art, für welche die Ungleichung (17) nicht gilt, so ist auch die Majorantenbeziehung (1) nicht richtig. Denkt man sich die Funktion $F(z)$, die „Vergleichsfunktion“, fest gegeben, $f(z)$ dagegen im übrigen beliebig, so wird jedes solche $f(z)$ gewiß Werte w annehmen, die außerhalb des „Vergleichsgebietes“ $\mathfrak{G}(F)$ liegen.

Die bekannteste und wichtigste Anwendung dieses elementaren Gedankenganges ist, um nur ein Beispiel zu nennen, der Landausche Satz¹³⁾ aus dem Picardschen Ideenkreise. Hier ist als Vergleichsfunktion eine gewisse elliptische Modulfunktion gewählt (vgl. K. G., § 4).

Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, daß W_0 von den Funktionen $f(z)$ in $z = 0$ nur von der ersten Ordnung angenommen wird, so empfiehlt es sich, was ersichtlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, die Normierung

$$(18) \quad f(0) = F(0) = 0; \quad f'(0) = 1$$

vorauszusetzen.

¹³⁾ E. Landau, Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes, Sitzgs.-Ber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1904, S. 1118–1333; L. Bieberbach, l. c., Bd. II, S. 216.

Die im $|z| < 1$ meromorphen Funktionen, die dieser Normierung genügen, mögen die Klasse $\mathfrak{M}$ definieren; sind sie überdies im Kleinen schlicht, wie das bei den Vergleichsfunktionen $F(z)$ der Fall sein muß, so sprechen wir von der (Unter-)Klasse $\mathfrak{M}_s$. Das zweite Majorantenprinzip in seiner einfachsten und trotzdem fundamentalen Form läßt sich jetzt wie folgt aussprechen:

Satz B. Ist $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$, $F(z)$ aus $\mathfrak{M}_s$, $0 < \varrho \leq 1$, so kann $\varrho F(z)$ keine Majorante von $f(z)$ in $|z| < 1$ sein. Für $\varrho = 1$ ist der Fall $f(z) \equiv F(z)$ auszuschließen.

Dieser Satz (K. G. Satz A), von demselben elementaren Charakter wie das Lindelöfsche Prinzip in seiner einfachsten Form, ist der gemeinsame Ursprung einer großen Fülle wichtiger allgemeiner funktionentheoretischer Aussagen. Man hat nur geeignete Vergleichsfunktionen $F(z)$ heranzuziehen. Auf seine Anwendungen (vgl. K. G.) gehe ich aber hier nicht mehr ein.

2. Entsprechend wie beim Lindelöfschen Prinzip unter I, 2 kann man das zweite Majorantenprinzip verfeinern, wenn man die Kenntnis der K ersten Koeffizienten α_k aus (6) zur Verschärfung der Cauchyschen Ungleichung (17) heranzieht. Hierher gehört insbesondere der Fall $\alpha_1 = 0$, wo also $f(z)$ den Wert W_0 in $z = 0$ mehrfach annimmt. Die gewünschten Ungleichungen, nebst Diskussion des Gleichheitszeichens in ihnen, sind leicht zu gewinnen, da man nach Herrn I. Schur¹⁴⁾ bekanntlich den genauen Variabilitätsbereich der Koeffizienten α_k einer den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügenden Funktion $\varphi(z)$ beherrscht (vgl. K. G., insbesondere Satz B!).

Wir wollen hier nur auf den nächst einfachen Fall $K = 1$ eingehen. Wegen

$$(a) \quad \frac{\varphi(z)}{z} = \alpha_1 + \alpha_2 z + \dots; \quad \frac{z - \alpha_1}{z \bar{\alpha}_1 - 1} = \alpha_1 - z(1 - |\alpha_1|^2) + \dots; \quad |z| < 1$$

folgt aus (7) nach (17) die Ungleichung

$$(19) \quad |\alpha_2| \leq 1 - |\alpha_1|^2.$$

Und hier ist nach (5) das Gleichheitszeichen nur für

$$(20) \quad \varphi(z) = z \frac{z e^{i\vartheta} - \alpha_1}{z e^{i\vartheta} \bar{\alpha}_1 - 1}; \quad \vartheta = \arccos(-\alpha_2) \quad (15)$$

richtig.

Es seien nun $f(z)$ bzw. $F(z)$ zwei Funktionen aus $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_s$,

$$(21) \quad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$$

¹⁴⁾ I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journ. f. die reine u. angew. Math. 147 (1916), S. 206–232, Satz VIII.

¹⁵⁾ Für $\alpha_2 = 0$ ist dann $|\alpha_1| = 1$, $\varphi(z) = z e^{i\vartheta}$.

ihre Entwicklungen um $z = 0$. Wenn

$$(22) \quad f(z) < \varrho F(z) \quad \text{in} \quad |z| < 1; \quad \varrho \geq 1 \quad (\text{nach Satz B!}),$$

gilt, ist (19) mit

$$(23) \quad |a_2 \varrho - A_2| \leq \varrho^2 - 1$$

gleichbedeutend. Negative Formulierung gibt also den

Satz C. Es seien $f(z)$ bzw. $F(z)$ zwei Funktionen aus $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_s$ mit den Entwicklungen (21). Ist $\varrho \geq 1$ und

$$(23^*) \quad |a_2 \varrho - A_2| \geq \varrho^2 - 1,$$

so kann $\varrho F(z)$ keine Majorante von $f(z)$ in $|z| < 1$ sein. Im Falle des Gleichheitszeichens, d. h. für die dadurch bestimmten Werte¹⁶⁾ $\varrho = P(a_2, A_2)$ sind die Funktionen

$$(24) \quad f(z) = P F\left(z \frac{P z e^{i\vartheta} - 1}{z e^{i\vartheta} - P}\right); \quad \vartheta = \arccos(A_2 - a_2 P)^{17})$$

auszunehmen.

Dieser Satz gestattet ersichtlich, bei gegebenem a_2 und A_2 die allgemeinen aus Satz B folgenden Aussagen jeweils zu verschärfen. Obschon dies im Einzelfalle durchaus wichtig sein kann, wollen wir hier nicht näher auf Anwendungen eingehen. (Satz C ist der Spezialfall $n = 2$ des Satzes B aus K. G.; dort finden sich auch einige Beispiele.)

3. Wir wollen vielmehr, analog unseren Überlegungen unter I, 3 beim Lindelöfschen Prinzip, aus Satz C wieder eine im gewissen Sinne ganz allgemeine Wertevorratsaussage herleiten.

Zu diesem Zwecke setzen wir für die Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ (nicht aber notwendig für die Vergleichsfunktionen $F(z)$) die weitere Normierung

$$(25) \quad a_2 \geq 0$$

voraus. Das bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit der Betrachtung. Denn diese Normierung bedeutet für $a_2 \neq 0$ nur den Übergang von $f(z)$ zu $e^{i\vartheta} f(z e^{-i\vartheta})$; $\vartheta = \arccos a_2$, d. h. eine Drehung des Wertevorrats $\{w\}$ von $w = f(z)$ um $w = 0$. Solche (25) genügende Funktionen wollen wir kurz *normiert* nennen.

Ist nun bei festem A_2

(26) $P(A_2)$ die untere Grenze aller Zahlen $P(a_2, A_2)$ (aus Satz C) mit $a_2 \geq 0$, so ist der Satz C ersichtlich mit $1 \leq \varrho \leq P(A_2)$ für jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ anwendbar. Die Bestimmung von $P(A_2)$, die im § 2 in wenigen Zeilen ausgeführt ist, ergibt so den

¹⁶⁾ Es gibt mindestens ein solches P . Ist etwa $a_2 \geq 0$, so kann es mehr als ein solches P (höchstens 3), wie man unschwer nachprüft, nur für $a_2 > 2$, $\Re A_2 \geq a_2$ geben (vgl. auch K. G., S. 7).

¹⁷⁾ Aus $A_2 - a_2 P = 0$ folgt dann $P = 1$, $f(z) = F(z)$.

Satz D. Es sei $F(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{M}_s$. Mit $\varrho \leq P$,

$$(27) \quad P = \frac{\sqrt{1 + |\Im(A_2)|}}{\sqrt{1 + |A_2|}}, \text{ wenn } \Re(A_2) \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \text{ ist,}$$

kann $\varrho F(z)$ nicht im $|z| < 1$ Majorante für irgendeine normierte Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ sein. Für $\varrho = P$ ist die zu diesem P und

$$(28) \quad a_2^* = \frac{\Re(A_2)}{\sqrt{1 + |\Im(A_2)|}}, \Re(A_2) \geq 0 \text{ bzw. } a_2^* = 0$$

gehörige Funktion (24) auszunehmen¹⁸).

Dieser sehr allgemeine Satz stellt augenscheinlich, wenn $A_2 \neq 0$ ist, eine wegen seiner Einfachheit sehr brauchbare Ergänzung des fundamentalen Satzes B dar. Seine Anwendung ist von der gleichen Art wie bisher. Man zieht in Bezug auf ihre Bildgebiete $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(F)$ einfache oder sonst interessante Vergleichsfunktionen $F(z)$ zur Diskussion des Wertevorrates heran, und hat jetzt nur noch ihre Koeffizienten A_2 zu bestimmen. Jedermal liefert der Satz D für die normierten Funktionen aus $\mathfrak{M}$ eine Verschärfung des aus Satz B folgenden Ergebnisses. Ist $f(z)$ nicht normiert, so gibt das jedenfalls eine Verschärfung in gewissen „Richtungen“.

Für die praktische Handhabung ist es von Vorteil, bei gestaltlich gegebenem Vergleichsgebiet $\mathfrak{G}$, dieses zuerst normiert zu legen, d. h. das Linienelement der Abbildung durch $F(z)$ in $z = 0$ so zu bestimmen, daß $A_2 > 0$ wird. Nach (27) ist dann zunächst $P = 1$; in dieser „Richtung“ läßt sich also der Satz B nicht verbessern. Dreht man sodann $\mathfrak{G}$ um $w = 0$, so wächst P zunächst mit wachsendem $|\arccos A_2| \leq \frac{\pi}{2}$, um sodann für $\Re(A_2) \leq 0$ mit seinem größten Werte konstant zu bleiben. Es ist beachtenswert, daß also die stärkste Verschärfung der aus Satz B folgenden Aussagen in den zu einem vollen Halbkreis um $w = 0$ gehörigen „Richtungen“ möglich ist.

Im § 4 werden für eine größere Reihe brauchbarer Vergleichsfunktionen die Koeffizienten A_2 bestimmt (was auch für etwaige Anwendungen des Satzes C von Wichtigkeit ist), und es werden die zugehörigen Wertevorratsaussagen für normierte Funktionen aus $\mathfrak{M}$ formuliert. Auf diesen Paragraphen wird also, da er die Fruchtbarkeit des neuen verschärften Majorantenprinzips erweisen soll, der Leser besonders aufmerksam gemacht. Dabei empfiehlt sich ein Vergleich mit den (in K. G. dargestellten) Folgerungen aus Satz B. Um Raum zu sparen, werden die elementaren Rechnungen nur skizziert bzw. wird auf die ausführlichere Darstellung in K. G. verwiesen.

¹⁸) Zur Bestimmung des ϑ in (24) beachte man, daß $A_2 - a_2^* P = i \Im(A_2)$ bzw. A_2 ist.

4. Wir deuteten unter I, 4 das Heranziehen weiterer W_0 -Stellen zur Vertiefung des Lindelöfschen Prinzips an. Hier beim zweiten Majoranten-Prinzip wollen wir etwas genauer darauf eingehen:

$f(z)$ besitze im $|z| < 1$ die Majorante $F(z)$. Ferner sei daselbst $f(\zeta) = W_0$ für ein $\zeta \neq 0$, und zwar genauer gleich dem Punkte $W_0 = F(0)$ auf $\mathfrak{G}(F)$. Dann ist auch $\varphi(\zeta) = 0$, wo $\varphi(z)$ die Funktion aus (2) ist. Also genügt

$$(29) \quad \chi(z) = \varphi(z) \cdot \frac{z\bar{\zeta} - 1}{z - \zeta} = \frac{1}{\bar{\zeta}} \left\{ \alpha_1 z + \left(\alpha_2 + \alpha_1 \frac{(1 - |\zeta|^2)}{\zeta} \right) z^2 + \dots \right\}$$

ebenfalls den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas. Die Cauchy-sche Ungleichung (16) liefert zunächst $|\alpha_1| \leq |\zeta|$, d. i., falls W_0 endlich ist,

$$(30) \quad |f'(0)| \leq |\zeta| |F'(0)|,$$

und das Gleichheitszeichen ist nur für die Funktionen

$$(31) \quad f(z) = F\left(ze^{i\vartheta} \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1}\right); \quad \vartheta \text{ reell,}$$

richtig. Wir erhalten so den folgenden

Satz E (K. G., Satz C): *Es sei $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$, $F(z)$ aus $\mathfrak{M}_s$, $\varrho \geq 1$. Aus*

$$(22) \quad f(z) < \varrho F(z) \text{ in } |z| < 1$$

folgt

$$(32) \quad f(z) \neq F(0), \quad (F(0) = 0 \text{ auf } \mathfrak{G}(F)), \text{ für } 0 < |z| \leq \frac{1}{\varrho},$$

es sei denn $f(z)$ eine der für $\zeta = \frac{e^{i\vartheta}}{\varrho}$ verschwindenden Funktionen

$$(33) \quad f(z) = \varrho F\left(ze^{-i\vartheta} \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1}\right).$$

Wir haben diesen Satz für die Funktionenklasse, die durch (22) definiert wird, formuliert. Natürlich kann man ihn aber auch umgekehrt, bei Kenntnis der $0 = F(0)$ -Stellen von $f(z)$, wie bisher, zur Abschätzung der in einer Majorantenrelation (22) möglichen Zahlen ϱ nach unten benutzen. Besonders wichtig ist der Fall, daß die Vergleichsfunktion $F(z)$ für $0 < |z| < 1$ nicht mehr verschwindet; denn dann kann in (32) $F(0)$ durch 0 schlechthin ersetzt werden. Der Satz E ist dann ersichtlich eine Verallgemeinerung der bekannten *Jensenschen Ungleichung*¹⁹⁾ (in ihrer einfachsten Form), die er für $F(z) = z$ als Spezialfall enthält.

Wendet man nunmehr die schärfere Ungleichung (19) auf $\chi(z)$ an, so ergibt sich nach leichter Rechnung, die im § 3 dargestellt ist, der weitere

¹⁹⁾ J. L. W. V. Jensen, Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions, Acta Math. 22, (1899), S. 359—364.

Satz F: Unter den Voraussetzungen von Satz E folgt $f(z) \neq 0 = F(0)$ (auf $\mathfrak{G}(F)$) für die $0 < |z| < 1$ mit

$$(34) \quad \left| \frac{1-|z|^2}{z} + \left(a_2 - \frac{A_2}{\varrho} \right) \right| \geq \frac{(\varrho|z|)^2 - 1}{\varrho|z|}.$$

Im Falle des Gleichheitszeichens sind die für ein solches $z = \zeta$ verschwindenden Funktionen

$$(35) \quad \begin{cases} f(z) = \varrho F \left(z \cdot \frac{\bar{\zeta} z - \zeta}{\zeta z \bar{\zeta} - 1} \cdot \frac{\varrho \zeta z e^{i\vartheta} - 1}{z e^{i\vartheta} - \varrho \bar{\zeta}} \right); \\ \vartheta = \arccos \frac{\left(\frac{A_2}{\varrho} - a_2 \right) \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta}}{\zeta} \end{cases} \quad 20)$$

auszunehmen.

Dieser Satz gestattet wieder bei festem a_2 und A_2 eine Verschärfung der (Jensenschen) Aussage (32), die insofern interessant ist, als in (34) nicht nur $|z|$ sondern z selbst auftritt. Die Diskussion dieser Ungleichung, im § 3 durchgeführt, gestattet also etwa zu entscheiden, auf welchen Halbstrahlen $\arg z = \varphi$ Null- ($= F(0)$)-Stellen gegebenen absoluten Betrages liegen können. Oder man kann auf einem festen solchen Halbstrahle den absoluten Betrag etwaiger Nullstellen nach unten abschätzen.

Will man aber weiter ganz allgemeine Sätze haben, so wird man bei festem A_2 und festem $\varrho \geq P(A_2)$ aus (27) durch Variation von $a_2 \geq 0$ aus (34) eine für die Gesamtheit aller normierten Funktionen aus $\mathfrak{M}$ gültige Ungleichung zu gewinnen trachten. Diese wird die Jensensche Ungleichung bei gegebener Majorante jeweils verschärfen, was im Einzelfalle keinerlei Schwierigkeiten bietet. Ganz allgemein dagegen wird die rechnerische Darstellung des Ergebnisses wenig durchsichtig und seine Formulierung daher unlohnend. Dagegen dürfte der einfachste Fall $A_2 = 0$, der ja insbesondere die Jensensche Vergleichsfunktion $F(z) = z$ mit umfaßt, von größerem Interesse sein. Es ergibt sich hier, wie im § 3 gezeigt wird, der folgende

Satz G: Unter den Voraussetzungen von Satz E nebst

$$(36) \quad A_2 = 0$$

folgt für normierte Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$, daß $f(z) \neq 0 = F(0)$ (auf $\mathfrak{G}(F)$) ist für

$$(37) \quad \begin{aligned} 0 < |z| &\leq \frac{1}{\sqrt{\varrho}} && \geq 0 \\ 0 < |z| &\leq \sqrt{\frac{|\sin \varphi| + \frac{1}{\varrho}}{|\sin \varphi| + \varrho}} && \leq 0, \arg z = \varphi \end{aligned} \quad \text{wenn } \Re z \geq 0 \quad \text{ist.}$$

20) Aus $\left(\frac{A_2}{\varrho} - a_2 \right) - \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta} = 0$ folgt dann $\zeta = \frac{e^{i\vartheta}}{\varrho}$, $f(z) = \varrho F \left(z e^{-i\vartheta} \frac{z - \zeta}{z \bar{\zeta} - 1} \right)$.

Im Falle des Gleichheitszeichens sind die für ein solches $z = \zeta$ verschwindenden Funktionen

$$(38) \quad f(z) = \begin{cases} \varrho F\left(z e^{-2i\varphi} \frac{z^3 - \zeta^3}{(z\bar{\zeta})^3 - 1}\right) & \Re \zeta \geq 0 \\ \varrho F\left(z e^{-i\varphi} \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - 1} \cdot \frac{\pm i\varrho|\zeta|z - 1}{\pm iz - \varrho|\zeta|}\right) & \Re \zeta \leq 0 \end{cases}; \quad \varphi = \arg \zeta;$$

auszunehmen, wobei im letzteren Falle die beiden Vorzeichen den Möglichkeiten $\Im \zeta \geq 0$ und $\Im \zeta \leq 0$ entsprechen²¹⁾.

Man erkennt ähnlich, wie bei Satz D, daß das Jensensche $\frac{1}{\varrho}$ stets bei den zu einem vollen Halbkreis um $z = 0$ gehörigen „Richtungen“ zu $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ verschärft werden kann. Dies erscheint mir recht beachtenswert.

5. Endlich seien noch der Vollständigkeit halber die in Richtung auf einen bekannten Satz von Blaschke²²⁾ liegenden Verallgemeinerungen der Sätze E und F erwähnt,

Sind die $\zeta_i \neq 0$ irgendwelche, zunächst endlich viele $0 = F(0)$ -Stellen (auf $\mathfrak{G}(F)$) von $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$, und betrachtet man statt der Funktion $\chi(z)$ aus (29) die allgemeinere, ebenfalls den Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas genügenden Funktion

$$(39) \quad \psi(z) = \varphi(z) \cdot \prod_i \frac{z\bar{\zeta}_i - 1}{z - \zeta_i},$$

so liefert die Cauchysche Ungleichung (16) zunächst den im wesentlichen ($F(z) = z$) ebenfalls von Jensen¹⁹⁾ stammenden

Satz H. Unter den Voraussetzungen von Satz E gilt für die Gesamtheit der $0 = F(0)$ -Stellen (auf $\mathfrak{G}(F)$) von $f(z)$ die Ungleichung

$$(40) \quad \prod_i |\zeta_i| \geq \frac{1}{\varrho}.$$

Dieses Produkt und damit auch die $\sum_i (1 - |\zeta_i|)$ ist also jedenfalls konvergent. Eine Funktion aus $\mathfrak{M}$ mit divergentem Nullstellenprodukt $\prod_i |\zeta_i|$ nimmt also z. B. auf jedem noch so kleinen Kurvenbogen der w -Ebene Werte w an. (Die Vergleichsfunktion ist die zugehörige Schlitzabbildende!) Für $F(z) = z$ ergibt sich im wesentlichen der Blaschkesche Satz.

Wendet man aber auf $\psi(z)$ die Ungleichung (19) an, so ergibt sich als Verschärfung der Jensenschen Ungleichung (40) die neue Relation

$$(41) \quad \left| \sum_i \frac{1 - |\zeta_i|^2}{\zeta_i} + \left(a_2 - \frac{A_2}{\varrho}\right) \right| \leq \frac{(\varrho \prod_i |\zeta_i|)^2 - 1}{\varrho \prod_i |\zeta_i|} \leq \frac{\varrho^3 - 1}{\varrho},$$

²¹⁾ Für $\zeta < 0$ ist $\zeta = -\frac{1}{\varrho}$.

²²⁾ W. Blaschke, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, Sächs. Ber. 67, (1915), S. 194–200.

die wieder eine feinere Einsicht in die Verteilung der Stellen ζ_i gestattet. Natürlich könnte man durch Heranziehung der weiteren Schurschen Ungleichungen¹⁴⁾ (K. G. (14)) die Untersuchung der Nullstellen einer Funktion aus $\mathfrak{M}$ noch mehr vertiefen.

§ 1.

Berechnung der Menge $\mathfrak{B}_r$ aus (13).

Es sei $0 < r < 1$ fest gegeben und $0 \leq \alpha \leq 1$. Nach (8) ist $\mathfrak{R}_r(\alpha)$ der Kreis über der Strecke $\frac{\alpha-r}{1-\alpha r}, \frac{\alpha+r}{1+\alpha r}$ als Durchmesser. Für seinen Mittelpunkt μ und seinen Radius d ergibt sich

$$(a) \quad \mu(\alpha) = \frac{\alpha(1-r^2)}{1-\alpha^2 r^2}; \quad d(\alpha) = \frac{r(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 r^2}.$$

Im Intervall $0 \leq \alpha \leq 1$ wächst die Funktion $\mu(\alpha)$ von 0 bis 1, während $d(\alpha)$ von r bis 0 fällt.

Die Kreisschar $\mathfrak{R}_r(\alpha)$ ist durch $(x-\mu)^2 + y^2 = d^2$ gegeben. Ihre Enveloppe $\xi(\alpha), \eta(\alpha)$ bestimmt sich aus $-(\xi-\mu)\mu' = dd'$ zunächst zu

$$(b) \quad \xi = \mu - \frac{d d'}{\mu'}; \quad \eta = \pm d \sqrt{1 - \left(\frac{d'}{\mu'}\right)^2}.$$

Man findet

$$(c) \quad \begin{aligned} \mu' &= \frac{(1-r^2)(1+\alpha^2 r^2)}{(1-\alpha^2 r^2)^2}; & d' &= \frac{-2\alpha r(1-r^2)}{(1-\alpha^2 r^2)^2}; \\ \frac{d d'}{\mu'} &= \frac{-2r^2 \alpha (1-\alpha^2)}{1-\alpha^4 r^4}; & 1 - \left(\frac{d'}{\mu'}\right)^2 &= \frac{(1-\alpha^2 r^2)^2}{(1+\alpha^2 r^2)^2}, \end{aligned}$$

und hieraus nach (a) und (b)

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi(\alpha) &= \frac{\alpha(1-r^2)}{1-\alpha^2 r^2} + \frac{2r^2 \alpha (1-\alpha^2)}{1-\alpha^4 r^4} = \frac{\alpha(1+r^2)}{1+\alpha^2 r^2}; \\ \eta(\alpha) &= \pm \frac{r(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 r^2} \cdot \frac{1-\alpha^2 r^2}{1+\alpha^2 r^2} = \pm \frac{r(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2 r^2}. \end{aligned}$$

In $\alpha = 0$ schließt sich diese Enveloppe (zwei Kreisbögen) stetig und mit stetiger Tangente an den linken Halbkreis von $\mathfrak{R}_r(0)$ mit dem Radius r an. In $\alpha = 1$ treffen sich die beiden Enveloppenkreisbögen, und man findet dort $\frac{\eta'}{\xi'} = \mp \frac{2r}{1-r^2}$.

§ 2.

Beweis des Satzes D.

Für $a_2 \geq 0$ ist

$$(a) \quad |a_2 P - A_2| = P^2 - 1$$

mit

$$(b) \quad (a_2 P - \Re A_2)^2 + (\Im A_2)^2 = (P^2 - 1)^2$$

gleichbedeutend. Jedenfalls ist also wegen $P \geq 1$

$$(c) \quad P^3 - 1 \geq |\Im A_2|; \quad P \geq \sqrt{1 + |\Im A_2|}.$$

Ist nun $\Re A_2 \geq 0$, so wird das Gleichheitszeichen für

$$(d) \quad a_2^* = \frac{\Re A_2}{P} = \frac{\Re A_2}{\sqrt{1 + |\Im A_2|}}$$

und nur für dieses wirklich erreicht. Ist aber $\Re A_2 \leq 0$, so wird

$$(e) \quad (P^2 - 1)^2 = a_2^2 P^2 - 2 a_2 \cdot \Re A_2 \cdot P + |A_2|^2 \geq |A_2|^2; \quad P \geq \sqrt{1 + |A_2|},$$

und hier ist das Gleichheitszeichen nur für $a_2^* = 0$ richtig.

§ 3.

Beweise der Sätze F und G.

1. Beweis von Satz F:

Wegen $\varphi(z) = F^{-1}\left(\frac{f(z)}{\varrho}\right)$ wird in (6)

$$(a) \quad \alpha_1 = \frac{1}{\varrho}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\varrho} \left(a_2 - \frac{A_2}{\varrho} \right),$$

also für die Funktion $\chi(z)$ in (29)

$$(b) \quad \chi(z) = \frac{z}{\zeta \varrho} + \frac{z^2}{\zeta^2 \varrho} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{\zeta} + \left(a_2 - \frac{A_2}{\varrho} \right) \right) + \dots$$

Die Ungleichung (19) liefert also

$$(34a) \quad \left| \frac{1 - |\zeta|^2}{\zeta} + \left(a_2 - \frac{A_2}{\varrho} \right) \right| \leq \frac{(\varrho |\zeta|)^2 - 1}{\varrho |\zeta|},$$

was in umgekehrter Formulierung die Behauptung (34) ist. Das Gleichheitszeichen ist nach (20) nur für

$$(c) \quad \chi(z) = z \frac{z e^{i\vartheta} - \frac{1}{\zeta}}{\frac{\varrho}{z} - 1}; \quad \vartheta = \arccos \frac{\left(\frac{A_2}{\varrho} - a_2 \right) - \frac{1 - |\zeta|^2}{\zeta}}{\frac{\varrho}{z} - 1}$$

richtig. Das ist die Behauptung (35).

2. Diskussion der Ungleichung (34a):

Es seien $\varrho \geq 1$, a_2 und A_2 fest gegeben. Wir setzen für die Nullstelle ζ von $f(z)$

$$(d) \quad r = |\zeta|; \quad c = \frac{A_2}{\varrho} - a_2; \quad R(r) = \frac{(\varrho r)^2 - 1}{\varrho r}; \quad D(r) = \frac{1 - r^2}{r}.$$

Mit wachsendem r aus $\frac{1}{\varrho} \leq r \leq 1$ (nur solche kommen nach der Jensen'schen Ungleichung (32) in Frage) wächst R von 0 bis $\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}$, während D von $\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}$ bis 0 fällt. Ferner muß nach (32) auch $|c| \leq \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}$ sein.

(34 a) schreibt sich nun

$$(e) \quad \left| \frac{1-r^2}{\zeta} - c \right| \leq R; \quad |D e^{-i\varphi} - |c|| \leq R, \quad \varphi = \arccos(c\zeta);$$

$$(D \cos \varphi - |c|)^2 + D^2 \sin^2 \varphi \leq R^2,$$

so daß jedenfalls bei festem r aus $\frac{1}{\varrho} \leq r < 1$ nur solche Nullstellen ζ möglich sind, für welche die Ungleichung

$$(42) \quad \cos \varphi \geq \frac{D^2 - R^2 + |c|^2}{2D|c|}; \quad \varphi = \arccos(c\zeta)$$

erfüllt ist. Das bedeutet im allgemeinen eine Einschränkung für den $\arccos(c\zeta)$, der sich nämlich von dem $\arccos \frac{1}{\varrho}$ nicht zu stark unterscheiden darf. Es sind aber zwei wichtige Fälle zu beachten:

A: Für

$$(f) \quad \frac{D^2 - R^2 + |c|^2}{2D|c|} \leq -1,$$

d. i.

$$(g) \quad R - D = (1 + \varrho) \frac{\varrho r^2 - 1}{\varrho r} \geq |c|,$$

oder (man beachte, daß die monoton wachsende Funktion $R - D$ für $r = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ verschwindet!) für

$$(43) \quad \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \leq r_0 \leq r < 1; \quad (1 + \varrho) \cdot \frac{\varrho r_0^2 - 1}{\varrho r_0} = |c|,$$

bedeutet (42) keine Einschränkung für den $\arccos \zeta$.

B: Dagegen kann es für

$$(h) \quad \frac{D^2 - R^2 + |c|^2}{2D|c|} > 1,$$

d. i. entweder

$$(i) \quad D - R = (1 + \varrho) \frac{1 - \varrho r^2}{\varrho r} > |c|$$

oder

$$(j) \quad D + R = (\varrho - 1) \frac{1 + \varrho r^2}{\varrho r} < |c|$$

überhaupt keine Wurzeln ζ geben.

Da nun $D - R \left(\leq \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho} \right)$ monoton abnimmt, ist (i) für

$$(44a) \quad \frac{1}{\varrho} \leq r < r_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\varrho}}; \quad (1 + \varrho) \cdot \frac{1 - \varrho r_1^2}{\varrho r_1} = |c|$$

erfüllt.

Die Funktion $D + R$ fällt für $\frac{1}{\varrho} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$ von $\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}$ bis $\frac{2(\varrho - 1)}{\sqrt{\varrho}}$, um für $\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \leq r \leq 1$ wieder bis $\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho}$ zu wachsen.

Ist also $|c| \leq \frac{2(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho}}$, so ist (j) unmöglich. Dagegen ist für

$|c| > \frac{2(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho}}$ diese Ungleichung für

$$(44b) \quad r_2 < r < r_3; \quad (\varrho-1) \frac{1+\varrho r_i^2}{\varrho r_i} = |c| \quad (i = 2, 3)$$

erfüllt. Übrigens ist ersichtlich

$$(45) \quad \frac{1}{\varrho} \leq r_1 \leq r_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \leq r_3 \leq r_0 \leq 1.$$

In jedem Falle muß also

$$(46) \quad r = |\zeta| \geq r_1$$

sein; für $|c| > \frac{2(\varrho-1)}{\sqrt{\varrho}}$ tritt noch das Intervall $r_2 < r < r_3$ als nullstellenfrei hinzu. Für $r < r_0$ ist ferner der $\text{arc } \zeta$ durch (42) beschränkt.

3. Beweis von Satz G:

Für $A_2 = 0$ und $a_2 \geq 0$ wird (34a) mit $\zeta = r e^{i\varphi}$ zu

$$(k) \quad \left(a_2 + \frac{1-r^2}{r} \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{1-r^2}{r} \sin \varphi\right)^2 = \left(\frac{(\varrho r)^2 - 1}{\varrho r}\right)^2.$$

Jedenfalls ist also

$$(l) \quad \frac{(\varrho r)^2 - 1}{\varrho r} \geq \frac{1-r^2}{r} |\sin \varphi|; \quad r \geq \sqrt{\frac{|\sin \varphi| + \frac{1}{\varrho}}{|\sin \varphi| + \varrho}} = r^*.$$

Ist $\cos \varphi \leq 0$, so tritt das Gleichheitszeichen hier nur für

$$(m) \quad a_2 = -\frac{1-r^{*2}}{r^*} \cos \varphi$$

wirklich ein. Nach (c) muß dann, je nach dem Vorzeichen von $\sin \varphi$,

$$(n) \quad \vartheta = \arccos \frac{a_2 + \frac{1-r^{*2}}{r^*} e^{i\varphi}}{r^* e^{i\varphi}} = \arccos \frac{\cos \varphi - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \pm \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\chi(z) = z e^{-i\varphi} \frac{\pm i \varrho |\zeta| |z-1|}{\pm i z - \varrho |\zeta|}$$

sein.

Ist aber $\cos \varphi \geq 0$, so wird

$$(o) \quad \frac{(\varrho r)^2 - 1}{\varrho r} \geq \frac{1-r^2}{r}; \quad r \geq \frac{1}{\sqrt{\varrho}},$$

und hier tritt das Gleichheitszeichen nur für $a_2 = 0$ ein. Und dann muß in (c)

$$\vartheta = \arccos \frac{1}{\zeta^2} = \pi - 2\varphi,$$

$$(p) \quad \chi(z) = z e^{-2i\varphi} \frac{z + \frac{e^{2i\varphi}}{\varrho} \zeta}{\frac{z e^{-2i\varphi}}{\varrho} + 1} = z e^{-2i\varphi} \frac{z + \zeta}{z \zeta + 1}$$

sein. Damit ist der Satz G vollständig bewiesen.

§ 4.

Anwendungen des zweiten Majorantenprinzips (Satz D).

Wir geben in diesem Paragraphen, auf dem neben den allgemeinen Sätzen der Einleitung das Hauptinteresse der vorliegenden Arbeit liegt, eine ganze Reihe von Anwendungen des zweiten Majorantenprinzips. Da wir dazu den Satz D heranziehen, also immer *normierte* Funktionen aus M betrachten, handelt es sich hier um Ergänzungen der in K. G. dargestellten, im wesentlichen aus dem einfachen Satze B folgenden Ergebnisse. Ich glaube, daß diese Ergänzungen, die sämtlich neu sein dürften, ein gewisses Interesse verdienen; stellen sie doch nicht unwesentliche Verschärfungen u. a. solch wichtiger Theoreme dar, wie es der Landausche¹³⁾ und der Hurwitzsche Satz²³⁾ aus dem Picardschen Ideenkreise sind.

Die unvermeidlichen durchweg elementaren Rechnungen sind so kurz, wie das für eine Prüfung noch zugänglich ist, z. T. unter Hinweis auf K. G. durchgeführt.

1. (K. G. § 1, 1—3.)

Es sei $\gamma \geq 0$. Die normierte Vergleichsfunktion

$$(47) \quad W = F(z) = \frac{z}{1 - \gamma z} = z + \gamma z^2 + \dots$$

liefert als Vergleichsgebiet eine schlichte 0 enthaltende Kreisscheibe (für $\gamma = 1$ eine Halbebene) über der W -Zahlenkugel. Drehung um $W = 0$ ergibt nach Satz D den folgenden

Satz I (Ergänzung des Satzes I aus K. G.).

Es seien ϑ reell und $\gamma \geq 0$ beliebig, aber fest gegeben.

a: Für $\gamma \neq 1$ bezeichne $\Re$, den Kreis über der Strecke $< -\frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1-\gamma} >$ als Durchmesser.

Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ nimmt, wenn $0 \leq \gamma < 1$ ist, Werte außerhalb, und wenn $\gamma > 1$ ist, Werte innerhalb des Kreises $e^{i\vartheta} \mathfrak{P} \Re \gamma$ an.

Dabei ist

$$(48) \quad \rho = \frac{\sqrt{1 + \gamma |\sin \vartheta|}}{\sqrt{1 + \gamma}} \quad \begin{array}{l} \text{für } \cos \vartheta \geq 0, \\ \text{für } \cos \vartheta \leq 0. \end{array}$$

b: ($\gamma = 1$). Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ nimmt ein w mit

$$(49) \quad \Re(w e^{i\vartheta}) \quad \begin{array}{l} > \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \\ > \frac{\sqrt{1 + |\sin \vartheta|}}{2} & \text{für } \cos \vartheta \leq 0 \end{array}$$

an.

²³⁾ A. Hurwitz, Über die Anwendung der ellipt. Modulfunkt. ..., Naturf. Ges. Zürich 49 (1904), S. 249.

Jedesmal ist eine nach (28) leicht zu bestimmende Extremalfunktion auszunehmen.

Der Teil b dieses Satzes besagt ersichtlich eine untere Abschätzung für die konvexe Hülle des Wertevorrates $\{w\}$ einer beliebigen Funktion aus $\mathfrak{M}$. Aus Satz B würde nur die fast triviale Tatsache folgen, daß diese Hülle den Kreis $|w| \leq \frac{1}{2}$ enthält. Wir sehen jetzt, daß sie sogar mindestens einen vollen Halbkreis aus $|w| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ enthält.

2. (K. G., § 1, 5.)

Für $\gamma > 1$ gibt der Satz I eine neue Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Casorati—Weierstraß, wie ich schon in K. G. darlegte. Die zugehörige Vergleichsfunktion und also auch die Extremalfunktion besitzt nun im $|z| < 1$ Pole. Will man diese Aussage auch für die wichtige Unterklasse $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}$, d. i. die Klasse der im $|z| < 1$ regulären Funktionen aus $\mathfrak{M}$, zu einer Bestaussage verschärfen, so muß man (vgl. K. G.) die normierte Vergleichsfunktion

$$(50) \quad F(z) = a \left(e^{\frac{z}{a(1-z)}} - 1 \right) = z + z^2 \left(1 + \frac{1}{2a} \right) + \dots, \quad a > 0$$

heranziehen. Für die Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ wird nach (27)

$$(51) \quad P(A_2) = \begin{cases} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{2a}\right) |\sin \vartheta|} & \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \\ \sqrt{2 + \frac{1}{2a}} & \text{für } \cos \vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Setzt man schließlich $c = -a P e^{i\vartheta}$, so ergibt sich der folgende

Satz II. (Ergänzung des Satzes III aus K. G.)

Es sei $c \neq 0$ beliebig komplex gegeben. Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ nimmt ein w mit

$$(52) \quad |w - c| \begin{cases} < |c| e^{-\frac{|\sin \vartheta| + \sqrt{\sin^2 \vartheta + 16(1 + |\sin \vartheta|)|c|^2}}{8|c|^2}} & \text{für } \Re c \leq 0; \vartheta = \arg c \\ < |c| e^{-\frac{1 + \sqrt{1 + 32|c|^2}}{8|c|^2}} & \text{für } \Re c \geq 0 \end{cases}$$

an. Auszunehmen sind die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen.

3. (K. G., § 1, 6.)

Es sei $a > 0$ und

$$(a) \quad s = a \left(e^{\frac{z}{a(1+z)}} - 1 \right) = z + z^2 \left(\frac{1}{2a} - 1 \right) + \dots$$

Mit $c = a(e^{\frac{1}{a}} - 1)$, $x = \frac{1}{2a}$ bildet die normierte Vergleichsfunktion

$$(53) \quad W = F(z) = \frac{cs}{c-s} = z + z^2 \left(\frac{1}{2a} - 1 + \frac{1}{c} \right) + \dots \\ = z + z^2 (x \operatorname{Ctg} x - 1) + \dots$$

den $|z| < 1$ auf den auf der Riemannschen Fläche von $\log(W - \tau^*)$, $\tau^* = -M^* e^{-x}$ (in τ^* punktierten) Kreis $|W| < M^* = \frac{\sin x}{x}$ ab. Für die Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ wird

$$(54) \quad P(A_2) = \begin{cases} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| (x \operatorname{Ctg} x - 1)} & \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \\ \sqrt{x \operatorname{Ctg} x} & \text{für } \cos \vartheta \leq 0. \end{cases}$$

Das gibt den

Satz III (Ergänzung des Landauschen Satzes²⁴) IV aus K. G.)

Es sei $M > 1$. Genügt die normierte Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ der Beschränkung

$$(55) \quad |f(z)| \leq M,$$

so nimmt sie jeden Wert w mit $|w| \leq \tau_0(M)$ an, wo

$$(56) \quad \begin{aligned} \tau_0(M) &= M e^{-x}; \\ M &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| (x \operatorname{Ctg} x - 1)} & \text{für } \Re w \leq 0; \operatorname{arc} w = \vartheta \\ \sqrt{\frac{\sin 2x}{2x}} & \text{für } \Re w \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist. Im Falle des Gleichheitszeichens sind die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen auszunehmen.

Man beachte wieder, daß insbesondere jede (55) genügende Funktion aus $\mathfrak{R}$ einen vollen Halbkreis aus $|w| < \sqrt{\tau(M^2)}$ annimmt, wo

$$(57) \quad \tau(M) = M e^{-x}; \quad M = \frac{\sin x}{x}$$

die Landausche Konstante ($\vartheta = \pi$ in (56)) ist.

4. (K. G. § 2, 1.)

Die aus der in der Theorie der schlichten Funktionen bekannten Schlitzabbildenden

$$(58) \quad W = F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$$

entstehenden Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ liefern den

Satz IV. (Ergänzung des Satzes V in K. G.)

Es sei ϑ beliebig reell gegeben. Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ nimmt ein w mit

$$(59) \quad \begin{aligned} \operatorname{arc} w = \vartheta; \quad |w| &> \frac{1}{4} \sqrt{1 + 2|\sin \vartheta|} & \text{für } \Re w \leq 0 \\ &> \frac{1}{4} \sqrt{3} & \text{für } \Re w \geq 0 \end{aligned}$$

an. Auszunehmen sind die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen.

²⁴) E. Landau, Über die Blochsche Konstante ..., Math. Zeitschr. 30 (1929) Satz 6, S. 620.

5. (K. G. § 2, 6.)

Es sei $0 < c \leq \frac{1}{2}$. Die aus

$$(60) \quad s = \frac{z}{(1+z)^2}; \quad W = F(z) = \frac{cs}{c-s} = z + \left(\frac{1}{c} - 2\right)z^2 + \dots$$

entstehenden Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ ergeben den

Satz V. (Ergänzung des Satzes VIII in K. G.)

Es sei $0 < |c| \leq \frac{1}{2}$ ²⁵⁾. Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ nimmt einen Wert w auf der (für $|c| < \frac{1}{4}$ endlichen) nicht 0 enthaltenden Strecke

$$(61) \quad \left(Pc, P \cdot \frac{c}{1-4|c|} \right)$$

an, wo

$$(62) \quad P = \begin{cases} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| \left(\frac{1}{|c|} - 2 \right)} & \text{für } \Re c \leq 0; \arcc c = \vartheta \\ \sqrt{\frac{1}{|c|} - 1} & \text{für } \Re c \geq 0 \end{cases}$$

ist. Die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen sind auszunehmen.

6. (K. G. § 2, 7.)

Es sei $\Im c > 0$ und $|c + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Wir bilden

$$(b) \quad s = \frac{z - cz^2}{(1+z)^2}; \quad F_1(z) = \frac{cs}{c+s} = z - \left(2 + c + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

Hier ist (vgl. K. G. Figur 7), wenn $c = re^{i\varphi}$ gesetzt wird,

$$(c) \quad \begin{aligned} c &= -\cos \varphi e^{i\varphi} = -(\cos^2 \varphi + i \cos \varphi \sin \varphi); \\ \frac{1}{c} &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\cos \varphi} = -1 + i \operatorname{tg} \varphi; \\ 2 + c + \frac{1}{c} &= 1 - \cos^2 \varphi + i \sin \varphi \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{1 - r^2}{r} e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$(63) \quad W = F(z) = e^{i\varphi} F_1(z e^{-i\varphi}) = z + \frac{1-r^2}{r} z^2 + \dots$$

ist also normiert. Sie bildet den $|z| < 1$ auf die schlichte W -Kugel ab, die längs desjenigen Bogens der Länge $\varphi_r = 4 \arcsin r$ des Kreises $|W| = r$ geschlitzt ist, der durch den Punkt $W = -r$ halbiert wird²⁶⁾.

Bildet man $P(A_2)$ für die Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ und setzt noch $r \cdot P = R$, so ergibt sich der

²⁵⁾ Es genügt, diese c zu betrachten.

²⁶⁾ Es ist nämlich $\arcsin r = \arcsin(-\cos \varphi) = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Da der Schlitz in

$ce^{i\varphi} = re^{2i\varphi}$ endet, liegt seine Mitte in $W = re^{i\left(2\varphi - 2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)} = -r$.

Satz VI. (Ergänzung des Satzes IX in K. G.)

Es seien $0 < R < 1$ und ϑ beliebig reell gegeben. Jede normierte Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ nimmt ein w mit $|w| = R$ und

$$(64) \quad \begin{aligned} |\arccos w - \vartheta| &< 2 \arcsin r; \quad 0 < r < 1; \\ R^2 &= r^2 + |\sin \vartheta| r (1 - r^2) \quad \text{für } \cos \vartheta \leq 0 \\ R^2 &= r^2 + r (1 - r^2) \quad \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \end{aligned}$$

an. Die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen sind auszunehmen.

7. (K. G. § 2, 8.)

Die Sätze V (für $|c| < \frac{1}{4}$) und VI geben nur Bestaussagen für die Funktionen aus $\mathfrak{M}$, nicht aber für die aus $\mathfrak{R}$. Denn die Vergleichsfunktionen besitzen im $|z| < 1$ Pole. Um Bestaussagen auch für die Klasse $\mathfrak{R}$ zu erhalten, muß man nach K. G., (45) und (46), vorgehen.

Es sei etwa $0 < \zeta < 1$ der einzige Pol der jeweiligen Vergleichsfunktion $F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$. Man bestimme $x > 0$ aus $e^{-x} = \zeta$ und setze

$$(d) \quad \varrho^* = \frac{\sin x}{x}; \quad f_1(z) = z + (1 - x \operatorname{Ctg} x) z^2 + \dots,$$

so daß $f_1(z)$ eine Transformierte der Landauschen Vergleichsfunktion (53) ist. Dann stellt

$$(65) \quad G(z) = \varrho^* F\left(\frac{f_1(z)}{\varrho^*}\right) = z + \left(1 - x \operatorname{Ctg} x + A_2 \frac{x}{\sin x}\right) z^2 + \dots$$

die zu der gesuchten Verschärfung für die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gehörige neue Vergleichsfunktion dar.

Für das $F(z)$ aus (60) ist z. B. der Pol ζ durch $s = c$, d. i. $c = \frac{s}{(1+\zeta)^2}$ bestimmt. Für $0 < c < \frac{1}{4}$ wird $0 < \zeta < 1$. Mit

$$(e) \quad c = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{4 \operatorname{Cof}^2 \frac{x}{2}}; \quad A_2 = \frac{1}{c} - 2 = 4 \operatorname{Cof}^2 \frac{x}{2} - 2 = 2 \operatorname{Cof} x$$

ist also

$$(f) \quad G(z) = z + (1 + x \operatorname{Ctg} x) z^2 + \dots$$

der Entwicklungsbeginn der neuen Vergleichsfunktion. Ersetzt man noch x durch $2x$, so erhält man mit ihr den

Satz VII. (Ergänzung des Satzes X in K. G.)

Es seien $x > 0$ und ϑ beliebig reell gegeben. Jedes normierte $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ nimmt bei festem $\arccos w = \vartheta$ ein w der endlichen Strecke

$$(66) \quad \left. \begin{aligned} &\frac{\operatorname{Im} x}{4x} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| (1 + 2x \operatorname{Ctg} 2x)} \\ &\frac{\operatorname{Im} x}{4x} \sqrt{2(1 + x \operatorname{Ctg} 2x)} \end{aligned} \right\} < |w|$$

$$< \begin{cases} \frac{\operatorname{Ctg} x}{4x} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| (1 + 2x \operatorname{Ctg} 2x)} & \text{für } \cos \vartheta \leq 0 \\ \frac{\operatorname{Ctg} x}{4x} \sqrt{2(1 + x \operatorname{Ctg} 2x)} & \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \end{cases}$$

an. Die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen sind auszunehmen.

Für die Funktion $F_1(z)$ in (b) dieses Paragraphen bestimmt sich der Pol ζ_1 aus

$$(g) \quad \begin{aligned} s &= -c; \quad -c = \frac{\zeta_1 - c \zeta_1^2}{(1 + \zeta_1)^2}; \\ \zeta_1 &= \frac{-c}{1 + 2c} = \frac{-r e^{i\varphi}}{1 - 2 \cos \varphi e^{i\varphi}} = r e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Der Pol der Vergleichsfunktion (63) liegt also in $\zeta = r$. Mit

$$(h) \quad e^{-x} = r; \quad A_2 = \frac{1-r^2}{r} = 2 \sin x$$

ist also

$$(i) \quad G(z) = z + (1 - x \operatorname{Ctg} x + 2x)z^2 + \dots$$

der Entwicklungsbeginn der (schon normierten) neuen Vergleichsfunktion. Sie liefert den

Satz VIII. (Ergänzung des Satzes XI in K. G.)

Es seien $0 < R < 1$ und ϑ beliebig reell gegeben. Jede normierte Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ nimmt ein w mit $|w| = R$ und

$$(67) \quad \begin{aligned} |\operatorname{arc}(w) - \vartheta| &< 2 \operatorname{arc} \sin e^{-x}; \\ R &= \frac{1 - e^{-2x}}{2x} \sqrt{1 + |\sin \vartheta| (1 - x \operatorname{Ctg} x + 2x)} \quad \text{für } \cos \vartheta \leq 0 \\ &= \frac{1 - e^{-2x}}{2x} \sqrt{2 - x \operatorname{Ctg} x + 2x} \quad \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \end{aligned}$$

an. Die nach (28) zu bildenden Extremalfunktionen sind auszuschließen.

8. (K. G. § 3, 1.)

Es sei $\alpha \geq \beta > 0$. Als Vergleichsgebiet wählen wir den Streifen $-\beta < \Re W < \alpha^{27}$, der die Breite $\delta' = \alpha + \beta$ und die Exzentrizität (d. i. Abstand der Mittellinie vom Nullpunkt) $\epsilon' = \frac{\alpha - \beta}{2}$ hat. Ist $W = F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$ die zugehörige Vergleichsfunktion, so bildet

$$(j) \quad \begin{aligned} S(z) &= e^{\frac{i\pi}{\alpha+\beta} \left(W - \frac{\alpha-\beta}{2} \right)} \\ &= e^{-\frac{i\pi \alpha - \beta}{2 \alpha + \beta}} \left\{ 1 + \frac{i\pi}{\alpha + \beta} z + \left(\frac{i\pi}{\alpha + \beta} A_2 - \frac{\pi^2}{2(\alpha + \beta)^2} \right) z^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

den $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(S) > 0$ ab.

Es ist aber andererseits für eine solche Funktion $S(z)$, wenn $S(0) = u_0 + i v_0$ gesetzt wird, bekanntlich mit einem geeigneten φ

$$(k) \quad S(z) = u_0 \frac{1 + z e^{i\varphi}}{1 - z e^{i\varphi}} + i v_0 = S(0) + 2 u_0 (z e^{i\varphi} + z^2 e^{2i\varphi} + \dots).$$

²⁷⁾ α und β sind nicht selbst, wohl aber ihr Verhältnis $\alpha : \beta$ willkürlich vorgebar; vgl. (m).

Hier wird also

$$(l) \quad S(0) = e^{-\frac{i\pi\alpha-\beta}{2\alpha+\beta}}; \quad u_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},$$

d. i.

$$(m) \quad \varepsilon' = \frac{\delta'}{\pi} \arccos \frac{\pi}{2\delta'},$$

ferner

$$e^{i\vartheta} = iS(0); \quad 2u_0 e^{2i\vartheta} = -\frac{\pi}{\alpha+\beta} S(0)^2 = S(0) \frac{\pi}{\alpha+\beta} \left(iA_2 - \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)} \right);$$

$$(n) \quad A_2 = i \left(S(0) - \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)} \right) = -v_0 = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \\ = \sqrt{1-u_0^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\pi}{2\delta'}\right)^2}.$$

Die zu den Vergleichsfunktionen $e^{i\vartheta} F(z e^{-i\vartheta})$ nach Satz D gehörigen extremalen Stützstreifen für den Wertevorrat normierter $f(z)$ aus $\mathfrak{M}$ haben die Breite $\Delta = P\delta'$ und die Exzentrizität $\varepsilon = P\varepsilon'$, wo z. B. für $\cos \vartheta \geq 0$

$$(o) \quad P(A_2) = \sqrt{1 + |\sin \vartheta|} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2\delta'}\right)^2} = \sqrt{1 + |\sin \vartheta|} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2\Delta}\right)^2}.$$

Man erhält so den

Satz IX. (Ergänzung des Satzes XII in K. G.)

Die normierte Funktion $w = f(z)$ sei aus $\mathfrak{R}$. Ihr Wertevorrat in der w -Ebene besitze einen Stützstreifen $\mathfrak{S}$ der Breite Δ und der Exzentrizität ε . ϑ bezeichne das Argument desjenigen Halbstrahles durch 0, der auf der Mittellinie von $\mathfrak{S}$ senkrecht ist. Dann gilt

$$(68) \quad \varepsilon \leq \frac{\Delta}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi P}{2\Delta} \right),$$

wo

$$(69) \quad (P^2 - 1)^2 = \sin^2 \vartheta \left(1 - \left(\frac{\pi P}{2\Delta} \right)^2 \right); \quad P \geq 1 \quad \text{für} \quad \cos \vartheta \geq 0$$

$$P = \sqrt{2 - \left(\frac{\pi}{2\Delta} \right)^2} \quad \text{für} \quad \cos \vartheta \leq 0$$

ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur für die nach Satz D zu bildenden Vergleichsfunktionen, die zu Streifen als Vergleichsgebieten gehören. (K. G. (75).)

9. (K. G. § 3, 6.)

Für die Funktion $W = F(z) = z + A_2 z^2 + \dots$ aus K. G. (82) wird wegen

$$(p) \quad S(z) = \frac{\alpha^2 - (\alpha - W)^2}{2\alpha} = \frac{z}{(1+z)^2}; \\ z + \left(A_2 - \frac{1}{2\alpha} \right) z^2 + \dots = z - 2z^2 + \dots$$

zunächst

$$(70) \quad A_2 = -2 \left(1 - \frac{1}{4\alpha} \right).$$

Ferner ist

$$(71) \quad F_1(z) = \frac{\alpha W}{\alpha - W} = z + \left(\frac{3}{2\alpha} - 2\right)z^3 + \dots^{26},$$

Hieraus kann man eine Ergänzung des Satzes XV in K. G. formulieren. Wir begnügen uns aber der Einfachheit wegen mit dem mittels

$$(72) \quad F_2(z) = \frac{2\alpha W}{2\alpha - W} = z - 2\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)z^3 + \dots,$$

wenn man noch $2\alpha P = M$ setzt, zu gewinnenden

Satz X. (Ergänzung des Satzes XVI in K. G.)

Es seien $M > 1$ und ϑ beliebig reell vorgegeben. Gilt für die normierte Funktion $f(z)$ aus $\Re$ die Beschränkung

$$(55) \quad |f(z)| \leq M,$$

so nimmt sie ein w mit $\text{arc } w = \vartheta$ und

$$(73) \quad \frac{1}{P}(M - \sqrt{M^2 - PM})^2 < |w| < M$$

an. Dabei ist

$$(74) \quad P = \frac{1}{M} \{-|\sin \vartheta| + \sqrt{\sin^2 \vartheta + (1 + 2|\sin \vartheta|)M^2}\} \quad \text{für } \cos \vartheta \leq 0$$

$$\frac{1}{M} \{-1 + \sqrt{1 + 3M^2}\} \quad \text{für } \cos \vartheta \geq 0.$$

Die nach Satz D zu bildenden Extremalfunktionen sind auszunehmen.

10. (K. G. § 4, 1–2.)

Es sei $\lambda(\tau)$ die in K. G. (89) definierte Modulfunktion, welche die Halbebene $\Im(\tau) > 0$ auf die bei 0, 1 und ∞ verzweigte Modulfläche abbildet. Mit

$$(75) \quad \mu(z) = \frac{1}{2i\lambda'(i)} \{\lambda(\tau) - \tfrac{1}{2}\} = z + b_3 z^3 + \dots; \quad \tau = i \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| < 1$$

bildet dann

$$(76) \quad F^*(z) = \frac{\mu\left(\frac{z-\zeta}{2\zeta-1}\right) - \mu(\zeta)}{\mu'(\zeta)(|\zeta|^2 - 1)} = z + A_2^* z^2 + \dots; \quad |\zeta| < 1$$

den $|z| < 1$ auf eine Modulfläche ab, deren Verzweigungsstellen in ∞ und

$$(77) \quad a^* = -\frac{1}{4i\lambda'(i)} + \frac{\mu(\zeta)}{\mu'(\zeta)(|\zeta|^2 - 1)}, \quad b^* = \frac{1}{4i\lambda'(i)} - \frac{\mu(\zeta)}{\mu'(\zeta)(|\zeta|^2 - 1)}$$

²⁶⁾ Es war $\alpha > \frac{1}{2}$. Es sind jetzt aber, wegen der Normierung, die Fälle $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$ und $\alpha \geq \frac{3}{4}$ zu unterscheiden.

liegen. Nun ist mit $\tau_0 = i \frac{1+\xi}{1-\xi}$

$$\begin{aligned} \mu'(\xi) &= \frac{1}{2i\lambda'(i)} \cdot \lambda'(\tau_0) \tau'(\xi); \\ (q) \quad \mu''(\xi) &= \frac{1}{2i\lambda'(i)} \{ \lambda''(\tau_0) \tau'^2(\xi) + \lambda'(\tau_0) \tau''(\xi) \}; \\ -\frac{\mu''(\xi)}{\mu'(\xi)} &= \frac{\lambda''(\tau_0)}{\lambda'(\tau_0)} \tau'(\xi) + \frac{\tau''(\xi)}{\tau'(\xi)}; \quad \tau'(\xi) = \frac{2i}{(1-\xi)^2}; \quad \frac{\tau''(\xi)}{\tau'(\xi)} = \frac{2}{1-\xi}, \end{aligned}$$

also zunächst

$$(r) \quad A_2^* = \frac{\mu''(\xi)}{\mu'(\xi)} \cdot \frac{|\xi|^2 - 1}{2} + \bar{\xi} = i \frac{\lambda''(\tau_0)}{\lambda'(\tau_0)} \frac{|\xi|^2 - 1}{(1-\xi)^2} \frac{1-\bar{\xi}}{1-\xi}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \Im(\tau_0) &= \Re \frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{1-|\xi|^2}{|1-\xi|^2}; \quad \frac{2}{1-\xi} = 1-i\tau_0; \\ (s) \quad \arccos \frac{1}{1-\xi} &= \arccos(1-i\tau_0) = \varphi; \end{aligned}$$

$$\frac{1-|\xi|^2}{(1-\xi)^2} = \Im(\tau_0) e^{2i\varphi}; \quad \frac{1-\bar{\xi}}{1-\xi} = \frac{|1-\xi|^2}{(1-\xi)^2} = e^{2i\varphi},$$

so daß

$$(78) \quad A_2^* = -e^{2i\varphi} \left\{ 1 + i \Im(\tau_0) \frac{\lambda''(\tau_0)}{\lambda'(\tau_0)} \right\}; \quad \varphi = \arccos(1-i\tau_0)$$

wird. Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} (79) \quad a^* &= -\frac{\lambda(\tau_0)}{\lambda'(\tau_0) \tau'(\xi) (|\xi|^2 - 1)} = -i e^{2i\varphi} \frac{\lambda(\tau_0)}{2 \lambda'(\tau_0) \Im(\tau_0)}; \\ b^* &= \frac{1-\lambda(\tau_0)}{\lambda'(\tau_0) \tau'(\xi) (|\xi|^2 - 1)} = \frac{\lambda(\tau_0) - 1}{\lambda(\tau_0)} a^*. \end{aligned}$$

Geht man nun zu

$$(80) \quad F(z) = -e^{2i\varphi} F^*(-ze^{-2i\varphi})$$

als Vergleichsfunktion über, so ergibt sich der folgende

Satz XI. [Ergänzung des Satzes XIX aus K. G., der im wesentlichen mit dem Landauschen Satze¹³⁾ aus dem Picardschen Ideenkreise äquivalent ist.]

Es sei $v \neq 0, 1$ gegeben. Man bestimme τ durch die Relation

$$(81) \quad \lambda(\tau) = \frac{v}{v-1}$$

aus irgendeinem Fundamentalbereich²⁹⁾ der Modulfunktion $\lambda(\tau)$ und setze

$$(82) \quad A = \frac{i\lambda(\tau)}{2\lambda'(\tau)\Im(\tau)}; \quad \Gamma = 1 + i\Im(\tau) \frac{\lambda''(\tau)}{\lambda'(\tau)}; \quad \gamma = \arccos \Gamma.$$

²⁹⁾ Durch das Verhältnis $v = \frac{a}{b}$ der endlichen Verzweigungspunkte ist die normierte Modul-Vergleichsfunktion ersichtlich völlig bestimmt. Daher kann es auf die Wahl von τ nicht ankommen. Übrigens ist dies auch leicht direkt aus den bekannten Moduleigenschaften von $\lambda(\tau)$ zu erkennen.

Es sei ferner $0 < t \leq 1$ und ϑ beliebig reell gegeben. Nimmt dann die normierte Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{R}$ den Wert

$$(83) \quad a = t \cdot A \cdot e^{i(\vartheta + \gamma)} P(\vartheta); \quad P(\vartheta) = \frac{\sqrt{1 + |\sin \vartheta \cdot \Gamma|}}{\sqrt{1 + |\Gamma|}} \quad \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \\ \text{für } \cos \vartheta \leq 0$$

nicht an, so nimmt sie den Wert $b = \frac{a}{v}$ an. Im Falle $t = 1$ sind die nach Satz D zu bildenden Extremalfunktionen auszunehmen.

11. Wir wollen noch die zur Anwendung des obigen Satzes XI benötigten Größen A und Γ aus (82) durch ϑ -Reihen ausdrücken. Dabei ist zur Abkürzung $\vartheta_i = \vartheta_i(0/\tau)$ (für $i = 0, 1, 2, 3$) gesetzt³⁰⁾. Nun ist

$$(t) \quad \lambda(\tau) = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} {}^{31)}, \\ \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)} = 4 \left(\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3} \right) = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\ddot{\vartheta}_2}{\vartheta_2} - \frac{\ddot{\vartheta}_3}{\vartheta_3} \right) {}^{32)} = i \pi \vartheta_3^4 k_1^2 {}^{33)} = i \pi \vartheta_0^4 {}^{34)},$$

also zunächst

$$(84) \quad A = \frac{1}{2 \pi \vartheta_0^4 \Im(\tau)}.$$

Wegen

$$(u) \quad \frac{\lambda''(\tau)}{\lambda'(\tau)} = \frac{\lambda'(\tau)}{\lambda(\tau)} + \frac{4 \vartheta_0'}{\vartheta_0} = i \pi \vartheta_0^4 + \frac{4 \vartheta_0'}{\vartheta_0}$$

ist ferner

$$(85) \quad \Gamma = 1 - \Im(\tau) \left\{ \pi \vartheta_0^4 - 4 i \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0} \right\}.$$

Dabei ist

$$(86) \quad \vartheta_0 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - h^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - h^{2n-1})^2 {}^{35)} \\ \frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0} = -2 i \pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{h^{-2n} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{h^{-(2n-1)} - 1} \right\}; \quad h = e^{i\pi\tau}.$$

Es sei etwa $v < 0$ ³⁶⁾, also nach (81) $0 < \lambda < 1$. Man kann dann³⁷⁾ $\tau = iT$, $T > 0$ setzen. Durchläuft v wachsend das Intervall $(-\infty, 0)$,

³⁰⁾ Wir wählen die Bezeichnungen nach H. Burkhardt, Elliptische Funktionen. 3. Aufl. 1920 (bei W. de Gruyter & Co.).

³¹⁾ Burkhardt, l. c. S. 253, § 79 (1).

³²⁾ Burkhardt, l. c. S. 156. Es ist $\vartheta_i' = \frac{d \vartheta_i}{d \tau}$ und $\ddot{\vartheta}_i = \frac{\partial^2 \vartheta_i(\tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{v=0}$ gesetzt.

³³⁾ M. Krause, Theorie der elliptischen Funktionen 1912 (bei Teubner). S. 72.

³⁴⁾ Burkhardt, l. c., S. 164, § 53 (15).

³⁵⁾ Burkhardt, l. c., § 51 (5) und § 52 (17).

³⁶⁾ Von Interesse wäre insbesondere noch die Diskussion der Fälle $v > 0$ und $|v| = 1$, die aber weniger einfach zu sein scheint.

³⁷⁾ Burkhardt, l. c., § 80, S. 259.

so wächst T von 0 bis $+\infty$. Man erkennt nun aus (84) und (86), daß A von $+\infty$ nach 0 fällt. Aus (85) und (86) folgt ebenso leicht, daß Γ von $+\infty$ nach $-\infty$ abnimmt. Da nach (75) Γ für $v = -1$ verschwindet, ist also $\Gamma \geq 0$ bzw. $\Gamma \leq 0$, je nachdem $v \leq -1$ oder $v \geq -1$ ist.

12. (K. G. § 4, 6.)

Für die Vergleichsfunktion $H(z)$ aus K. G. (114) ist $A_2 = -8$. Also gilt der folgende

Satz XII. (Ergänzung des Hurwitzschen Satzes²³), Satz XXIV in K. G.)

Ist die normierte Funktion $f(z)$ aus $\Re$ für $0 < |z| < 1$ von 0 verschieden, so nimmt sie jedes w mit

$$(87) \quad \begin{array}{ll} \text{arc } w = \vartheta; & |w| \leq \frac{3}{16} \quad \text{für } \cos \vartheta \geq 0 \\ & \leq \frac{1}{16} \sqrt{1 + 8|\sin \vartheta|} \quad \text{für } \cos \vartheta \leq 0 \end{array}$$

an. Im Falle des Gleichheitszeichens sind die nach Satz D zu bildenden Extremalfunktionen auszuschließen.

Man beachte insbesondere, daß also für jede nicht in $0 < |z| < 1$ verschwindende Funktion aus $\Re$ ein voller Halbkreis aus $|w| < \frac{3}{16}$ angenommen wird.

Königsberg i. Pr., den 5. März 1932.

Eingegangen am 9. März 1932.)

Die beiden Dodekaederräume.

Von

C. Weber und H. Seifert.

Es werden zwei Beispiele geschlossener dreidimensionaler Raumformen, einer hyperbolischen und einer sphärischen angegeben, die sich beide aus einem Dodekaeder durch Identifizierung gegenüberliegender Seitenflächen ableiten. Der sphärische Dodekaederraum ist ein Poincaréscher Raum (d. h. ein Raum, dessen Homologiegruppen mit denen der Hypersphäre übereinstimmen), von dem nachgewiesen wird, daß er mit den beiden bisher bekannten Poincaréschen Räumen endlicher Fundamentalgruppe topologisch übereinstimmt (homöomorph ist).

§ 1.

Raumformen.

Unter einer dreidimensionalen Raumform versteht man eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, der erstens eine sphärische, euklidische oder hyperbolische Metrik aufgeprägt ist, d. h. jeder Punkt hat eine Umgebung, die sich kongruent auf eine Vollkugel des sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Raumes abbilden läßt (Homogenitätsbedingung). Zweitens stellen wir an eine Raumform die Forderung, daß man von jedem Punkte aus in jeder Richtung einen geodätischen Strahl von unbeschränkter Länge abtragen kann (Unendlichkeitsbedingung)†. Es wird nicht ausgeschlossen, daß der unendliche Strahl mehrfache Punkte hat oder in sich selbst zurückkehrt. Beispiele von Raumformen sind der sphärische, euklidische und hyperbolische Raum selbst. Diese werden auch *räumliche Grundformen* genannt. Die zweite Forderung hat den Sinn, daß eine beliebige offene Punktmenge einer Grundform nicht als Raumform gilt. Ein Raumform heißt *geschlossen*, wenn die Entfernung je zweier Punkte eine bestimmte endliche Schranke nicht überschreitet.

†) Vgl. H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Ann. 95 (1925), S. 315, und P. Koebe, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, Ber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 23 (1927), S. 184.

Die Frage nach allen Raumformen ist gleichbedeutend mit der nach allen eigentlich diskontinuierlichen Gruppen fixpunktloser Bewegungen der räumlichen Grundformen. Eigentlich diskontinuierlich heißt die Gruppe, wenn keine Klasse äquivalenter Punkte einen Häufungspunkt hat. Dann hat jeder Punkt P von seinem nächsten äquivalenten eine Entfernung $d > 0$; eine Kugel mit dem Mittelpunkt P und einem Radius $< d/2$ enthält daher überhaupt keine äquivalenten Punkte mehr, da P wegen der Fixpunktlosigkeit der Gruppe nicht Fixpunkt einer Bewegung ist. In der Mannigfaltigkeit, die man durch Identifizieren äquivalenter Punkte der Grundform erhält (d. h. in dem Diskontinuitätsbereich der Gruppe), und in die man die Metrik der Grundform überträgt, ist also die Homogenitätsbedingung für eine Raumform erfüllt. Daß auch die Unendlichkeitsbedingung erfüllt ist, folgt daraus, daß man schon in der Grundform von jedem Punkte aus in jeder Richtung jede beliebige Länge abtragen kann; d. h. der Diskontinuitätsbereich einer fixpunktlosen, eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppe einer Grundform ist eine Raumform. Aber auch umgekehrt ist jede Raumform Diskontinuitätsbereich einer fixpunktlosen, eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppe der entsprechenden Grundform. Den Beweis findet man bei H. Hopf l. c. †) S. 317.

Aus dem letzten Satz folgt, daß jede Raumform zu einem konvexen Polyeder aufgeschnitten werden kann, in dem Seitenflächen paarweise zugeordnet sind. Unter einem konvexen Polyeder verstehen wir hier einen konvexen, dreidimensionalen Bereich der Grundform, der ebene Randflächen hat, falls er nicht mit der ganzen Grundform übereinstimmt. Man verbinde einen Punkt P der Grundform geradlinig mit allen äquivalenten Punkten und konstruiere die Mittelebenen dieser Verbindungsstrecken. Der Durchschnitt aller den Punkt P enthaltenden Halbräume, in die die Grundform durch diese Ebenen zerlegt wird, ist ein konvexes Polyeder, das keine äquivalenten Punkte im Innern enthält, während jeder Punkt einem inneren oder Randpunkt des Polyeders äquivalent ist. Das Polyeder heißt der zum Punkt P gehörige normale Diskontinuitätsbereich und stellt die gewünschte Aufschneidung der Raumform dar. Ist die Raumform geschlossen, so hat der normale Diskontinuitätsbereich immer endlich viele Seitenflächen. Wir haben es im folgenden nur mit geschlossenen Raumformen zu tun.

Für die Konstruktion geschlossener Raumformen ergeben sich somit zwei Verfahren:

1. Man geht von einem in der Grundform gelegenen konvexen Polyeder aus und sucht dessen Seitenflächen so paarweise zuzuordnen, daß auch für die Randpunkte des Polyeders die Homogenitätsbedingung erfüllt wird.

2. Man sucht eigentlich diskontinuierliche, fixpunktlose Bewegungsgruppen mit ganz im Endlichen gelegenen normalen Diskontinuitätsbereich.

Das beim ersten Verfahren benutzte Polyeder muß natürlich paarweise kongruente Seitenflächen haben, damit eine Zuordnung der Seitenflächen möglich wird. Ist diese Bedingung erfüllt und hat man die Seitenflächen irgendwie paarweise kongruent aufeinander bezogen, so werden dadurch gewisse Kanten des Polyeders äquivalent¹⁾. Sei $a, a', a'', \dots$ ein System äquivalenter Kanten mit den Kantenwinkeln $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$, so ist

$$(*) \quad \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots = 2\pi$$

offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein innerer Punkt der Kante a die Homogenitätsbedingung erfüllt. *(*) ist zugleich hinreichend für die Homogenität in den Ecken des Polyeders, falls alle Seitenflächen nach der ersten Art zugeordnet sind.* (Die Zuordnung zweier Seitenflächen heißt nach der ersten Art, wenn die Orientierungen, die durch eine Orientierung der ganzen Polyederoberfläche in den beiden zugeordneten Seitenflächen bewirkt werden, sich bei der kongruenten Abbildung der Seitenflächen umkehren.)

Beweis: Um die Ecken $E_1, E_2, \dots$ eines Systems äquivalenter Ecken des Polyeders werden kleine Kugeln $K_1, K_2, \dots$ von ein und demselben Radius r geschlagen. Diese Kugelflächen beziehen von den Grundformen eine Metrik derselben konstanten, positiven Krümmung k . K_i trifft das Polyeder in einem sphärischen Polygon P_i und schneidet damit vom Polyeder eine „Pyramide“ Π_i mit der Basisfläche P_i und der Spitze E_i ab. Die Seitenflächen aller dieser Pyramiden sind nun paarweise kongruent aufeinander abgebildet, vermöge der Zuordnung der Seitenflächen des Polyeders, und es ist zu zeigen, daß die Pyramiden nach Identifizierung zugeordneter Seitenflächen gerade eine in der Grundform gelegene Vollkugel vom Radius r ausfüllen, oder was dasselbe ist, daß die Fläche F , die man aus den Polygonen P_i durch Identifizierung zugeordneter Kanten erhält, eine Kugelfläche der konstanten positiven Krümmung k ist. Da mit jeder Kante von F genau zwei Polygone P_i inzident sind, ist F eine geschlossene Fläche und hat die Krümmung k , und zwar in den inneren Punkten der Polygone P_i nach Voraussetzung, in den inneren Punkten der Kanten von F wegen der kongruenten Zuordnung zweier Polygonkanten, und in den Ecken, weil die Winkelsumme um eine Ecke 2π be-

¹⁾ Den Fall, daß eine Kante mit ihrer umgekehrt orientierten äquivalent ist, kann man ausschließen, da dann für den Mittelpunkt der Kante die Homogenitätsbedingung verletzt wäre.

trägt auf Grund der Bedingung (*). F ist somit die Kugel oder die projektive Ebene, weil dies die beiden einzigen Flächen sind, die sich mit einer Metrik konstanter positiver Krümmung ausstatten lassen. Die projektive Ebene scheidet aus. Da nämlich die Seitenflächen des Polyeders alle nach der ersten Art zugeordnet sind, muß F orientierbar sein. Um das einzusehen, orientiere man das Polyeder und damit die Pyramiden Π_i . Der Rand des Zellsystems, das aus der Gesamtheit der Pyramiden Π_i mit identifizierten Seitenflächen besteht, wird dann nur von den orientierten Polygonen von F gebildet, da die Orientierungen, die in den Seitenflächen der Pyramiden induziert werden, wegen der Zuordnung nach der ersten Art sich gegenseitig aufheben. Nach einem elementaren Satz der kombinatorischen Topologie ist aber der Rand des Randes, also der Rand der aus den orientierten Polygonen P_i bestehenden Fläche F immer 0. Das heißt, F ist orientierbar. — Sind in dem Polyeder auch Seitenflächen nach der zweiten Art zugeordnet, so kann es vorkommen, daß die Homogenitätsbedingung (*) für die inneren Punkte der Polyederkanten, aber nicht für die Polyederecken erfüllt ist.

Das Verfahren (1) ist neuerdings zur Konstruktion geschlossener hyperbolischer Raumformen benutzt worden²⁾.

§ 2.

Raumteilungen.

Während das erste Konstruktionsverfahren bisher nur zur Auffindung einzelner Raumformen gedient hat, lassen sich nach dem zweiten Verfahren alle sphärischen³⁾ und euklidischen⁴⁾ Raumformen ermitteln, weil man alle eigentlich diskontinuierlichen Gruppen des sphärischen und euklidischen Raumes kennt. Von den eigentlich diskontinuierlichen Bewegungsgruppen des hyperbolischen Raumes sind nur einzelne bekannt, z. B. die Picardsche Gruppe⁵⁾. Ferner liefert jede regelmäßige Raumteilung einer räumlichen Grundform eine allerdings fixpunkthaltige größte Deckbewegungsgruppe mit endlichem Diskontinuitätsbereich. Wenn es gelingt, von einer solchen eine fixpunktlose Untergruppe anzugeben, welche

²⁾ F. Löbell, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Räume negativer Krümmung. Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. 83 (1931). Hier wird nicht ein Polyeder benutzt, sondern die Raumform wird aus mehreren Polyedern aufgebaut.

³⁾ W. Threlfall und H. Seifert, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. Math. Ann. 104 (1930).

⁴⁾ Enc. Math. Wiss. III A, B 12 (Steinitz), S. 129.

⁵⁾ R. Fricke, Aut. Funkt. I, Leipzig 1897, S. 79.

ebenfalls noch endlichen Diskontinuitätsbereich hat, so ist damit eine geschlossene Raumform gewonnen. Wir befassen uns daher zunächst mit den regelmäßigen Raumteilungen der Grundformen.

Unter einer regelmäßigen Raumteilung verstehen wir eine Zellteilung der Grundform in lauter kongruente platonische Körper (Zellen) von der Art, daß auch die reziproke Zellteilung aus platonischen Körpern besteht. Dafür kann man auch sagen, daß die Umgebungsmannigfaltigkeit einer Ecke der Zellteilung, d. h. der Schnitt der Zellteilung mit einer kleinen um die Ecke gelegten Kugelfläche, eine platonische Kugelteilung sein soll, die offenbar reziprok zur Zelle der reziproken Zellteilung ist. Bezeichnet q die Anzahl der Seitenflächen, die in einer Ecke einer einzelnen Zelle zusammenstoßen, so kommt für die Umgebungsmannigfaltigkeit nur ein von q -Ecken begrenzter platonischer Körper in Frage. Das einfachste Beispiel einer regelmäßigen Raumteilung ist die Würfelteilung des euklidischen Raumes. Die Umgebungsmannigfaltigkeit ist das Oktaeder, während die reziproke Zellteilung wieder aus Würfeln besteht. Eine Übersicht über die hiernach möglichen regelmäßigen Raumteilungen gibt die folgende Tabelle ⁶⁾.

	Zelle	Umgebungs- mannigfaltigkeit	Grundform
1.	Tetraeder	Tetraeder	sphärisch
2.	Tetraeder	Oktaeder	
3.	Würfel	Tetraeder	
4.	Tetraeder	Ikosaeder	
5.	Dodekaeder	Tetraeder	
6.	Oktaeder	Würfel	euklidisch
7.	Würfel	Oktaeder	
8.	Würfel	Ikosaeder	
9.	Dodekaeder	Oktaeder	hyperbolisch
10.	Dodekaeder	Ikosaeder	
11.	Ikosaeder	Dodekaeder	

Die beiden ersten Spalten der Tabelle geben nur die möglichen Raumteilungen an. Die dritte Spalte führt die Grundform auf, in der sie sich geometrisch realisieren lassen. Die Realisierung bedarf in jedem Falle eines besonderen Beweises. Reziproke Zellteilungen sind durch Klammern zusammengefaßt.

Jede dieser Raumteilungen besitzt eine größte (fixpunkthaltige) Gruppe von Selbstabbildungen erster Art, deren Diskontinuitätsbereich

⁶⁾ l. c. ⁴⁾ S. 121.

aus zwei spiegelbildlichen Tetraedern der Normalunterteilung besteht⁷⁾. Die beiden Dodekaederräume, die wir konstruieren werden, sind Diskontinuitätsbereiche von fixpunktlosen Selbstabbildungsgruppen der Raumteilungen 5 und 10, und zwar besteht der Diskontinuitätsbereich jedesmal aus der dodekaedrischen Zelle der Raumteilung.

§ 3.

Der hyperbolische Dodekaederraum.

Zur Konstruktion der Zellteilung 10 benutzen wir das konforme Modell des hyperbolischen Raumes, also das Innere einer euklidischen (Einheits-)Kugel, deren Orthogonalkugeln die hyperbolischen Ebenen darstellen. Ein hyperbolisches Dodekaeder, dessen Mittelpunkt wir uns der Einfachheit halber in den Mittelpunkt der Einheitskugel gelegt denken, ist vollständig bestimmt durch den Radius R seiner Umkugel. Läßt man R nach 0 gehen, so konvergiert der Kantenwinkel des Dodekaeders nach dem Kantenwinkel des euklidischen Dodekaeders, der bei etwa 117° liegt.

Geht R (hyperbolisch gemessen) nach ∞ , so nähern sich die Ecken des Dodekaeders der absoluten Kugel, und der Kantenwinkel ist in der Grenzlage $2\pi/6$, denn die drei um eine Ecke des Dodekaeders herumliegenden Seitenflächen sind in der Grenzlage drei Orthogonalkugeln der absoluten Kugel, die durch die auf der absoluten Kugel gelegene Ecke hindurchgehen und sich unter gleichen Winkeln schneiden. Da der Kantenwinkel stetig mit dem Radius R variiert, muß es einen

R -Wert geben, für den der Kanten-

winkel gerade $2\pi/5$ ist. Durch fortgesetzte Spiegelung dieses Dodekaeders an seinen Seitenflächen erhält man die Raumteilung 10.

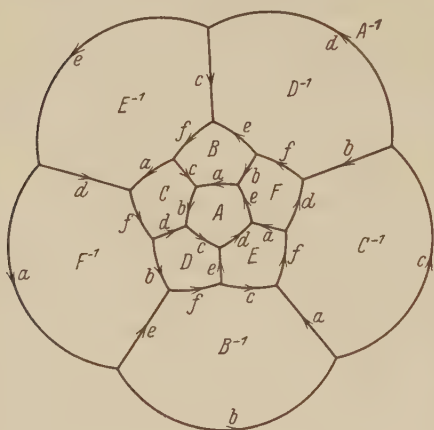


Fig. 1.

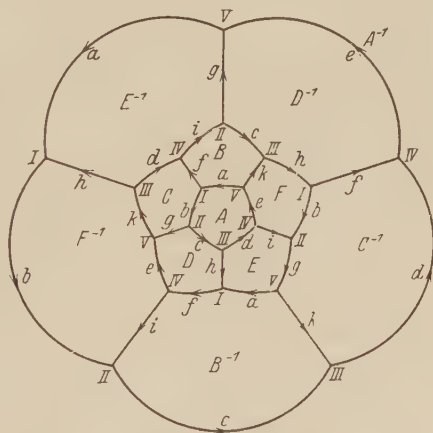
⁷⁾ Die zu den Raumteilungen 1 bis 6 gehörigen Bewegungsgruppen sind in dem vollständigen System aller sphärischen Bewegungsgruppen, l. c. ³⁾, enthalten und zwar sind es die folgenden Gruppen: 1. die durch den Automorphismus der Ikosaedergruppe entstehende einstufige Diagonalgruppe der Ordnung 60, S. 29; 2. bis 3. Rechtecksgruppe $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} =$ Oktaedergruppe, $\mathfrak{r} = \mathfrak{I} =$ Vierergruppe, Ordnung 192, S. 37; 4. bis 5. direktes Produkt $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} =$ Ikosaedergruppe, Ordnung 7200, S. 27; 6. Rechtecksgruppe $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} =$ Oktaedergruppe, $\mathfrak{r} = \mathfrak{I} =$ Tetraedergruppe, Ordnung 576, S. 36.

In dem Dodekaeder sollen nun je zwei Gegenseitenflächen um den Winkel $\frac{8}{10} \cdot 2\pi$ in ein und demselben Sinne verschraubt kongruent einander zugeordnet werden. Auf Grund dieser Zuordnung zerfallen die Dodekaederkanten in sechs Klassen zu je fünf äquivalenten Kanten, während alle Ecken untereinander äquivalent sind. In der Fig. 1 ist das Netz des Dodekaeders schematisch gezeichnet. Die Zeichenebene ist dabei durch einen unendlich fernen Punkt, den Mittelpunkt eines Fünfecks, geschlossen zu denken. Äquivalente Kanten und Flächen sind gleich bezeichnet. Da immer fünf Dodekaederkanten äquivalent sind, ist die Homogenitätsbedingung (*) für die Kanten, also nach dem in § 1 bewiesenen Satz auch für die Ecken erfüllt. Durch die Zuordnung entsteht daher eine geschlossene Raumform, der *hyperbolische Dodekaederraum*.

§ 4.

Der sphärische Dodekaederraum.

Wie soeben beginnen wir damit, uns die Zelle der Zellteilung 5, also ein Dodekaeder des sphärischen Raumes mit dem Kantenwinkel $2\pi/3$ zu verschaffen. Die Konstruktion wird im konformen Modell des sphärischen Raumes durchgeführt, also im euklidischen Raume, der durch einen unendlich fernen Punkt geschlossen ist. Die sphärischen Ebenen sind jetzt Diametralkugeln der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Den Mittelpunkt des zu konstruierenden sphärischen Dodekaeders denken wir uns wieder in den Koordinatenanfangspunkt $x = y = z = 0$ gelegt. Es ist durch den Radius R seiner Umkugel vollkommen bestimmt. Geht R nach 0, so nähert sich der Kantenwinkel des Dodekaeders dem Kantenwinkel des euklidischen Dodekaeders ($\sim 117^\circ$). Geht R (euklidisch gemessen) nach 1, so geht das Dodekaeder in die Einheitskugel über, der Kantenwinkel ist dann π . Es gibt also einen R -Wert, für den der Kantenwinkel gerade $2\pi/3$ ist. Dieses Dodekaeder ist die Zelle der Raumteilung 5. Zugleich sieht man, weshalb 5 nur im sphärischen, 10 nur im hyperbolischen Raume möglich ist. Es liegt daran, daß für die Dodekaeder des sphärischen Raumes der Kantenwinkel größer, für diejenigen des hyperbolischen Raumes kleiner als der euklidische Kantenwinkel ist.



In dem soeben konstruierten sphärischen Dodekaeder sollen wieder Gegenseitenflächen zugeordnet werden, diesmal aber um den Winkel $2\pi/10$ verschraubt. Dann zerfallen die Kanten in zehn Klassen zu je drei äquivalenten (Fig. 2). Die Homogenitätsbedingung (*) ist also auch hier erfüllt, somit liegt eine geschlossene Raumform, der *sphärische Dodekaeder-raum* vor.

§ 5.

Topologische Eigenschaften der Dodekaederräume.

Die beiden Dodekaederräume sind nicht nur als Raumformen interessant, sondern auch als bloße topologische Mannigfaltigkeiten. So ergibt die Berechnung der numerischen Invarianten⁸⁾, daß der sphärische Dodekaederraum ein Poincaréscher Raum ist, d. h. daß jede geschlossene Kurve Rand einer orientierbaren Fläche, aber nicht notwendig eines Elementarflächenstückes ist. Nun sind außer dem sphärischen Dodekaederraum nur noch zwei Poincarésche Räume mit endlicher Fundamentalgruppe

bekannt. Der eine wurde von H. Poincaré⁹⁾ angegeben als erstes Beispiel eines Poincaréschen Raumes, den andern hat M. Dehn¹⁰⁾ aus der Kleeblattschlinge konstruiert. Da nun alle drei Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben¹¹⁾, liegt die Vermutung nahe, daß die Räume topologisch übereinstimmen. Daß dieses tatsächlich der Fall ist, zeigen wir auf Grund des Satzes, daß ein gefaseter Poincaréscher Raum durch seine Fundamentalgruppe eindeutig bestimmt ist¹²⁾. Wenn sich also zeigen läßt, daß alle drei Räume faserbar sind, so ist die Übereinstimmung gesichert. Der Dodekaederraum läßt sich

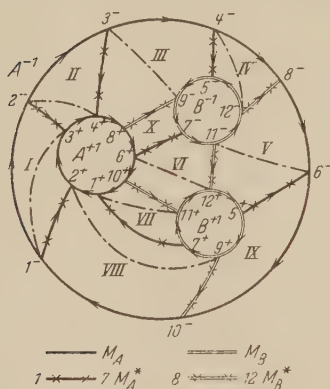


Fig. 3.

fasern als Diskontinuitätsbereich einer fixpunktlosen sphärischen Bewegungsgruppe¹³⁾. Die Faserung des Dehnschen Kleeblattschlingenraumes ist l. c.¹²⁾

⁸⁾ Diese Berechnung ist durchgeführt, l. c.³⁾ S. 65.

⁹⁾ H. Poincaré, Cinquième compl. à l'an. sit. Palermo Rendiconti 18 (1904), S. 109.

¹⁰⁾ M. Dehn, Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann. 69 (1910), S. 160.

¹¹⁾ Vgl. l. c.³⁾ S. 67.

¹²⁾ H. Seifert, Topologie gefaseter Räume, Acta math. 60, Satz 10 und 12.

¹³⁾ W. Threlfall und H. Seifert, Topologische Untersuchungen. II. Math. Ann. 107 (1932), S. 568.

S. 212 angegeben worden. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß Poincarés Poincaréscher Raum sich fasern läßt.

Poincaré erhält seinen Poincaréschen Raum durch Aufeinanderkleben zweier Doppelvollringe V und V^* mit ihren Oberflächen. Ein Doppelvollring ist ein von einer Fläche vom Geschlechte $p = 2$ berandeter Raum, der aus einer euklidischen Vollkugel durch Ansetzen zweier Vollhenkel entsteht, wofür man auch sagen kann: durch Identifizieren von zwei Paaren getrennt liegender Elementarflächenstücke auf der Randkugelfläche. In der Fig. 3 z. B. stellt die Zeichenebene, die durch einen einzigen unendlich fernen Punkt zur konformen Ebene geschlossen zu denken ist, die Kugeloberfläche dar, der darunter liegende Halbraum (des konformen Raumes) das Kugellinnere, und auf der Oberfläche sind die beiden Elementarflächenstücke A^{+1} und A^{-1} sowie B^{+1} und B^{-1} zu identifizieren. Diese aufeinander zu klebenden Elementarflächenstücke machen im Vollring je ein einziges Elementarflächenstück A und B aus. A und B heißen *Meridianflächen des Doppelvollringes*; sie schneiden den Doppelvollring durch seine beiden Henkel zur Vollkugel auf. Ihre Randkurven M_A und M_B sind Kurven der berandenden Doppelringfläche, die auf ihr zusammengehörige *Meridiankreise des Vollringes* genannt werden. Aus der Randkugelfläche schneiden sie vier Löcher heraus, deren Ränder paarweise zugeordnet sind: durch diese Zuordnung geht die vierfach gelochte Kugelfläche in die Doppelringfläche über. In Fig. 3 sind die beiden Kreise, die in M_A zusammenfallen, einfach ausgezogen, die entsprechenden für M_B doppelt. — Sind umgekehrt auf einer Fläche vom Geschlechte $p = 2$ zwei geschlossene Kurven M_A und M_B gegeben, die diese Fläche zur viermal gelochten Kugelfläche aufschneiden, so können sie zu Meridiankreisen eines Doppelvollringes V ernannt werden, dessen Oberfläche die gegebene Doppelringfläche ist. Um den Doppelvollring zu konstruieren, spannt man zuerst in die paarweise zugeordneten Lochränder der Kugelfläche zwei Paare von Elementarflächenstücken A^{+1} , A^{-1} und B^{+1} , B^{-1} ein, die die gelochte Kugelfläche schließen; die Kugelfläche füllt man dann zur Vollkugel aus, die nach Identifizieren der Elementarflächenstücke den Vollring V liefert.

Zwei Paare zusammengehöriger Meridiankreise können auf einer Doppelringfläche auf wesentlich verschiedene Weise gewählt werden. Z. B. sind in Fig. 3 die beiden Kurven M_A^* und M_B^* ein zweites Paar zusammengehöriger Meridiankreise. M_A^* ist die einfach ausgezogene geschlossene Kurve, die der Reihe nach die Punkte 1 bis 7 passiert, M_B^* die doppelt ausgezogene Kurve, die über die Punkte 8 bis 12 läuft. Die in Fig. 3 gezeichnete Doppelringfläche, d. h. die aus der Zeichenebene durch Ausschneiden von A^{-1} , A^{+1} und B^{-1} , B^{+1} und paarweises Identi-

fizieren der Lochränder entstehende geschlossene Fläche ist also Randringfläche eines zweiten Vollringes V^* . Sind allgemein auf einer Doppelringfläche zwei Paare zusammengehöriger Meridiankreise M_A, M_B und M_A^*, M_B^* gegeben, so tritt die Doppelringfläche auf zweifache Weise als Randringfläche eines Doppelvollringes auf. Die beiden Doppelringe V und V^* setzen sich längs der gemeinsamen Randfläche zu einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zusammen. Man bezeichnet die Doppelringfläche mit den beiden Paaren von Meridiankreisen, durch die eine solche dreidimensionale Mannigfaltigkeit bestimmt ist, als ein Heegaarddiagramm der Mannigfaltigkeit¹⁴⁾. In der Fig. 3 ist das Heegaarddiagramm gezeichnet, durch das Poincaré seinen Raum bestimmt.

Nun läßt dieses Heegaarddiagramm eine involutorische topologische Selbstabbildung zu, bei der die beiden Meridiankreispaaire M_A, M_B und M_A^*, M_B^* miteinander vertauscht werden. Die Selbstabbildung ist eine „topologische Spiegelung“ der Doppelringfläche an der in der Fig. 3 strichpunktierten geschlossenen Kurve 1 3 9 2 4 12 6 11 1, der „Symmetrielinie“. Die Polygone I bis VIII sind Vier- oder Sechsecke, die von der Symmetrielinie diagonal durchsetzt werden, so daß ihre beiden Hälften, um die Diagonale herumgeklappt, aufeinander bezogen sind; die

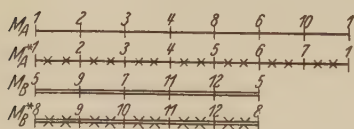


Fig. 4.

von der Symmetrielinie nicht durchgesetzten Vierecke IX und X sind einander zugeordnet. Da bei dieser Selbstabbildung M_A in M_A^* , M_B in M_B^* übergeht, wie Fig. 4 erläutert, so ist durch die Selbstabbildung der Doppelringfläche zugleich die Tatsache sichergestellt, daß die

geschlossenen Kurven M_A^* und M_B^* mögliche Meridiankreise eines Doppelvollringes V^* auf der Doppelringfläche sind, d. h. ebenso wie M_A und M_B die Doppelringfläche zur vierfach gelochten Kugelfläche aufschneiden.

Die Selbstabbildung der Doppelringfläche läßt sich zu einer involutorischen topologischen Selbstabbildung S des Poincaréschen Raumes erweitern. Zunächst kann man nämlich die Elementarflächenstücke A auf A^* und B auf B^* so abbilden, daß die Abbildung auf den Randkreisen M_A und M_A^* bzw. M_B und M_B^* mit der durch die Spiegelung an der Symmetrielinie gegebenen Abbildung (Fig. 3) übereinstimmt. Schneidet man dann die beiden Vollringe V und V^* zu Vollkugeln längs der Meridianschnitte A, B bzw. A^*, B^* auf, so sind die beiden Kugelflächen topologisch aufeinander abgebildet vermöge der Spiegelung der Doppelringfläche an der Symmetrielinie im Verein mit der eben fest-

¹⁴⁾ O. Veblen, Analysis situs 2nd ed. (New York 1931), S. 155.

gesetzten Abbildung der Elementarflächenstücke A und B auf A^* und B^* . Diese Abbildung läßt sich zu einer topologischen Abbildung der beiden Vollkugeln aufeinander erweitern, indem man Radien, die vom Mittelpunkt der Vollkugeln nach zugeordneten Oberflächenpunkten gehen, kongruent aufeinander abbildet. Hierdurch wird zugleich die gesuchte involutorische topologische Selbstabbildung S des Poincaréschen Raumes bewirkt, die die beiden Vollringe V und V^* vertauscht und auf der gemeinsamen Oberfläche in der erwähnten Spiegelung an der Symmetrielinie besteht.

Da die Selbstabbildung außer den Punkten der Symmetrielinie keine Fixpunkte hat, so läßt sich der Poincarésche Raum als ein zweifacher verzweigter Überlagerungsraum desjenigen geschlossenen Raumes auffassen, zu dem sich der Vollring V schließt, wenn man auf seine Oberfläche die erwähnte Spiegelung ausübt, sie also längs der Symmetrielinie zusammenfaltet. Nun wird sich hernach zeigen, daß dieser so erhaltene Raum die Hypersphäre K_3 ist, die Symmetrielinie in ihr aber als Torusknoten darin liegt. Der Poincarésche Raum wird danach als zweifacher Überlagerungsraum $\tilde{K}_3$ der Hypersphäre erkannt mit einem Torusknoten als Verzweigungskurve. Der Grundraum, die Hypersphäre, läßt sich nach l. c.¹²⁾, S. 161 so fasn, daß der Torusknoten gewöhnliche Faser wird. Daraus folgt unmittelbar die Faserbarkeit des zweifachen Überlagerungsraumes $\tilde{K}_3$, also des Poincaréschen Raumes. Man bohrt nämlich im K_3 die Verzweigungsfaser aus; die Punkte von $\tilde{K}_3$, die sich in Punkte der ausgebohrten Hypersphäre abbilden, machen einen unverzweigten, von einer Ringfläche berandeten Überlagerungsraum der ausgebohrten Hypersphäre aus, der sich nach l. c.¹²⁾, S. 195 fasern läßt¹⁵⁾. $\tilde{K}_3$ entsteht aus diesem berandeten Überlagerungsraum; durch Schließen mit einem geeigneten Verschlußring, dessen Meridiankreis sich in den zweimal durchlaufenden Meridiankreis des Bohrkernes des Grundraumes K_3 abbildet. Die Randringfläche dieses Verschlußringes ist gefasert, und sein Meridiankreis durchsetzt jede ihrer Fasern zweimal (weil der Meridiankreis des Bohrkernes jede Faser einmal durchsetzt, da eine gewöhnliche Faser der Hypersphärenfaserung ausgebohrt wurde). Die Faserung läßt sich nach l. c.¹²⁾, S. 166 in das Innere des Verschlußringes fortsetzen, der dadurch

¹⁵⁾ Der Satz ist nur für (geschlossene und offene) gefaserte Grundräume ausgesprochen, gilt aber auch für berandete. Man hat die Randringflächen des Grundraumes nur mit gefaserten Hohlringen auszukleiden, die nach innen offen sind. Dadurch geht der Grundraum in einen offenen gefaserten Raum über, auf den wir den Satz anwenden. Den berandeten Überlagerungsraum erhält man, indem man die Fasern fortläßt, die über Fasern der an den berandeten Grundraum angetzten Hohlräume liegen.

zu einem gefaserten Vollring mit einer zweifachen Ausnahmefaser wird. Damit ist die Faserung des Poincaréschen Raumes geleistet.

Es bleibt noch übrig, die Oberfläche des Doppelvollringes V längs der Symmetrielinie zusammenzufalten und als Hypersphäre zu erweisen, in der die Symmetrielinie als Torusknoten liegt. Zu dem Zwecke betrachten wir die Oberfläche des Vollringes V , der in Fig. 3 zur Vollkugel aufgeschnitten war. Auf dieser Vollkugel sind Flächenstücke paarweise zugeordnet. Es gelingt nun, diese Flächenstücke nacheinander beizuziehen, indem man sie längs der Symmetrielinie zusammenklappt, so daß die zugeordneten Flächenstücke ein einziges, jetzt im Innern des Vollringes V , also im unteren Halbraum gelegenes Flächenstück ausmachen. Der unterhalb der Zeichenebene gelegene Halbraum des konformen Raumes ist aber eine Vollkugel, und er verliert diese Eigenschaft durch Beiziehen von Flächenstücken seiner Oberfläche nicht, solange diese Oberfläche (die Zeichenebene) noch in mindestens zwei Flächenstücke geteilt ist. Die Strecke der Symmetrielinie, an der die beigezogenen Flächenstücke angrenzen, verschwindet dabei ebenfalls im unteren Halbraum und nur die Randpunkte der Strecke zeigen sich noch auf der Kugeloberfläche. Die Teile der Symmetrielinie, die auf der Kugeloberfläche, also in der Zeichenebene liegen, sind in den Fig. 5 bis 13 stark ausgezogen; sobald sie durch Beiziehen angrenzender Flächenstücke in den unteren Halbraum versinken, sind sie doppelt gestrichelt. Die doppelten gestrichelten Linien stellen also die Projektion der stückweise in den unteren Halbraum versenkten Symmetrielinie dar, die ein von oben in den unteren Halbraum blickender Beobachter durch die Zeichenebene durchschimmern sieht. So gibt z. B. Fig. 5 die Kugeloberfläche genau so wie Fig. 3 wieder, nur daß die Symmetrielinie, die noch ganz an der Oberfläche liegt, jetzt stark ausgezogen ist. Das Beiziehen beginnt mit den beiden Vierecken, in die das Sechseck VIII durch die Strecke $2^+ 9^+$ der Symmetrielinie zerlegt wird. Man muß also das Sechseck vom unteren Halbraum der Zeichenebene her allmählich zusammenkneifen, so daß die Symmetrielinie Faltlinie wird. In Fig. 6 ist dies geschehen. Nur die Randpunkte 2^+ und 9^+ sind noch fett auf der Oberfläche zu sehen. 7^+ ist auf 10^- gefallen und soll hinfort die letztere Nummer tragen.

Nach dem Beiziehen gehen uns die beigezogenen Flächenstücke nichts mehr an und treten in den Figuren nicht mehr auf. Der untere Halbraum ist Vollkugel geblieben, nur ein Stück der Symmetrielinie ist in ihn hineingezogen worden. Durch Beiziehen der längs Strecken der Symmetrielinie angrenzenden Flächenstücke ist in Fig. 11 der Zustand erreicht, daß nur noch die Flächenstücke A^{+1} , A^{-1} , B^{+1} , B^{-1} , IX und X an der Oberfläche liegen, die Symmetrielinie aber nur noch in einzelnen Punkten die

Oberfläche des unteren Halbraumes berührt. Auch diese Flächenstücke können noch beigezogen werden. Die Knicklinien sind jetzt aber nicht mehr Strecken der Symmetrielinie, sondern solche der Meridiankreise der Vollringe V und V^* . In Fig. 13 gibt es auf der Oberfläche der Vollkugel nur noch die beiden Flächenstücke A^{+1} und A^{-1} . Sie teilen die Zeichenebene, also die Randkugelfläche der Vollkugel, zu der wir den Doppelvollring V aufgeschnitten hatten, in zwei „Halbkugelflächen“, die paarweise zugeordnet sind, so wie die beiden Halbkugelflächen einer euklidischen Kugelfläche durch Spiegelung am Äquator. Durch Beiziehen auch dieser letzten Flächenstücke schließt sich die Vollkugel und damit V zur Hypersphäre.

Wie nun im unteren Halbraum die geschlossene Symmetrielinie liegt, das ist in der Projektion bei jedem einzelnen Schritt des Beiziehens verfolgt worden und aus den Fig. 5 bis 14 zu ersehen. In Fig. 14 sind auch die letzten Punkte der Symmetrielinie in den unteren Halbraum versunken. Danach ist die aus der Figur ersichtliche Deformation vorgenommen, die die Symmetrielinie als Torusknoten mit den Invarianten $m = 5$, $n = 3$ erweist [Bedeutung der Invarianten in ¹. c.¹²), S. 160].

Der sphärische Dodekaederraum ist damit als zweifacher Überlagerungsraum der Hypersphäre dargestellt mit dem Torusknoten (3,5) als Verzweigungslinie, d. h. einem Knoten, der sich ohne Selbstüberschneidung auf die gewöhnliche unverknotete Rotationsringfläche legen läßt, genau fünfmal den Ring durchläuft und ihn gleichzeitig hierbei dreimal umschlingt. Jeder dreidimensionale geschlossene Raum läßt sich nun¹⁶⁾ als Überlagerungsraum eines oder eines Systems von mehreren unter Umständen verketteten Knoten gewinnen. Kann man einen Raum als Überlagerungsraum eines Torusknotens darstellen, so weiß man, daß er die Eigenschaft hat, sich fasern zu lassen, und mit dieser Eigenschaft beherrscht man ihn topologisch in hohem Grade. Es fragt sich daher, ob auch der hyperbolische Dodekaederraum faserbar ist. Das ist nicht der Fall, denn während jeder Diskontinuitätsbereich einer endlichen Bewegungsgruppe des sphärischen Raumes (der Hypersphäre) sich fasern läßt [vgl. ¹³)], ist kein Diskontinuitätsbereich einer fixpunktlosen, eigentlich diskontinuierlichen¹⁷⁾ Bewegungsgruppe des hyperbolischen Raumes von endlichem Rauminhalt faserbar.

Die letztere Tatsache wollen wir hier beweisen. Die Fundamentalgruppe des Diskontinuitätsbereiches einer fixpunktlosen metrischen Bewegungsgruppe stimmt mit der Bewegungsgruppe selbst überein. Wir

¹⁶⁾ J. W. Alexander, Note on Riemann, spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920).

¹⁷⁾ Vgl. Fußnote ⁵⁾ § 15.

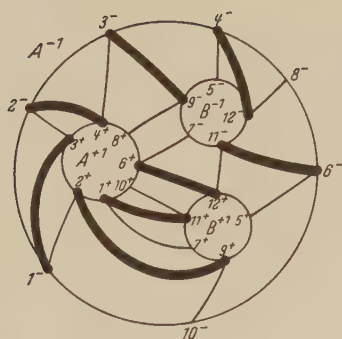


Fig. 5.

Viereck $2^+ 9^+ 7^+ 1^+$ wird
auf Viereck $2^+ 9^+ 10^- 1^-$ geklappt.

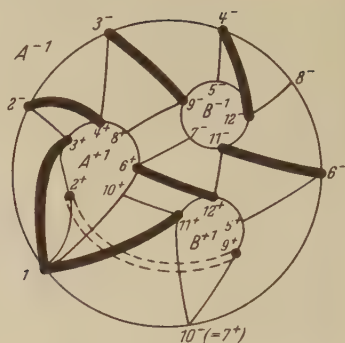


Fig. 6.

Dreieck $1 3^+ 2^+$ wird auf $1 3^+ 2^-$ und
danach $2^- 4^+ 3^+$ auf $2^- 4^+ 3^-$ geklappt.

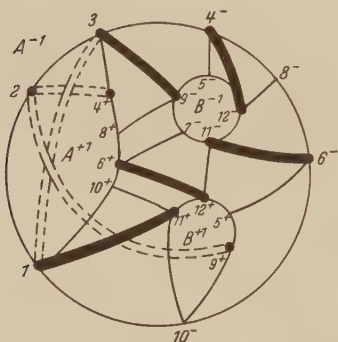


Fig. 7.

$1 11^+ 10^+$ auf $1 11^+ 10^-$.

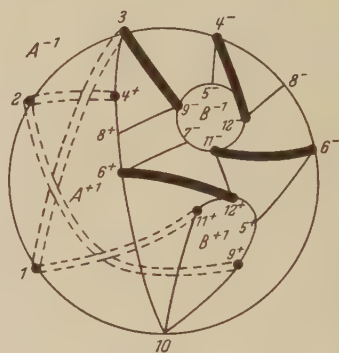


Fig. 8.

$6^+ 12^+ 11^- 7^-$ auf $6^+ 12^+ 11^+ 10^-$;
darauf Deformation von $6^+ 12^+$
im unteren Halbraum.

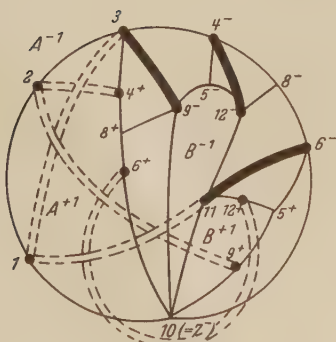


Fig. 9.

$11 6^- 5^+ 12^+$ auf $11 6^- 8^- 12^-$;
danach $4^- 12^- 5^-$ auf $4^- 12^- 8^-$.

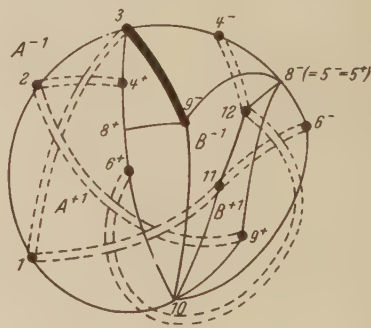


Fig. 10.

$3 9^- 8^- 4^-$ auf $3 9^- 8^+ 4^+$.

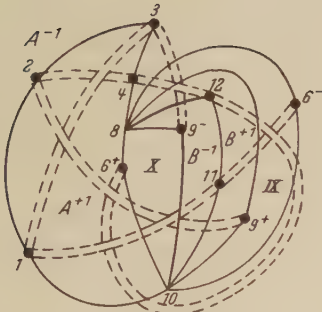


Fig. 11.

8 12 11 10 9⁻ auf
8 12 11 10 9⁺.

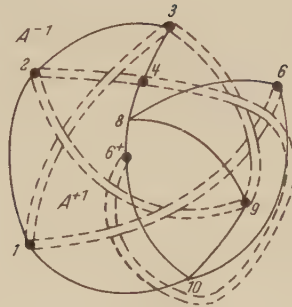


Fig. 12.

8 9 10 6⁻ auf 8 9 10 6⁺;
danach Linie 4 6 über 9 hinweggezogen.

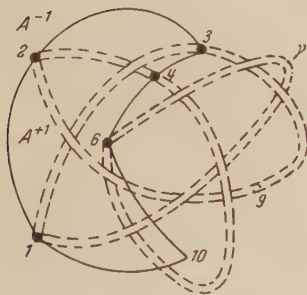


Fig. 13.

Die Punkte 1, 2, 3, 4, 6 des Knotens werden im unteren Halbraum versenkt und danach 6 γ über 3 und 4 hinweggezogen.

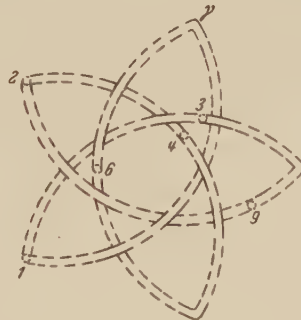


Fig. 14.

können daher den Fall ausschließen, daß die Fundamentalgruppe aus dem Einselement allein besteht, denn dann wäre der Diskontinuitätsbereich der ganze hyperbolische Raum, hätte also nicht endlichen Rauminhalt. Diesen Fall ausgenommen, ist eine notwendige Bedingung für die Faserbarkeit eines Raumes die Existenz eines vom Einselement verschiedenen Elementes H in der Fundamentalgruppe, das mit jedem anderen Element A transformiert, entweder in sich selbst oder auch in sein Reziprokes übergeht. Für jedes Element A der Fundamentalgruppe muß also gelten¹⁸⁾:

$$(**) \quad A H A^{-1} = H^{\pm 1}.$$

Wir zeigen, daß eine Bewegungsgruppe des hyperbolischen Raumes mit endlichem Rauminhalt ein solches Element nicht besitzen kann. Wegen der vorausgesetzten Fixpunktlosigkeit kann H keine Drehung um einen endlichen Punkt des hyperbolischen Raumes sein und hat daher nur zwei,

¹⁸⁾ Vgl. Fußnote ¹²⁾ S. 223.

unter Umständen zusammenfallende (uneigentliche) Fixpunkte auf der absoluten (unendlich fernen) Kugel des hyperbolischen Raumes. Nehmen wir zunächst an, daß die beiden uneigentlichen Fixpunkte von H nicht zusammenfallen. Dann kann das Minuszeichen in Gleichung (**) nicht gelten, denn die Bewegung A würde dann die Achse von H topologisch auf sich abbilden, die uneigentlichen Endpunkte aber vertauschen. Dann müßte A auf der Achse einen Fixpunkt besitzen, was der vorausgesetzten Fixpunktlosigkeit der Gruppe widerspricht. Also muß für alle Elemente der Fundamentalgruppe das Pluszeichen gelten, alle müssen mit H vertauschbar sein, daher die uneigentlichen Punkte der Achse von H einzeln festlassen, also dieselbe Achse wie H besitzen. Der normale Diskontinuitätsbereich eines Achsenpunktes von H wird alsdann nur von zwei Normalebene der Achse begrenzt, die wegen der eigentlichen Diskontinuität der Bewegungsgruppe die Achse in endlichem Abstände voneinander schneiden; er hat daher keinen endlichen Rauminhalt. Ebenso wenig kann ein endlicher Rauminhalt des Diskontinuitätsbereiches zustande kommen, wenn die beiden Fixpunkte von H zusammenfallen. Dann ist H eine parabolische Bewegung, und man kann zeigen, daß alle Bewegungen der Fundamentalgruppe ebenfalls parabolisch sein müssen.

Hieraus folgt, daß, wenn man den hyperbolischen Dodekaederraum als Überlagerungsraum eines Systems unter Umständen verketteter Knoten darstellt, diese Knoten nicht Fasern einer Faserung der Hypersphäre sein können. Denn für den Überlagerungsraum gälte derselbe Beweis der Faserbarkeit, den wir zuvor für einen einzigen Torusknoten erbracht haben. — Beispiele verketteter Hypersphärenfasern sind: zwei einfach verschlungene Kreise, allgemeiner ein Torusknoten und die Seele seiner Ringfläche, zwei einander nicht schneidende kongruente Torusknoten derselben Rotationsringfläche.

Nun kann man nach folgendem Verfahren den hyperbolischen Dodekaederraum als fünffachen Überlagerungsraum der Hypersphäre darstellen mit den in der Fig. 15 gezeichneten beiden verketteten Kreisen als Verzweigungslinien. Das Dodekaeder (Fig. 1) gestattet eine Drehung der Ordnung 5 um eine durch zwei gegenüberliegende Fünfecksmitten gehende Achse. Hierbei gehen Punkte, die vermöge der Seitenzuordnungen der Dodekaederoberfläche äquivalent sind, in äquivalente Punkte über. Den Drehungen des Dodekaeders um die Fünferachse entsprechen daher metrische Selbstabbildungen des hyperbolischen Dodekaederraumes. Bei ihnen bleibt die Fünferachse, die im Dodekaederraum eine geschlossene geodätische Linie ist, punktweise



Fig. 15.

fest. Durch die Drehungen werden aber überdies genau fünf vermöge der Flächenzuordnungen der Dodekaederoberfläche äquivalente Kanten untereinander vertauscht. Diese machen daher ebenfalls eine geschlossene geodätische Fixlinie im Dodekaederraum aus. Identifiziert man nun im Dodekaederraum alle Punkte, die hinsichtlich der erwähnten Fünfergruppe äquivalent sind, so ergibt sich — was hier im einzelnen nicht gezeigt wird — die Hypersphäre, und die beiden geodätischen Fixlinien gehen in zwei Kreise über, die in der Hypersphäre, wie Fig. 15 zeigt, verkettet sind. Diese beiden verketteten Kreise lassen sich daher nicht ohne Überschneidungen auf die Rotationsringfläche legen, wie man auch unmittelbar bestätigen kann.

Berechnung der numerischen Invarianten des hyperbolischen Dodekaederraumes aus Fig. 1 ergibt drei Torsionskoeffizienten je vom Werte 5, die Bettische Zahl der Dimension 1 ist 0.

(Eingegangen am 6. Mai 1932.)

Über das Äquivalenzproblem beschränkter hermitescher Formen.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Im nachstehenden soll eine zu der Sylvester-Jacobischen vollständig analoge Äquivalenztheorie beschränkter, nicht-singulärer hermitescher Matrizen entwickelt werden, wobei als Gruppe der transformierenden Matrizen die Gruppe der *beschränkten*¹⁾ nicht-singulären Matrizen verwendet wird (wir nennen eine beschränkte Matrix nicht-singulär, wenn sie eine eindeutige beschränkte Reziproke hat). Es versteht sich von selbst, daß die bei den endlichen Matrizen angewandten Schlußweisen auch nach Heranziehung der Hellinger-Hahnschen Theorie der unitären Invarianten nicht zum Ziele führen können, da durch diese Theorie nur eine *unitäre* Invariantentheorie, also keine Äquivalenztheorie, sondern eine Ähnlichkeitstheorie geliefert wird, die demnach kein Streckenspektrum wegzutransformieren gestattet. Das Nachstehende wird auf einer von mir schon an anderer Stelle angegebenen eineindeutigen Parameterdarstellung aller nicht-singulären beschränkten Matrizen beruhen, die hier im Zusammenhang dargestellt werden muß.

Wir bezeichnen durch $A^* = \bar{A}'$ die konjugiert-transponierte („be-
gleitende“, auch „adjungierte“) Matrix der beschränkten Matrix A . Demnach ist $A = A^*$ die Definitionsgleichung des hermiteschen und $A^{-1} = A^*$ diejenige des unitären Charakters (wir wollen das Zeichen A^{-1} nur dann verwenden, wenn A beschränkt ist und eine eindeutige beschränkte Reziproke hat). Die Matrix A heißt nach Herrn Toeplitz *normal*, wenn sie mit A^* vertauschbar ist: $AA^* = A^*A$. Die hermiteschen und die unitären Matrizen sind offenbar normal (aber nicht umgekehrt; vgl. übrigens Satz V weiter unten).

¹⁾ Würde man auch nicht beschränkte transformierende Matrizen zulassen, wie das formal in Hilberts Theorie der polaren Integralgleichungen geschieht, so ließe sich wegen der Ungültigkeit der Faltungssätze kein allgemeingültiges Äquivalenzkriterium erreichen. Vgl. hierzu die Bemerkungen zu Satz VII weiter unten.

Zwei beschränkte Matrizen A_1, A_2 heißen *ähnlich*, wenn es eine beschränkte nicht-singuläre Matrix S gibt derart, daß $SA_1S^{-1} = A_2$ gilt. Hingegen heißt die beschränkte Matrix A_1 mit der beschränkten Matrix A_2 *äquivalent*, wenn es eine beschränkte nicht-singuläre Matrix T gibt derart, daß $TA_1T^* = A_2$ wird (die Voraussetzung, daß T nicht-singulär ist, ist deshalb notwendig, damit umgekehrt A_2 mit A_1 äquivalent sei: $ZA_2Z^* = A_1$; $Z = T^{-1}$). Der Zusammenhang zwischen A und TA_1T^* besteht bekanntlich darin, daß, wenn man in die zu der Matrix $A = \|a_{ij}\|$ gehörige „Kopplungsform“²⁾

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji} x_i \bar{x}_j$$

vermöge einer linearen Transformation neue Variablen einführt, sich die zu der Matrix TA_1T^* gehörige Kopplungsform ergibt. — Sind die beiden beschränkten Matrizen A_1, A_2 *unitär äquivalent* (d. h. kann T als eine *unitäre* Matrix gewählt werden), so sind sie auch *ähnlich*, da dann $T^* = T^{-1}$ ist. Hingegen sind zwei äquivalente Matrizen im allgemeinen nicht auch unitär äquivalent. Dies folgt schon aus dem Toeplitzschen Satz³⁾, wonach eine beschränkte positiv definite Matrix, ganz unabhängig von der Lage und der Beschaffenheit ihres Spektrums, stets mit der Einheitsmatrix E äquivalent ist.

Dabei heißt eine beschränkte Matrix A positiv definit, wenn sie nicht-negativ definit und außerdem nicht-singulär ist, wobei unter einer „nicht-negativ definiten“ Matrix eine beschränkte Matrix zu verstehen ist, deren Kopplungsform in jedem Punkte des Hilbertschen Raumes nur reeller nicht-negativer Werte fähig ist⁴⁾. Demnach ist jede nicht-negativ definite und daher auch jede positiv definite beschränkte Matrix gewiß hermitesch. Es hat ferner jede beschränkte positiv definite Matrix eine eindeutige beschränkte Reziproke, die ebenfalls positiv definit ist. Letzteres folgt unmittelbar aus dem erwähnten Toeplitzschen Äquivalenzsatz beschränkter positiv definiter Matrizen³⁾. Um dies einzusehen, beachte man zunächst, daß, wenn A irgendeine positiv definite beschränkte Matrix

²⁾ Man kann diese Kopplungsform nicht einfach hermitesche Form nennen, da sie nur dann hermitesch ist, wenn $A = A^*$ gilt, während hier A zunächst eine beliebige (beschränkte) Matrix bedeutet.

³⁾ O. Toeplitz, Göttinger Nachrichten 1907, S. 101—109.

⁴⁾ Man beachte, daß die Matrix A der beschränkten Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{x}_i$$

zwar nicht-negativ definit, aber nicht auch positiv definit ist, da doch A keine beschränkte Reziproke hat, also nicht nicht-singulär ist.

bezeichnet, die Matrix AA^* (und ebenso auch A^*A) jedenfalls nicht-negativ definit ist, da die zu AA^* gehörige Kopplungsform in der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} x_i \right|^2 \geq 0$$

geschrieben werden kann. Ferner hat AA^* die beschränkte Reziproke $A^{-1*}A^{-1}$, wenn A nicht-singulär ist. Demnach muß AA^* (und ebenso auch A^*A) bei jeder beschränkten nicht-singulären Matrix A eine beschränkte positiv definite Matrix sein. Nun gibt es aber nach dem erwähnten Toeplitzschen Äquivalenzsatz³⁾ zu jeder beschränkten positiv definiten Matrix P eine beschränkte nicht-singuläre Matrix T derart, daß $TP T^* = E$ ($=$ Einheitsmatrix), d. h. $P^{-1} = T^* T$ gilt, so daß also P^{-1} gewiß positiv definit ist.

Von den aus den Faltungs- bzw. Formalsätzen folgenden Rechenregeln

(1) $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$; $A^*B^* = (BA)^*$; $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$; $A^{**} = A$ werden wir oft Gebrauch machen. Aus der zweiten dieser Regeln folgt, daß zugleich mit A auch TAT^* eine hermitesche Matrix ist, wie auch die beschränkte Matrix T sein mag. Hingegen ist TAT^{-1} im allgemeinen nicht hermitesch, auch wenn A hermitesch und T nicht-singulär ist.

Wir gehen nun aus von dem folgenden Satz⁵⁾, der, obwohl er elementar klingt, meines Wissens zur Zeit nur unter Heranziehung der spektralen Integraldarstellung beschränkter hermitescher Matrizen bewiesen ist:

Satz I. *Zu jeder beschränkten nicht-negativ definiten Matrix M gibt es eine und nur eine beschränkte nicht-negativ definite Matrix N derart, daß $M = N^2$ gilt.*

Hierbei enthält das Spektrum von M diejenigen und nur diejenigen Zahlen, die Quadrate der in dem Spektrum von N enthaltenen Zahlen sind⁵⁾. Insbesondere kommt also die Zahl Null entweder in beiden Spektren oder in keinem der beiden vor, d. h. entweder beide Matrizen M, N haben eine eindeutige beschränkte Reziproke oder keine der beiden. In Verbindung mit Satz I besagt dies folgendes:

Satz II. *Zu jeder beschränkten positiv definiten Matrix Q gibt es eine und nur eine beschränkte positiv definite Matrix P derart, daß $Q = P^2$ gilt.*

Herr Toeplitz hat mir freundlichst mitgeteilt, daß er diejenigen unter den im nachstehenden behandelten Konsequenzen von Satz II, die einerseits von Satz IV verschieden sind und andererseits nur die Existenz von P , nicht aber auch die eindeutige Bestimmtheit von P voraussetzen,

⁵⁾ Wegen Beweis vgl. A. Wintner, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 267.

schon vor Jahren erkannt, aber nicht veröffentlicht hat. Die Eindeutigkeit von P , die für uns wesentlich sein wird, ist zur Zeit nur mittels Spektraltheorie bewiesen. Hingegen kann die Existenz von mindestens einem P nach Herrn Toeplitz⁶⁾ durch eine konvergente Potenzreihe in Q sichergestellt werden, die den Hilbschen Reihen der Resolvententheorie analog ist. Da P durch eine Potenzreihe in Q geliefert wird, so folgt:

Satz III. *Ist P eine beschränkte positiv definite Matrix, so ist jede mit $Q = P^2$ vertauschbare beschränkte Matrix bereits mit P vertauschbar.*

In der Tat ist P hermitesch, also $Q = P^2 = PP = PP^*$, und dabei ist P positiv definit, also nicht-singulär. Folglich (vgl. S. 256) ist die Matrix $Q \doteq P^2$ gewiß positiv definit.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz IV. *Es gibt zu jeder beschränkten nicht-singulären Matrix A genau eine beschränkte positiv definite Matrix P und genau eine unitäre⁷⁾ Matrix U derart, daß $A = PU$ gilt.*

Da umgekehrt jede Matrix PU , als Produkt zweier beschränkter nicht-singulärer Matrizen, beschränkt und nicht-singulär ist, so liefert Satz IV eine Art eindeutige Parameterdarstellung der Mannigfaltigkeit aller beschränkten nicht-singulären Matrizen.

Um Satz IV zu beweisen, beachte man zunächst, daß die beschränkte Matrix A nach Voraussetzung nicht-singulär, also die Matrix AA^* nach S. 256 positiv definit ist. Nach Satz II gibt es also genau eine beschränkte positiv definite Matrix P derart, daß

$$(2) \quad AA^* = P^2$$

gilt. Da P positiv definit, also nicht-singulär ist, so können wir mittels der Definition

$$(3) \quad U = P^{-1}A$$

eine beschränkte Matrix U einführen. Die konjugiert-transponierte Matrix U^* dieser Matrix U ist mit Rücksicht auf (1) offenbar

$$(4) \quad U^* = A^*P^{-1},$$

da doch P^{-1} hermitesch, d. h. gleich P^{-1*} ist. Aus (3) und (4) folgt nun, wenn man die Definition (2) von P beachtet,

$$UU^* = P^{-1}AA^*P^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = E,$$

$$U^*U = A^*P^{-1}P^{-1}A = A^*(P^2)^{-1}A = A^*(AA^*)^{-1}A = E,$$

d. h. U^* ist eine sowohl vordere als auch hintere Reziproke von U . Nach den Toeplitzschen Formalsätzen³⁾ gilt also $U^* = U^{-1}$, d. h. die bei (3)

⁶⁾ Vgl. E. Hellinger u. O. Toeplitz, Enc. d. math. Wiss. S. 1567, Fußnote 522 a).

⁷⁾ Man beachte, daß jede unitäre Matrix beschränkt und nicht-singulär ist.

eingeführte Matrix U ist unitär. Schreibt man daher (3) in der Gestalt $A = PU$, so folgt die Existenz der in Satz IV behaupteten Zerlegung von A . — Um auch die zweite Hälfte von Satz IV, nämlich die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zu beweisen, nehme man an, daß

$$(5) \quad A = P_1 U_1 = P_2 U_2,$$

gilt, wobei beide P positiv definit und beide U unitär sind, so daß also wegen

$$(P_n U_n)^* = U_n^* P_n^* = U_n^{-1} P_n^* = U_n^{-1} P_n; \quad n = 1, 2$$

offenbar auch

$$(6) \quad A^* = U_1^{-1} P_1 = U_2^{-1} P_2$$

gilt. Setzt man (5) und (6) in (2) ein, so folgt $P_1^2 = P_2^2$, also mit Rücksicht auf die in Satz II ausgesprochene Eindeutigkeit einfach $P_1 = P_2$, so daß mit Rücksicht auf (5) auch $U_1 = U_2$ gelten muß (da doch $P_1 = P_2$ positiv definit ist, also eine beschränkte Reziproke besitzt). — Damit ist Satz IV bewiesen.

Da Satz II nur ein Spezialfall von Satz I ist, so könnte man zunächst glauben, daß Satz IV auf *nicht* nicht-singuläre Matrizen A übertragen werden kann, wenn man an Stelle von positiv definiten Matrizen P nicht-negativ definite Matrizen N heranzieht. In Wirklichkeit ist aber eine solche Übertragung in keiner Weise möglich. Denn zunächst ist die beschränkte Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

das Produkt der nicht-negativ definiten Matrix C und der unitären Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

wobei die reelle Zahl ϑ willkürlich gewählt werden kann. Hier gibt es also noch eine Zerlegung der erwähnten Art, sie ist aber nicht mehr eindeutig. Ein andersartiges Beispiel wird durch die beschränkte Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

geliefert, die überhaupt keine Produktzerlegung $B = NU$ zuläßt, wobei N beschränkt und nicht-negativ definit und U unitär ist. Sonst würde nämlich

$$BB^* = (NU)(NU)^* = NUU^*N^* = NN^* = N^2$$

sein, also, da BB^* , wie man leicht nachrechnet, die Einheitsmatrix ist, einfach $E = N^2$ gelten. Mit Rücksicht auf die in Satz I ausgesprochene Eindeutigkeit müßte also $N = E$ sein, also wegen $B = NU$ einfach $B = U$ gelten, was aber einen Widerspruch enthält, da B keine eindeutige beschränkte Reziproke hat³⁾, also erst recht keine unitäre Matrix U sein kann.

Die Faktoren P, U der durch Satz IV gelieferten Produktzerlegung der beschränkten nicht-singulären Matrix A sind im allgemeinen nicht vertauschbar. Genauer gilt der folgende

Satz V. Die Faktoren P, U der durch Satz IV gelieferten Produktzerlegung der beschränkten nicht-singulären Matrix A sind dann und nur dann vertauschbar:

$$(7) \quad UP = PU$$

wenn A normal ist:

$$(8) \quad AA^* = A^*A.$$

Zunächst gilt [vgl. (6)]

$$(9) \quad A = PU, \quad A^* = U^{-1}P.$$

Setzt man voraus, daß (8) gilt, so folgt wegen (9)

$$PUU^{-1}P = U^{-1}PPU$$

d. h.

$$P^2 = (U^{-1}PU)^2$$

oder (da U unitär, also zugleich mit P auch $U^{-1}PU$ positiv definit ist) mit Rücksicht auf die in Satz II ausgesprochene Eindeutigkeit einfach

$$P = U^{-1}PU,$$

was aber in der Gestalt (7) geschrieben werden kann. Setzt man umgekehrt voraus, daß (7) gilt, so sind die vier Matrizen P, U, P^{-1}, U^{-1} paarweise vertauschbar, mit Rücksicht auf (9) gilt also (8), womit auch die andere Hälfte von Satz V bewiesen ist.

Da P und U vertauschbar sind, wenn A normal ist, so muß dabei P (und ebenso auch U) auch mit $PU = A$ vertauschbar sein. Dann ist aber mit A auch P^{-1} vertauschbar. Nehmen wir insbesondere an, daß die beschränkte nicht-singuläre Matrix A hermitesch (also gewiß normal)

ist, so ist die unitäre Matrix $U = P^{-1}A$ das Produkt zweier vertauschbarer hermitescher Matrizen, also⁶⁾ eine hermitesche Matrix. Es gilt daher der folgende

Satz VI. *Jede beschränkte nicht-singuläre hermitesche Matrix H kann in der Gestalt $H = RK$ geschrieben werden, wobei K und R beide hermitesch und beschränkt sind, K außerdem unitär und R positiv definit ist (und zwar ist diese Produktdarstellung eindeutig und die Faktoren sind vertauschbar).*

Bevor wir weitergehen, sei noch die folgende Bemerkung besonders formuliert, da sie für das Nachstehende von besonderer Wichtigkeit ist:

Satz VII. *Zwei mit einer dritten äquivalente beschränkte Matrizen sind auch miteinander äquivalent.*

Sind mit anderen Worten A_1, A_2, A_3 drei beschränkte und T_1, T_2 zwei nicht-singuläre beschränkte Matrizen derart, daß $T_1 A_1 T_1^* = A_3$ und $T_2 A_2 T_2^* = A_3$ gilt, so gibt es eine beschränkte nicht-singuläre Matrix T_3 derart, daß $T_3 A_1 T_3^* = A_3$ wird. Eine solche Matrix T_3 ist nämlich $T_3 = T_2^{-1} T_1$, wie man auf Grund (1) leicht nachrechnet. Dabei ist freilich unter anderem der assoziative Charakter der Matrixmultiplikation (Faltungssatz) wesentlich zu verwerten, der für nicht beschränkte Matrizen im allgemeinen ungültig ist. Man kann sogar Beispiele angeben, die zeigen, daß Satz VII, der dem Nachstehenden zugrunde liegt, nicht mehr richtig ist, wenn man nicht beschränkte Matrizen T zuläßt (obwohl dabei die T formal eindeutige Reziproken haben können)⁹⁾.

Wir wollen eine Matrix, die eine Diagonalmatrix ist und in ihrer Diagonale keine von 1 und -1 verschiedene Zahl enthält, eine *polare* Matrix nennen und mit F bezeichnen. Demnach ist eine polare Matrix eine reelle beschränkte Diagonalmatrix, die gleichzeitig hermitesch und unitär ist:

$$(10) \quad F = F^* = F^{-1}.$$

Es gibt kontinuierlich unendlich viele polare Matrizen. Kommt in der Diagonale von F die Zahl 1 genau n -mal und die Zahl -1 genau m -mal vor, so nennen wir (n, m) die *Signatur* von F . Dabei ist also

$$0 \leq n \leq +\infty, \quad 0 \leq m \leq +\infty; \quad n + m = +\infty,$$

wobei $n = m = +\infty$ nicht ausgeschlossen ist. Die Signatur der polaren Matrix E ist $(+\infty, 0)$, diejenige der negativen Einheitsmatrix $-E$ ent-

⁸⁾ Aus $H_1^* = H_1, H_2^* = H_2$ und $H_1 H_2 = H_2 H_1$ folgt nämlich wegen (1) offenbar $(H_1 H_2)^* = H_1 H_2$.

⁹⁾ Vgl. hierzu E. Hellinger u. O. Toeplitz, Math. Annalen 69 (1910), S. 313ff. und S. 327ff.

sprechend $(0, +\infty)$. Alle übrigen polaren Matrizen sind indefinit. Sie sind durchweg nicht-singulär, da sie reziprok zu sich selbst sind.

Wir beweisen nun den folgenden Trägheitssatz:

Satz VIII. *Polare Matrizen haben dann und nur dann eine gemeinsame Signatur, wenn sie äquivalent sind.*

Wir beweisen zunächst die erste Hälfte der Behauptung. — Nach Voraussetzung gibt es zu den beiden polaren Matrizen F_1, F_2 eine nicht-singuläre beschränkte Matrix A derart, daß $F_2 = AF_1A^*$ gilt. Setzt man hierin die durch Satz IV gelieferte Zerlegung PU von A ein, so folgt nach (1)

$$(11) \quad F_2 = PUF_1U^{-1}P,$$

da $U^* = U^{-1}$, $P^* = P$ gilt. Schreibt man (11) in der Gestalt

$$(12) \quad P^{-1}F_2P^{-1} = UF_1U^{-1},$$

so steht rechterhand mit Rücksicht auf (10) das Produkt dreier unitärer Matrizen, also eine unitäre Matrix. Demnach ist auch die linke Seite von (12) eine unitäre Matrix, d. h. es gilt

$$(P^{-1}F_2P^{-1})^* = (P^{-1}F_2P^{-1})^{-1},$$

was unter Beachtung von (1) und (10) in der Gestalt

$$(13) \quad (F_2PF_2^{-1})^3 = (P^{-1})^2$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist P , also nach S. 256 auch P^{-1} positiv definit, und F_2 ist nach (10) unitär; mithin ist $F_2PF_2^{-1}$ ebenfalls positiv definit. Mit Rücksicht auf die in Satz II ausgesprochene Eindeutigkeit folgt daher aus (13), daß $F_2PF_2^{-1} = P^{-1}$ gilt, was mit Rücksicht auf (10) auch in der Gestalt

$$(14) \quad P^{-1}F_2P^{-1} = F_2$$

geschrieben werden kann. Aus (12) und (14) folgt nun $F_2 = UF_1U^{-1}$, so daß also F_1 und F_2 unitär äquivalent sein müssen. Da sie außerdem hermitesche Diagonalmatrizen sind, so müssen sie nach der unitären Invariantentheorie beschränkter hermitescher Formen nicht nur dieselben Diagonalelemente (nämlich ± 1) haben, sondern auch deren Vielfachheiten müssen übereinstimmen. Dies besagt aber, daß F_1 und F_2 dieselbe Signatur haben. — Haben sie umgekehrt dieselbe Signatur, so stimmen die Vielfachheiten überein, folglich sind dann F_1 und F_2 unitär äquivalent, also erst recht äquivalent. Damit ist Satz VIII bewiesen.

Wir beweisen nun

Satz IX. *Jede beschränkte nicht-singuläre hermitesche Matrix H ist äquivalent mit einer polaren Matrix F .*

Zunächst stellen wir H vermöge Satz VI in der Gestalt

$$(15) \quad H = RK = KR$$

dar. Hierbei ist R positiv definit, so daß es nach Satz II eine positiv definite Matrix P gibt derart, daß

$$(16) \quad R = P^2$$

gilt, und zwar ist diese Matrix P wegen (15) und mit Rücksicht auf Satz III eine mit K vertauschbare Matrix. Demnach können wir (15) unter Beachtung von (16) in der Gestalt

$$(17) \quad H = PKP$$

schreiben. Hierbei ist K nach Satz VI eine beschränkte hermitesche Matrix, die gleichzeitig auch unitär ist. Nun liegt aber das Spektrum einer beschränkten hermiteschen Matrix am Rande des Einheitskreises¹⁰⁾. Da das Spektrum von K diesen beiden Bedingungen zu genügen hat, so ist K eine beschränkte hermitesche Matrix, deren Spektrum keinen von ± 1 verschiedenen Punkt, also insbesondere kein Streckenspektrum enthält. Es gibt daher eine unitäre Matrix U derart, daß UKU^{-1} eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonale lauter in dem Spektrum von K liegende Zahlen, also diesmal keine von ± 1 verschiedene Zahl enthält. Eine solche Diagonalmatrix ist aber nach Definition eine polare Matrix F :

$$UKU^{-1} = F.$$

Schreibt man dies unter Beachtung von $U^{-1} = U^*$ in der Gestalt $K = U^*FU$, und führt man diese Darstellung von K in die Beziehung (17) ein, so folgt

$$H = PU^*FUP,$$

oder wegen $P = P^*$ und mit Rücksicht auf (1) einfach

$$H = TFT^*; \quad T = PU^*,$$

womit Satz IX bewiesen ist.

Ist dabei H nicht definit, liegt mit anderen Worten nicht der eingangs erwähnte³⁾ Toeplitzsche Fall ($F = \pm E$) vor, so ist freilich H mit Rücksicht auf Satz VIII mit unendlich vielen verschiedenen polaren Matrizen äquivalent. Diese haben aber die gleiche Signatur:

Hauptsatz. Jeder beschränkten nicht-singulären hermiteschen Matrix H kommt im Sinne der Äquivalenz (vgl. Satz IX) genau eine Signatur zu, und zwei solche Matrizen, H_1 und H_2 , sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe Signatur haben.

¹⁰⁾ Vgl. a. a. O.⁵⁾ S. 255.

Ist nämlich H sowohl mit F_I als auch mit F_{II} äquivalent, so sind F_I und F_{II} mit Rücksicht auf Satz VII auch untereinander äquivalent, sie haben also nach Satz VIII dieselbe Signatur. Ist ferner H_I mit F_I und H_2 mit F_2 äquivalent, und haben F_I und F_2 eine gemeinsame Signatur, so sind F_I und F_2 mit Rücksicht auf Satz VIII äquivalente Matrizen, so daß also nach Satz VII auch H_I und H_2 äquivalent sein müssen. Haben hingegen F_I und F_2 verschiedene Signaturen, so sind sie nach Satz VIII keine äquivalenten Matrizen, mit Rücksicht auf Satz VII müssen also auch H_I und H_2 inäquivalent sein, da doch mit sich selbst jede Matrix äquivalent ist: $ET E^* = T$.

(Eingegangen am 15. Juli 1932.)

Über die Konvergenz von Quadraturverfahren.

Von

G. Pólya in Zürich.

1. Die Untersuchung der Konvergenzverhältnisse der klassischen Verfahren zur numerischen Berechnung bestimmter Integrale hat Stieltjes begonnen. Er bewies, daß die Näherungswerte, die das Gaußsche Verfahren der genäherten Quadratur liefert, gegen den wahren Wert des Integrals konvergieren, wenn es sich um ein im Riemannschen Sinne eigentliches Integral handelt¹⁾. Er warf ferner die Frage auf, ob das Newton-Cotessche Verfahren auch dasselbe leistet²⁾.

In Verfolgung der Stieltjesschen Fragestellung schien mir zweckmäßig, den Begriff des „Quadraturverfahrens“ etwas zu erweitern. Ich will diesen Begriff folgendermaßen umgrenzen: Ein Quadraturverfahren ist bestimmt durch die Angabe von zwei reellen Zahlen a und b und von zwei reellen „dreieckigen“ Zahlenfolgen

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} \\ x_{21}, x_{22} \\ x_{31}, x_{32}, x_{33} \\ \dots \dots \dots \\ x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{nn} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22} \\ \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \dots, \lambda_{nn} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

die der Bedingung

$$(3) \quad a \leq x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \dots < x_{nn} \leq b \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

zu genügen haben und keiner weiteren Bedingung. Das Quadratur-

¹⁾ T. I. Stieltjes, Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3. Folge, 1 (1884), S. 409—426 oder Oeuvres, Bd. 1, S. 377—394.

²⁾ Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Bd. 1, S. 102.

verfahren ordnet jeder in dem abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ definierten, im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbaren Funktion $f(x)$ eine unendliche Zahlenfolge

$$(4) \quad Q_1[f], Q_2[f], \dots, Q_n[f], \dots$$

zu, mittels der Vorschrift

$$(5) \quad Q_n[f] = \lambda_{n1} f(x_{n1}) + \lambda_{n2} f(x_{n2}) + \dots + \lambda_{nn} f(x_{nn}).$$

Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ nenne ich das *Grundintervall*, die Zahlen x_{nj} die *Stellen*, die Zahlen λ_{nj} die *Gewichte* des Quadraturverfahrens; das Gewicht λ_{nj} ist der Stelle x_{nj} zugeordnet. Ich sage, daß das Quadraturverfahren für die Funktion $f(x)$ *konvergiert*, wenn

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f] = \int_a^b f(x) dx.$$

Die geläufigsten Spezialfälle, die innerhalb dieser allgemeinen Begriffsbestimmung Platz finden, sind die folgenden:

a) $Q_n[f]$ ist eine Riemannsche Rechteckssumme, d. h. die λ_{nj} sind Längen von Teilintervallen von $[a, b]$ und x_{nj} ist eine Stelle im Teilintervall von der Länge λ_{nj} . In Formeln und vollständiger:

$$\lambda_{nj} > 0, \lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \dots + \lambda_{nn} = b - a,$$

$$a + \lambda_{n1} + \dots + \lambda_{n,j-1} \leq x_{nj} \leq a + \lambda_{n1} + \dots + \lambda_{n,j-1} + \lambda_{nj}.$$

Das Verfahren konvergiert dann und nur dann (d. h. die Gleichung (6) gilt dann und nur dann) für jede im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare Funktion $f(x)$, wenn das Maximum der n Zahlen $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn}$ mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt.

b) $Q_n[f]$ ist eine *interpolatorische* Quadraturformel, d. h. $Q_n[f]$ ist das Integral desjenigen wohlbestimmten Polynoms vom Höchstgrade $n-1$, das die Funktion $f(x)$ an den n Stellen $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$ interpoliert. In diesem Fall sind die n Gewichte $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn}$ durch die n (frei wählbaren) Stellen $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$ mitbestimmt. Das Verfahren konvergiert sicher für alle Polynome $f(x)$; es ist ja in (6) der Ausdruck links unter dem Limeszeichen der rechten Seite genau gleich, von dem Augenblicke an, in welchem n den Grad von $f(x)$ übersteigt³⁾.

c) Es ist

$$\lambda_{n1} = \lambda_{n2} = \dots = \lambda_{nn} = \frac{b-a}{n}.$$

Wenn in diesem Falle das Verfahren für alle im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbaren Funktionen konvergiert, so heißen x_{nj} „für großes n

³⁾ Vgl. die nachfolgende Arbeit von L. Fejér, ferner die neuerschienene schöne Monographie von G. Kowalewski, *Interpolation und genäherte Quadratur* (Leipzig und Berlin, 1932).

gleichverteilt“. Nach einer Überlegung von Herrn H. Weyl⁴⁾ kann die Konvergenz des Verfahrens für die Klasse aller in Riemannschem Sinne integrierbaren Funktionen mit Sicherheit behauptet werden, sobald diese Konvergenz für eine kleine Unterklasse dieser Funktionenklasse, nämlich für alle Polynome feststeht.

Es erhebt sich nun die allgemeine Frage: Welchen Bedingungen müssen die das Quadraturverfahren definierenden Stellen x_{nj} und Gewichte λ_{nj} genügen, damit das Verfahren für alle Funktionen gewisser wichtiger Funktionenklassen (für alle Polynome, oder für alle stetigen oder für alle im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbaren Funktionen) konvergiere?

Für die Klasse der im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen erledigt sich diese Frage in trivialer Weise: Kein Quadraturverfahren kann für alle Funktionen dieser Klasse konvergieren. Es können ja die Werte einer solchen Funktion an allen für das Verfahren charakteristischen Stellen x_{nj} , die eine abzählbare Menge bilden, abgeändert werden, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Unbeschränkte Funktionen bringen nebensächliche Komplikationen in unsere Frage; daher soll im folgenden (falls nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt wird) unter einer *integrierbaren* Funktion schlechthin eine im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare Funktion verstanden werden.

Insbesondere sollen uns im folgenden die „Zusatzbedingungen“ beschäftigen, auf welche es bei dem Übergang von einer Funktionenklasse zu einer umfassenderen ankommt. Es sollen speziell die folgenden Fragen beantwortet werden: Wenn ein Quadraturverfahren für alle Polynome konvergiert, welche Zusatzbedingung muß hinzutreten, damit es auch für alle stetigen Funktionen konvergiere? Wenn es für alle stetigen Funktionen konvergiert, welche Zusatzbedingung garantiert die Konvergenz auch für alle integrierbaren Funktionen?

2. Es soll jetzt die Antwort auf die aufgeworfenen Fragen formuliert werden.

Bei den Polynomen wollen wir uns nicht lange aufhalten. Es handelt sich bei einem Quadraturverfahren um eine Folge linearer Operatoren; d. h. wenn $f(x)$ und $g(x)$ beliebige Funktionen sind und c eine Konstante ist, so besteht

$$(7) \quad Q_n[f + g] = Q_n[f] + Q_n[g], \quad Q_n[cf] = cQ_n[f].$$

Daher wird das Verfahren für alle Polynome konvergieren, wenn es für die speziellen Polynome $1, x, x^2, \dots$ konvergiert; es lassen sich ja alle Polynome aus diesen speziellen linear zusammensetzen. Notwendig und

⁴⁾ H. Weyl. Math. Ann. 77 (1916), S. 313—352.

hinreichend für die Konvergenz des Quadraturverfahrens für die Klasse aller Polynome ist also das Bestehen der Bedingung

$$(P) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_{n1} x_{n1}^k + \lambda_{n2} x_{n2}^k + \dots + \lambda_{nn} x_{nn}^k] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Auf eine weitere Diskussion dieser unmittelbar erhaltenen Bedingung (P) soll hier nicht eingegangen werden.

Über die Klasse der stetigen Funktionen gibt der folgende Satz Auskunft:

I. *Ein Quadraturverfahren soll für alle Polynome konvergieren. Damit es auch für alle im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen konvergiere, ist notwendig und hinreichend die Existenz einer Konstanten L , so beschaffen, daß*

$$(S) \quad |\lambda_{n1}| + |\lambda_{n2}| + \dots + |\lambda_{nn}| < L \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Nicht so naheliegend und weniger einfach zu formulieren ist die Zusatzbedingung, die im Übergang von den stetigen zu den integrierbaren Funktionen auftritt. Ich muß einige Definitionen vorausschicken.

Unter einem *Intervallverein* verstehe ich die Vereinigungsmenge von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen. (Ob dabei nur punktfremde oder auch nichtpunktfremde Intervalle vereinigt werden, kommt auf dasselbe hinaus.) Ein einziger Punkt soll dabei auch als ein abgeschlossenes Intervall, also auch als ein Intervallverein betrachtet werden. Wir befassen uns nur mit Intervallvereinen, die im Grundintervall $[a, b]$ enthalten sind.

Ist $\mathfrak{I}$ ein Intervallverein, so sei die Summe

$$\sum_{\mathfrak{I}} \varphi(x_{nj}, \lambda_{nj})$$

bei festem n über alle diejenigen Indices j erstreckt, für welche x_{nj} in $\mathfrak{I}$ liegt. (Das Resultat der Summation hängt also von n ab.) Mit dieser Definition gilt offenbar für irgend zwei Intervallvereine $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}^*$ (ob sie punktfremd sind oder nicht)

$$(8) \quad \sum_{\mathfrak{I}} |\lambda_{nj}| \leq \sum_{\mathfrak{I} + \mathfrak{I}^*} |\lambda_{nj}| \leq \sum_{\mathfrak{I}} |\lambda_{nj}| + \sum_{\mathfrak{I}^*} |\lambda_{nj}|.$$

Wenn (S) erfüllt ist, so besitzt

$$(9) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathfrak{I}} |\lambda_{nj}| = A(\mathfrak{I})$$

einen endlichen Wert für jeden Intervallverein $\mathfrak{I}$. Man könnte $A(\mathfrak{I})$ eine *Intervallvereinfunktion* nennen. Ich will einige Eigenschaften von $A(\mathfrak{I})$, die ohne weiteres aus (8) und (9) folgen, aufzählen und benennen.

$$A(\mathfrak{I}) \geq 0, \quad \text{d. h. } A(\mathfrak{I}) \text{ ist nicht negativ;}$$

$$A(\mathfrak{I}) \leq A(\mathfrak{I} + \mathfrak{I}^*), \quad \text{d. h. } A(\mathfrak{I}) \text{ ist monoton;}$$

$$A(\mathfrak{I} + \mathfrak{I}^*) \leq A(\mathfrak{I}) + A(\mathfrak{I}^*), \quad \text{d. h. } A(\mathfrak{I}) \text{ ist subadditiv.}$$

Ich will eine weitere Eigenschaft definieren, die $\Lambda(\mathfrak{I})$ zukommen kann (aber nicht zukommen muß). Man betrachte eine absteigende Folge von Intervallvereinen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n, \dots$, wo die Gesamtlänge $m(\mathfrak{I}_n)$ mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt; in Zeichen

$$(10) \quad \mathfrak{I}_1 \supset \mathfrak{I}_2 \supset \mathfrak{I}_3 \supset \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m(\mathfrak{I}_n) = 0.$$

Wenn

$$(R) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda(\mathfrak{I}_n) = 0 \text{ für jede Folge (10),}$$

dann soll die Intervallvereinfunktion $\Lambda(\mathfrak{I})$ *halbstetig* genannt werden⁵⁾. Im Besitze dieses Begriffes kann man den folgenden Satz aussprechen:

II. *Ein Quadraturverfahren soll für alle stetigen Funktionen konvergieren. Damit es auch für alle im Riemannschen Sinne eigentlich integrable Funktionen konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß die durch (9) definierte Intervallvereinfunktion $\Lambda(\mathfrak{I})$ halbstetig sei, d. h. der Bedingung (R) genüge.*

Zusammenfassend können wir sagen: Für die Konvergenz des Quadraturverfahrens sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

bei Polynomen (P);

bei stetigen Funktionen (P) und (S);

bei integralen Funktionen (P), (S) und (R).

Bemerkenswert scheint mir zu sein, daß bei beiden hier betrachteten Übergängen, sowohl von den Polynomen zu den stetigen, wie von den stetigen zu den integralen Funktionen, solche Zusatzbedingungen, (S) bzw. (R), auftreten, in welchen nur die Gewichte λ_{nj} , nicht aber die Stellen x_{nj} explizite vorkommen. In dem Übergang von den Polynomen zu den analytischen Funktionen scheint dies anders zu liegen. Es ist mir jedoch nicht gelungen, in diesem Falle zu einer einfachen notwendigen und hinreichenden Bedingung vorzudringen. Inbezug auf analytische Funktionen beschränke ich mich daher in der Hauptsache auf die Diskussion des Konvergenzverhaltens des klassischen Newton-Cotesschen, mit Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten arbeitenden Quadraturverfahrens; ich weise eine analytische Funktion auf, für welche das Verfahren divergiert.

Den Schluß der Arbeit bilden Bemerkungen und Beispiele, die zum Teil das Bewiesene erläutern, zum Teil Andeutungen über verschiedene anschließende,

⁵⁾ Ein ausführlicher Name wäre „von oben halbstetig“. Das Charakterische dieser Stetigkeitsdefinition ist zunächst, daß $\Lambda(\mathfrak{I})$ nicht additiv, nur subadditiv ist, ferner, daß $\mathfrak{I}_{n+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{I}_n$ sein muß. Vgl. die Definitionen von „stetig“ und „totalstetig“ (= absolument continue) bei de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, etc. (Paris, 1916), S. 57.

offengelassene Fragen enthalten. Hier werden auch besprochen die Berührungspunkte mit der nachfolgenden Abhandlung von Professor Fejér und mit seinen umfassenden neueren Untersuchungen über Interpolation.

3. Ist man schon in den Besitz der richtigen Formulierung der Sätze I und II gelangt, so kann man die Beweise ohne besondere Schwierigkeit erbringen; man braucht nur wohlbekannte Verfahren dem vorliegenden Gegenstand anzupassen.

Zum Beweis der Hinlänglichkeit der aufgestellten Bedingungen benutze ich das „Approximationsverfahren“. Eine (Riemannsche) integrierbare Funktion $R(x)$ wird durch eine stetige $S(x)$, und diese durch ein Polynom $P(x)$ approximiert, unter Verwendung der Linearität der Funktionaloperation Q_n . Vgl. die Nr. 4, 6 und Nr. 12 unter h).

Zum Beweis der Notwendigkeit wird ein von Herrn Lebesgue ausgebildetes, seitdem vielfach benutztes Verfahren gebraucht, wofür ich den Namen „Resonanzverfahren“ vorschlagen möchte. Zu jeder Operation Q_n der betrachteten Folge sucht man eine Funktion $g_n(x)$ der betrachteten Klasse, so daß $g_n(x)$ auf Q_n „möglichst stark reagiert“, $g_n(x)$ mit Q_n „in Resonanz steht.“ Unter Voraussetzung der Nichterfüllung der ausgesagten Bedingungen muß ein Gegenbeispiel gebildet werden. Man bildet es in Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder gewisse $g_n(x)$ sind, nämlich solche, die mit „besonders schlimmen“ Q_n in Resonanz stehen⁶⁾. Vgl. die Nr. 5, 7, 11.

Stetige Funktionen.

4. Es sei vorausgesetzt, daß das betrachtete Quadraturverfahren für alle Polynome konvergiert, und daß die Bedingung (S) erfüllt ist; wir haben einzusehen, daß es dann auch für eine beliebige stetige Funktion $S(x)$ konvergiert.

Man bestimme, dem Weierstrassschen Approximationssatze gemäß, zu einem vorgegebenen positiven ε ein Polynom $P(x)$ so, daß die Ungleichung

$$(11) \quad |S(x) - P(x)| < \varepsilon$$

⁶⁾ H. Lebesgue, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, (3) 1 (1919), S. 25—117. Eine allgemeine abstrakte Fassung hat H. Hahn diesen Überlegungen gegeben, vgl. Monatshefte für Mathematik und Physik, 32 (1922), S. 3—88. Die nachfolgenden Beweise könnten natürlich auch in das allgemeine Hahnsche Schema hineingepaßt werden, mir schien aber eine unabhängige Darstellung vorteilhafter zu sein. Sachlich berührt sich mein Satz I sehr nahe mit den Hahnschen Sätzen XXVIIa und XXVIIc.

gilt. Es ist

$$(12) \quad \left| \int_a^b S(x) dx - Q_n[S] \right| \\ \leq \int_a^b |S(x) - P(x)| dx + \left| \int_a^b P(x) dx - Q_n[P] \right| + \sum_{j=1}^n |P(x_{nj}) - S(x_{nj})| |\lambda_{nj}| \\ \leq \varepsilon (b-a) + \varepsilon + \varepsilon L;$$

das erste Glied wurde auf Grund von (11), das letzte auf Grund von (11) und (S) abgeschätzt, und diese Abschätzungen sind unabhängig von n ; die Abschätzung des mittleren Gliedes gilt für genügend großes n , auf Grund der Voraussetzung, daß das Quadraturverfahren für alle Polynome konvergiert.

(12) zeigt die eine Hälfte des Satzes I, nämlich, daß die Bedingung (S) hinreichend ist.

5. Es ist jetzt vorausgesetzt, daß die Bedingung (S) nicht erfüllt ist. Wir haben eine spezielle stetige Funktion $s(x)$ zu konstruieren, für welche das Quadraturverfahren divergiert.

Mit Einführung der Abkürzung

$$(13) \quad |\lambda_{n1}| + |\lambda_{n2}| + \dots + |\lambda_{nn}| = A_n$$

können wir die jetzt gültige Voraussetzung in der Form

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$$

aussprechen.

Wir konstruieren zunächst eine stetige Funktion $g_k(x)$, welche mit der Operation Q_k „in Resonanz steht“, d. h. welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

$$(15) \quad |g_k(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b,$$

$$(16) \quad Q_k[g_k] = A_k.$$

Die Funktion $g_k(x)$ zeigt ein extremes Verhalten insofern, daß, wenn die Ungleichung (15) erfüllt ist, $Q_k[g_k]$ keinen dem Betrage nach größeren Wert erhalten kann, als den durch (16) angegebenen, gemäß den Definitionen (5), (13).

Man konstruiert $g_k(x)$, indem man

$$g_k(x_{kj}) = \operatorname{sgn} \lambda_{kj}$$

setzt für $j = 1, 2, \dots, k$ ($\operatorname{sgn} x = 1$ oder 0 oder -1 je nachdem $x > 0$ oder $x = 0$, oder $x < 0$). Man ergänzt die Konstruktion, indem man $g_k(x)$ in den $k-1$ abgeschlossenen Teilintervallen $[x_{kj}, x_{k,j+1}]$ (etwa) als linear, in $[a, x_{k1}]$ und in $[x_{kk}, b]$ als konstant annimmt.

Wir denken uns die Konstruktion von $g_k(x)$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ durchgeführt und unterscheiden zwei Fälle:

a) Es gibt ein k , so daß

$$(17) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_n[g_k]|$$

unendlich ist. In diesem Falle haben wir ja schon eine stetige Funktion $s(x)$ von der gewünschten Eigenschaft, nämlich indem wir $s(x) = g_k(x)$ setzen.

b) Es ist (17) endlich für $k = 1, 2, 3, \dots$

In diesem Falle bestimmen wir eine unendliche Teilfolge

$$g_{k_1}(x), g_{k_2}(x), \dots, g_{k_n}(x), \dots$$

durch vollständige Induktion, wie folgt.

Es sei $g_{k_1}(x) = g_1(x)$. Wenn $g_{k_{m-1}}(x)$ schon gewählt ist, bezeichne man die obere Schranke der Beträge der Zahlen

$$Q_n \left[\frac{g_{k_1}}{3} + \frac{g_{k_2}}{3^2} + \dots + \frac{g_{k_{m-1}}}{3^{m-1}} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

mit M_{m-1} . Da wir uns jetzt im Falle b) befinden, ist M_{m-1} eine *endliche* nichtnegative Zahl. Man wähle jetzt $g_{k_m}(x)$ so, daß erstens

$$k_m > k_{m-1},$$

und daß zweitens

$$(18) \quad A_{k_m} > 3^m 2 (M_{m-1} + m);$$

diese Wahl ist möglich, auf Grund der Voraussetzung (14).

Es sei jetzt

$$\frac{g_{k_1}(x)}{3} + \frac{g_{k_2}(x)}{3^2} + \dots + \frac{g_{k_m}(x)}{3^m} + \dots = s(x)$$

gesetzt. Die Funktion $s(x)$ ist stetig, als Summe einer, wegen (15) gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen. Es ist

$$Q_{k_m}[s] = \frac{1}{3^m} Q_{k_m}[g_{k_m}] + Q_{k_m} \left[\frac{g_{k_1}}{3} + \dots + \frac{g_{k_{m-1}}}{3^{m-1}} \right] + Q_{k_m} \left[\frac{g_{k_{m+1}}}{3^{m+1}} + \dots \right];$$

wir haben dasjenige Glied in der Reihe für $s(x)$ vorangestellt, das mit Q_{k_m} in Resonanz steht. Den Wert dieses Gliedes können wir, auf Grund von (16), genau angeben, den der beiden anderen nach oben abschätzen; wir erhalten

$$\begin{aligned} Q_{k_m}[s] &\geq \frac{1}{3^m} A_{k_m} - M_{m-1} - A_{k_m} \left(\frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+2}} + \dots \right) \\ &= \frac{A_{k_m}}{3^m \cdot 2} - M_{m-1} > m \end{aligned}$$

gemäß (18).

Wir lassen m ins Unendliche streben und sehen, daß das Quadraturverfahren für die spezielle stetige Funktion $s(x)$ divergiert. Dies beweist die noch ausstehende Hälfte des Satzes I: Die Bedingung (S) ist notwendig.

Integriable Funktionen.

6. Es sei vorausgesetzt, daß das betrachtete Quadraturverfahren für alle stetigen Funktionen konvergiert, und daß $\Lambda(\mathfrak{Z})$ halbstetig ist, in dem in Nr. 2 auseinandergesetzten Sinne. Wir haben einzusehen, daß unter diesen Bedingungen das Quadraturverfahren auch für eine beliebige integriable Funktion $R(x)$ konvergiert.

Die Voraussetzung der Konvergenz für alle stetige Funktionen zieht, nach dem eben bewiesenen Satz I, das Bestehen der Bedingung (S) nach sich. Die weitergehende Voraussetzung, daß $\Lambda(\mathfrak{Z})$ halbstetig ist, wird benutzt in der nun folgenden Konstruktion einer an $R(x)$ sich anschmiegenden stetigen Funktion $S(x)$.

Wir betrachten eine Folge von Einteilungen $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ des Grundintervalles $[a, b]$. Jede dieser Einteilungen teilt $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle. Es soll E_{n+1} dadurch aus E_n hervorgehen, daß gewisse Teilintervalle von E_n unterteilt werden; anders gesagt, es kommen sämtliche Teilpunkte von E_n auch in E_{n+1} vor. Es sei ε vorgegeben, $\varepsilon > 0$. Diejenigen Teilintervalle von E_n , in welchen die Schwankung von $R(x)$ nicht unterhalb ε bleibt, bilden, abgeschlossen gedacht, einen Intervallverein $\mathfrak{Z}_n$ (vgl. Nr. 2). Offenbar ist $\mathfrak{Z}_{n+1}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{Z}_n$. Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium kann man die Einteilungen $E_1, E_2, E_3, \dots$ so wählen, daß $m(\mathfrak{Z}_n)$, die Gesamtlänge von $\mathfrak{Z}_n$ mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt, so daß die Folge $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \dots$ beiden Bedingungen (10) genügt. Es findet, nach Voraussetzung, (R) statt. Man kann also einen bestimmten Index n' so wählen, daß

$$(19) \quad m(\mathfrak{Z}_{n'}) < \varepsilon, \quad \Lambda(\mathfrak{Z}_{n'}) < \varepsilon.$$

Die Einteilung $E_{n'}$ hat eine endliche Anzahl von solchen Teilpunkten, welche zwei benachbarte Intervalle scheiden, in denen beiden die Schwankung von $R(x)$ unterhalb ε bleibt. Man konstruiere um jeden dieser Teilpunkte als Mittelpunkt ein Intervall von der Länge $\frac{1}{m}$; diese Intervalle bilden, abgeschlossen gedacht, einen Intervallverein $\mathfrak{Z}_m^*$. Offenbar ist $\mathfrak{Z}_m^* \supset \mathfrak{Z}_{m+1}^*$. Nach Voraussetzung strebt $\Lambda(\mathfrak{Z}_m^*)$ mit der Gesamtlänge von $\mathfrak{Z}_m^*$, also mit $\frac{1}{m}$ gegen 0. Man wähle ein bestimmtes m' so, daß

$$(20) \quad m(\mathfrak{Z}_{m'}^*) < \varepsilon, \quad \Lambda(\mathfrak{Z}_{m'}^*) < \varepsilon.$$

Setzt man zum Schluß $\mathfrak{Z}_{n'} + \mathfrak{Z}_{m'}^* = \mathfrak{Z}$, so folgt aus (19), (20), da $\Lambda(\mathfrak{Z})$ subadditiv ist,

$$(21) \quad m(\mathfrak{Z}) < 2\varepsilon,$$

$$(22) \quad \Lambda(\mathfrak{Z}) < 2\varepsilon,$$

und die Menge $[a, b] - \mathfrak{Z}$ besteht aus einer endlichen Anzahl von Intervallen, in deren jedem die Schwankung von $R(x)$ unterhalb ε bleibt. Zwei

sukzessive Intervalle von $\mathfrak{I}$ werden durch ein einzelnes, offenes Intervall von $[a, b] - \mathfrak{I}$ getrennt.

Man definiere jetzt eine stetige Funktion $S(x)$ folgendermaßen: In jedem einzelnen Intervall von $[a, b] - \mathfrak{I}$ ist $S(x)$ konstant, und zwar stimmt es (etwa) im Mittelpunkt des Intervalles mit $R(x)$ überein. Wegen der Stetigkeit ist $S(x)$ auch in den Endpunkten der Intervalle von $[a, b] - \mathfrak{I}$ definiert; ein solcher Endpunkt gehört, wenn er nicht gerade in a oder in b fällt, $\mathfrak{I}$ an. In den Endpunkten jedes einzelnen Intervalls von $\mathfrak{I}$, das zwischen zwei Intervallen von $[a, b] - \mathfrak{I}$ eingeschlossen ist, haben wir $S(x)$ schon definiert; es sei nun $S(x)$ in jedem solchen einzelnen Intervall von $\mathfrak{I}$ linear. Gibt es weitere (an a oder b anstoßende) Intervalle von $\mathfrak{I}$, so sei darin $S(x)$ konstant. Der Graph von $S(x)$ ist also aus Geradenstücken zusammengesetzt.

Wesentlich an dieser Konstruktion ist, daß

$$(23) \quad |S(x) - R(x)| < \varepsilon \quad \text{wenn } x \in [a, b] - \mathfrak{I}.$$

Wenn übrigens

$$(24) \quad |R(x)| \leq M \quad \text{für } a \leq x \leq b,$$

so ist auch

$$(25) \quad |S(x)| \leq M \quad \text{für } a \leq x \leq b.$$

Jetzt sind wir vorbereitet zur Abschätzung der Differenz

$$\begin{aligned} (26) \quad & \left| \int_a^b R(x) dx - Q_n[R] \right| \\ & \leq \int_{\mathfrak{I}} |R(x) - S(x)| dx + \int_{[a, b] - \mathfrak{I}} |R(x) - S(x)| dx \\ & \quad + \left| \int_a^b S(x) dx - Q_n[S] \right| \\ & \quad + \sum_{\mathfrak{I}} |S(x_{nj}) - R(x_{nj})| |\lambda_{nj}| + \sum_{[a, b] - \mathfrak{I}} |S(x_{nj}) - R(x_{nj})| |\lambda_{nj}| \\ & \leq 2M \cdot 2\varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon + 2M \cdot 3\varepsilon + \varepsilon L. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung dieser 5 Glieder benötigte man der Reihe nach:

(24), (25) und (21);

(23);

die Annahme, daß n genügend groß ist;

(24), (25), (22) und die Annahme, daß n genügend groß ist;

(23) und (S).

(26) zeigt die eine Hälfte des Satzes II, nämlich daß die Halbstetigkeit des $\Lambda(\mathfrak{I})$ eine hinreichende Bedingung bildet.

7. Es sei jetzt vorausgesetzt, daß (S) erfüllt ist, jedoch daß $\Lambda(\mathfrak{I})$ nicht halbstetig ist. Wir haben eine spezielle integrierbare Funktion $r(x)$ zu konstruieren, für welche das Quadraturverfahren divergiert.

Erinnern wir uns an gewisse Einzelheiten der in Nr. 2 auseinander-gesetzten Definitionen. Ein einzelner Punkt c des Intervalls $[a, b]$ ist auch als Intervallverein anzusehen. $\Lambda(c)$ ist folgendermaßen definiert:

Man setze

$$\lambda_n(c) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x_{nj} \neq c \text{ für } j = 1, 2, \dots, n; \\ |\lambda_{nj}|, & \text{wenn } c = x_{nj}. \end{cases}$$

Dann ist

$$\Lambda(c) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(c).$$

Wenn $\Lambda(c) > 0$ ist, so ist unsere Intervallvereinfunktion $\Lambda(\mathfrak{I})$ auf eine besonders grobe Art unstetig. Wir wollen zuerst diese Art von Unstetigkeit betrachten, indem wir zwei Fälle unterscheiden.

a) Es gibt einen Punkt c in $[a, b]$, so beschaffen, daß $\Lambda(c) > 0$. — In diesem Falle definiere man

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = c, \\ 0 & \text{für } x \neq c. \end{cases}$$

Es ist

$$Q_n[r] = \pm \lambda_n(c),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_n(r)| = \Lambda(c) > 0 = \int_a^b r(x) dx,$$

d. h. das Quadraturverfahren divergiert für die spezielle integrable Funktion $r(x)$.

b) Für jeden Punkt x des Intervalles $[a, b]$ ist $\Lambda(x) = 0$. Dieser Fall ist durch folgenden Umstand charakterisiert: Es konvergiert das Quadraturverfahren für jede Funktion, die nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden ist.

Doch sei, wie gesagt, $\Lambda(\mathfrak{I})$ nicht halbstetig. Es existiert also eine absteigende Folge von Intervallvereinen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n, \dots$, deren Maß gegen 0 strebt,

$$(27) \quad \mathfrak{I}_1 \supset \mathfrak{I}_2 \supset \mathfrak{I}_3 \supset \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m(\mathfrak{I}_n) = 0,$$

während

$$(28) \quad \Lambda(\mathfrak{I}_1) \geq \Lambda(\mathfrak{I}_2) \geq \Lambda(\mathfrak{I}_3) \geq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda(\mathfrak{I}_n) = p > 0.$$

Wir wollen die gewünschte Funktion $r(x)$ in folgender Form konstruieren:

$$(29) \quad r(x) = g_{k_1}(x) + g_{k_2}(x) + \dots + g_{k_m}(x) + \dots$$

Es soll dabei die Funktion $g_{k_m}(x)$ mit Q_{k_m} in guter Resonanz stehen und keine Unstetigkeitspunkte außerhalb $\mathfrak{I}_m$ haben. Die Funktionen $g_{k_1}(x)$, $g_{k_2}(x)$, $g_{k_3}(x)$, ... sind durch vollständige Induktion definiert, wie folgt.

Zuerst wähle man einen Index k_1 , so daß

$$\sum_{\mathfrak{I}_1} |\lambda_{k_1 j}| > \frac{3}{4} p$$

ausfällt; dies ist möglich, gemäß (28) und (9). Man zeichne aus diejenigen Stellen $x_{k_1 j}$, die in $\mathfrak{I}_1$ liegen, und setze an diesen ausgezeichneten Stellen

$$g_{k_1}(x_{k_1 j}) = \operatorname{sgn} \lambda_{k_1 j}.$$

An allen übrigen, nicht ausgezeichneten Stellen x des Intervalles, also an allen Stellen mit Ausnahme von endlich vielen, sei $g_{k_1}(x) = 0$.

Nun seien

$$g_{k_1}(x), g_{k_2}(x), \dots, g_{k_{m-1}}(x)$$

schon bestimmt. Man wähle k_m so, daß

$$(30) \quad k_m > k_{m-1},$$

$$\sum_{\mathfrak{I}_m} |\lambda_{k_m j}| > \frac{3}{4} p,$$

hingegen sei

$$(31) \quad \Sigma^{(m-1)} |\lambda_{k_m j}| < \frac{1}{4} p;$$

hierbei bedeutet $\Sigma^{(m-1)}$ eine Summation über alle diejenigen j , für welche $x_{k_m j}$ mit einer Stelle zusammenfällt, die schon durch $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_{m-1}}$ beansprucht wurde, d. h. mit einer Stelle $x_{k_1 j}$ oder $x_{k_2 j}$ oder ... oder $x_{k_{m-1} j}$. Die Möglichkeit der Wahl von k_m gemäß (30) ist durch (28) und (9) gewährleistet; um (31) zu erhalten, muß man berücksichtigen, daß wir uns jetzt im Fall b) befinden.

Man zeichne jetzt aus diejenigen Stellen $x_{k_m j}$, die erstens in $\mathfrak{I}_m$ liegen und zweitens mit keiner Stelle zusammenfallen, die durch $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots, Q_{k_{m-1}}$ schon beansprucht worden sind. Für diese endlich vielen ausgezeichneten Stellen $x_{k_m j}$ sei

$$(32) \quad g_{k_m}(x_{k_m j}) = \operatorname{sgn} \lambda_{k_m j}$$

gesetzt, an allen übrigen, nicht ausgezeichneten Stellen x des Intervalles $[a, b]$ sei $g_{k_m}(x) = 0$.

Die Funktion $g_{k_m}(x)$ hat also nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, die in $\mathfrak{I}_m$ liegen, und an diesen Unstetigkeitsstellen nimmt sie einen der Werte $+1$, -1 an, an allen ihren Stetigkeitsstellen den Wert 0. Zwei verschiedene Funktionen g_{k_m} haben keine gemeinsame Unstetigkeitsstelle. Die durch die Reihe (29) definierte Funktion $r(x)$ nimmt auch nur die Werte 1 , -1 , 0 an, und zwar ist sie nur auf abzählbar unendlich vielen Stellen von Null verschieden. Außerhalb des Intervallvereins $\mathfrak{I}_m$ besitzt $r(x)$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, nämlich nur solche, die den Funktionen $g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_{m-1}}$ angehören. Da, kraft (27), die Gesamt-

länge von $\mathfrak{I}_m$ beliebig klein genommen werden kann, ist $r(x)$, nach dem Riemannschen Kriterium, eigentlich integrabel. Offenbar ist

$$(33) \quad \int_a^b r(x) dx = 0.$$

Andererseits findet man, unter Beachtung der ganzen Konstruktion und insbesondere von (30), (31), (32),

$$\begin{aligned} Q_{k_m}[r] &= Q_{k_m}[g_{k_m}] + Q_{k_m}[g_{k_1} + \dots + g_{k_{m-1}}] + Q_{k_m}[g_{k_{m+1}} + \dots] \\ &= Q_{k_m}[g_{k_m}] + Q_{k_m}[g_{k_1} + \dots + g_{k_{m-1}}] \\ &\geq Q_{k_m}[g_{k_m}] - \Sigma^{(m-1)} |\lambda_{k_m j}| \\ &\geq \sum_{\mathfrak{I}_m} \lambda_{k_m j} \operatorname{sgn} \lambda_{k_m j} - 2 \Sigma^{(m-1)} |\lambda_{k_m j}| \\ &> \frac{3}{4} p - 2 \cdot \frac{1}{4} p = \frac{1}{4} p. \end{aligned}$$

Also kann $Q_n[r]$ nicht gegen (33) konvergieren. Dies beweist die noch ausstehende Hälfte des Satzes II: Die Bedingung (R) ist notwendig.

Das Newton-Cotessche Quadraturverfahren für analytische Funktionen.

8. Das Newton-Cotessche Quadraturverfahren ist interpolatorisch [Nr. 1, unter b)]. Als Näherungswert eines Integrals wird das Integral desjenigen Polynoms niedrigsten Grades genommen, das mit dem Integranden an einer bestimmten Anzahl von äquidistanten Interpolationsstellen übereinstimmt; die äußersten Interpolationsstellen sind die Endpunkte des Integrationsintervalles. Wenn die Anzahl der äquidistanten Stellen $n+1$ und das Integrationsintervall $[0, 1]$ ist, so lautet der

Näherungswert des Integrals $\int_0^1 f(x) dx$ folgendermaßen:

$$(34) \quad Q_n[f] = \lambda_{n0} f\left(\frac{0}{n}\right) + \lambda_{n1} f\left(\frac{1}{n}\right) + \lambda_{n2} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \lambda_{nn} f\left(\frac{n}{n}\right),$$

wobei (für $k = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$(35) \quad \lambda_{nk} = \int_0^1 \frac{n x (n x - 1) \dots (n x - k + 1) \cdot (n x - k - 1) \dots (n x - n)}{k (k-1) \dots 1 \cdot (-1) \dots (k-n)} dx$$

ist. Die Bezeichnungen Q_n , λ_{nk} weichen in der Bedeutung der Indices von der bisherigen Bezeichnung etwas ab.

Die eingangs erwähnte Stieltjessche Frage betreffend die Konvergenzverhältnisse des Newton-Cotesschen Quadraturverfahrens ist durch die

inzwischen erfolgten Untersuchungen zwar sehr stark präjudiziert, jedoch, meines Wissens, noch nicht vollständig entschieden. Es ist inzwischen bekannt geworden, nämlich durch Runge⁷⁾, daß die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten auch bei sehr einfachen analytischen Funktionen zu einer divergenten Polynomfolge führen kann. Aber hieraus folgt ja nicht ohne weiteres die Divergenz des Quadraturverfahrens: Aus der divergenten Polynomfolge könnte durch Integration eine konvergente Zahlenfolge entstehen. Auf alle Fälle kann dies bei nächstverwandten Polynomfolgen vorkommen: Es gibt Funktionen, die im Intervalle $[-1, 1]$ stetig sind und deren Interpolation in den Nullstellen der Legendreschen Polynome eine divergente Polynomfolge ergibt⁸⁾. Diese divergente Polynomfolge, integriert zwischen -1 und 1 , liefert die Gaußschen Näherungswerte des Integrals, welche, gemäß dem Satz von Stieltjes, gegen den wahren Wert des Integrals konvergieren.

Nahezu entschieden hat die Frage von Stieltjes Herr Ouspensky⁹⁾, der die Cotesschen Zahlen λ_{nk} asymptotisch berechnete. Er zog aber aus seinem Resultat bloß die etwas vage Folgerung, daß „la formule de Cotes perd toute valeur pratique tant que le nombre des ordonnées devient considérable“¹⁰⁾. Im Besitze des Satzes I der vorliegenden Arbeit kann man aus der asymptotischen Formel von Herrn Ouspensky sofort die präzise Folgerung ziehen, daß das Newton-Cotessche Quadraturverfahren nicht für jede stetige Funktion konvergieren kann. Ich will noch etwas hierüber hinausgehen und zeigen, daß das Verfahren nicht einmal für jede in $[0, 1]$ analytische Funktion konvergiert.

Da es sich um eine klassische Frage der Integralrechnung handelt, will ich das Lebesguesche Resonanzverfahren bis zur Aufstellung eines konkreten, verhältnismäßig einfachen Gegenbeispiels verfolgen (in Nr. 11). Es soll vorher (in Nr. 9) eine neue Herleitung der asymptotischen Formel von Herrn Ouspensky angedeutet und in Nr. 10 ein Hilfssatz bewiesen werden.

⁷⁾ C. Runge, Zeitschrift für Mathematik und Physik 46 (1901), S. 224–243.

⁸⁾ Ein auf beliebige Interpolationsstellen bezüglicher wichtiger Satz von G. Faber [Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 23 (1914), S. 192–210; vgl. auch L. Fejér, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 426–457, insbesondere S. 450–453] ist im vorliegenden Fall leicht zu präzisieren. Ein noch einfacheres Beispiel liefern die in Nr. 12 unter c) zu besprechenden Stellen (48); für die Divergenz der Interpolation an diesen Stellen vgl. L. Fejér, Göttinger Nachrichten 1916, S. 66–91, insbesondere Fußnote ¹⁾ S. 73–74.

⁹⁾ J. Ouspensky, Bulletin of the American Mathematical Society 31 (1925), S. 145–156.

¹⁰⁾ A. a. O. ⁹⁾, S. 156.

9. Durch Einführung der neuen Variablen $nx = t$ und der Γ -Funktion formt man (35) zu

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \lambda_{nk} &= \frac{(-1)^{n-k}}{n} \int_0^n \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{k!(n-k)!} \frac{dt}{t-k} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(t-n)} \frac{dt}{t-k} \\
 &= \frac{1}{\pi n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \int_0^n \Gamma(1+t) \Gamma(1+n-t) \sin \pi t \frac{dt}{t-k} \\
 &= -\frac{1}{\pi n} \binom{n}{k} [(-1)^k J_{n,k} + (-1)^{n-k} J_{n,n-k}]
 \end{aligned}$$

um, wobei zur Abkürzung

$$(37) \quad J_{n,k} = \int_0^{n/2} \frac{\Gamma(1+t) \Gamma(1+n-t) \sin \pi t}{\Gamma(1+n)} \frac{dt}{k-t}$$

gesetzt wurde. Die Abschätzung von $J_{n,k}$ gründe ich auf folgende beiden Tatsachen: Es ist

$$(38) \quad \Gamma(1+t) \Gamma(1+n-t) \text{ monoton abnehmend für } 0 < t < \frac{n}{2};$$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1, \text{ wenn } x \text{ reell.}$$

(39) ist wohlbekannt. Man beweist (38) entweder aus der bekannten Eigenschaft der Γ -Funktion, daß $\log \Gamma(x)$ eine konvexe Funktion ist¹¹⁾, oder, indem man $1 + \frac{1}{2}n = k$, $\frac{1}{2}n - t = x$ setzt, aus der Integralformel

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(k-x) \Gamma(k+x)}{\Gamma(2k)} &= \int_0^1 t^{k-x-1} (1-t)^{k+x-1} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 [t(1-t)]^{k-1} \left[\left(\frac{1-t}{t} \right)^x + \left(\frac{1-t}{t} \right)^{-x} \right] dt.
 \end{aligned}$$

Ich setze voraus, daß n gerade und daß $k \geq 4$ ist (zur Vereinfachung der Überlegung; das Resultat gilt auch für ungerades n und für $k \geq 1$). Man erhält, mit Benutzung von (38) und (39),

$$\begin{aligned}
 \left| \int_1^{n/2} \frac{\Gamma(1+t) \Gamma(1+n-t) \sin \pi t}{\Gamma(1+n)} \frac{dt}{k-t} \right| &= \left| \int_1^3 + \int_3^{n/2} \right| \\
 &< 2 \frac{1!(n-1)!}{n!} \frac{1}{k-3} + \frac{n \cdot 3!(n-3)!}{2 n!} \pi \\
 &= \frac{1}{nk} \left(\frac{2k}{k-3} + 3\pi \frac{n}{n-1} \frac{k}{n-2} \right).
 \end{aligned}$$

¹¹⁾ H. Bohr und J. Møllerup, *Laerebog i matematisk Analyse* (København 1922) Bd. 3, S. 161–162.

Also ist, gleichmäßig in k für $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} J_{n,k} &= \int_0^1 \frac{\Gamma(1+n-t)}{\Gamma(1+n)} \frac{\Gamma(1+t) \sin \pi t}{k-t} dt + O\left(\frac{1}{nk}\right) \\ &= \int_0^1 n^{-t} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \frac{\Gamma(1+t) \sin \pi t}{k-t} dt + O\left(\frac{1}{nk}\right); \end{aligned}$$

zur zweiten Zeile benutzt man die Stirlingsche Formel (oder die Produktdefinition von $\Gamma(-t)$). Durch die Variablenvertauschung $t \log n = x$ erhält man

$$\begin{aligned} J_{n,k} &= \frac{\pi}{(\log n)^2 k} \int_0^{\log n} x e^{-x} \Gamma\left(1 + \frac{x}{\log n}\right) \frac{\log n}{\pi x} \sin \frac{\pi x}{\log n} \left(1 - \frac{x}{k \log n}\right)^{-1} dx + O\left(\frac{1}{nk}\right) \\ (40) \quad &= \frac{\pi}{(\log n)^2 k} \left(\int_0^\infty x e^{-x} dx + \varepsilon_{n,k}\right), \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_{n,k}$ mit $1/n$ gegen 0 strebt, und zwar *gleichmäßig* in k . Es folgt aus (36) und (40)

$$(41) \quad \lambda_{n,k} = -\frac{1}{n(\log n)^2} \binom{n}{k} \left[\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{n-k}}{n-k}\right] (1 + \eta_{n,k}),$$

$\eta_{n,k} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$,

wenn die beiden Glieder in der eckigen Klammer vom gleichen Vorzeichen sind, also wenn n gerade ist. Das Resultat kann aber auch für ungerades n nach Zusammenziehung von $J_{n,k} - J_{n,n-k}$ in ein Integral durch analoge Behandlung erwiesen werden, und auch der Fall $k=0$ ist der Methode ohne weiteres zugänglich.

Im folgenden benutze ich nur einen kleinen Teil des durch (41) ausgedrückten Ouspenskyschen Resultates, nämlich, daß für genügend großes gerades n

$$(42) \quad |\lambda_{n,n/2}| > \frac{2^n}{n^3}$$

ist, was ja leicht aus (41) zu folgern ist.

10. Es sei z eine komplexe Variable. Man bezeichne mit $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit derjenigen Punkte der z -Ebene, deren Abstand vom Intervall $[0, 1]$ die Einheit nicht übertrifft; unter Intervall $[0, 1]$ ist natürlich die abgeschlossene gerade Verbindungsstrecke der Punkte $z=0$ und $z=1$ zu verstehen. $\mathfrak{B}$ ist ein abgeschlossener Bereich, begrenzt durch zwei Halbkreise, vom Mittelpunkt $z=0$ bzw. $z=1$, und durch zwei gerade Strecken von der Länge 1. Die interessante Eigenschaft des

Bereiches $\mathfrak{B}$ ist die folgende: Wenn eine analytische Funktion in $\mathfrak{B}$ regulär ist, so läßt sie sich in $[0, 1]$ gleichmäßig annähern durch interpolierende Polynome mit beliebigen in $[0, 1]$ liegenden Interpolationsstellen Teils mehr, teils weniger besagt der folgende, unseren Zwecken angepaßte

Hilfssatz. Wenn die analytische Funktion $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ regulär ist, und ihr Betrag daselbst unterhalb M bleibt, wenn ferner das Polynom $L(z)$ vom Höchstgrade $m - 1$ an m in $[0, 1]$ gelegenen Stellen mit $f(z)$ übereinstimmt, so ist

$$(43) \quad \left| \int_0^1 L(x) dx \right| \leq 3M.$$

Es seien $x_1, x_2, \dots, x_m$ die m in $[0, 1]$ gelegenen verschiedenen Stellen, in welchen $f(x) - L(x)$ nach Voraussetzung verschwindet. Es sei

$$(z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_m) = \omega(z)$$

gesetzt. Dann ist bekanntlich¹²⁾

$$L(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(u)}{u - x} \frac{\omega(x)}{\omega(u)} du;$$

x liegt auf $[0, 1]$ und das Integral ist entlang der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ in positivem Sinne erstreckt. Auf dieser Begrenzung ist jeder Faktor von $\omega(u)$ ebenso wie $u - x$ dem Betrage nach ≥ 1 , während auf $[0, 1]$ jeder Faktor von $\omega(x)$ dem Betrage nach ≤ 1 ist. Daher gilt auf $[0, 1]$

$$|L(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi + 2) M,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 L(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (L(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq M + \frac{\pi + 1}{\pi} M \leq 3M, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

11. Nach den Vorbereitungen in Nr. 9 und 10 gelangen wir zu dem in Nr. 8 versprochenen Beispiel. Mit einem festgewählten a ,

$$(44) \quad \frac{1}{2} < a < 1$$

bilde man die Reihe

$$(45) \quad f(z) = \sum_{k=4}^{\infty} a^{k!} \frac{\sin k! \pi z}{-\cos \pi z}.$$

Jedes Glied der unendlichen Summe ist eine periodische ganze Funktion von der Periode 2. Das Vorzeichen im Nenner und der Anfang der

¹²⁾ Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925) Bd. I, Nr. III 163, S. 116 und S. 289.

Summation sind so gewählt, daß für $z = \frac{1}{2}$ jedes Glied einen positiven Wert erhält. Zur Abschätzung der Glieder beachte man zweierlei. Erstens ist für reelle x und y

$$(46) \quad |\sin(x + i y)| \leq e^{|y|}.$$

Zweitens: Um das Maximum des Betrages einer periodischen Funktion von der Periode 2 in einem abgeschlossenen Rechteck mit achsenparallelen Seiten zu finden, genügt es, die Werte zu untersuchen, die die Funktion auf den beiden *horizontalen* Seiten annimmt, vorausgesetzt, daß die Länge dieser horizontalen Seiten ≥ 2 und daß die Funktion im Rechteck regulär ist.

Bei Beachtung dieser beiden Bemerkungen findet man leicht, daß die Funktion (45) regulär ist in dem durch die reelle Achse halbierten unendlichen Horizontalstreifen, wo

$$\pi |\Im z| < -\log a.$$

(Sie hat, nebenbei bemerkt, die Berandung dieses Horizontalstreifens zur natürlichen Grenze.) Ferner findet man, indem man den Hilfssatz von Nr. 10 auf (34) anwendet und den Bereich $\mathfrak{B}$ in ein achsenparalleles Rechteck einschließt, daß

$$(47) \quad \left| Q_m \left[a^{k!} \frac{\sin k! \pi z}{-\cos \pi z} \right] \right| < C (a e^\pi)^{k!},$$

wo C von m und k unabhängig ist. (C ist aus dem Minimum von $|\cos \pi z|$ für $\Im z = 1$ zu berechnen.)

Man erhält aus (34), (45), (42) und (47)

$$\begin{aligned} Q_{n!} [f] &= Q_{n!} \left[\sum_{k=n}^{\infty} a^{k!} \frac{\sin k! \pi x}{-\cos \pi x} \right] + Q_{n!} \left[\sum_{k=4}^{n-1} a^{k!} \frac{\sin k! \pi x}{-\cos \pi x} \right] \\ &= \lambda_{n!, n!/2} \sum_{k=n}^{\infty} k! a^{k!} + Q_{n!} \left[\sum_{k=4}^{n-1} a^{k!} \frac{\sin k! \pi x}{-\cos \pi x} \right] \\ &> \frac{2^{n!}}{(n!)^3} n! a^{n!} - (n-4) C (a e^\pi)^{(n-1)!} \\ &= \frac{(2a)^{n!}}{(n!)^2} \left(1 - [(n-1)!]^2 n^2 (n-4) C \left(\frac{a e^\pi}{(2a)^n} \right)^{(n-1)!} \right). \end{aligned}$$

Wegen (44) strebt die letzte Zeile mit n gegen ∞ , also divergiert das Newton-Cotessche Quadraturverfahren für die entlang der reellen Achse analytische Funktion (45), w. z. b. w.

Bemerkungen und Beispiele.

12. Um die Darstellung nicht über Gebühr auszudehnen, will ich im folgenden hauptsächlich Resultate angeben und die dazu führenden Überlegungen bloß skizzieren.

a) Es kann (P) erfüllt sein, ohne daß (S) erfüllt ist: Ein Beispiel hierfür gibt ja die in Nr. 8—11 besprochene Newton-Cotes'sche Quadratur, vgl. (42).

b) Es können (P) und (S) erfüllt sein, ohne daß (R) erfüllt ist. Ein triviales Beispiel hierfür: Es sei, für $j = 1, 2, \dots, n$

$$x_{nj} = \frac{j-1}{n}, \quad \lambda_{n1} = 1, \quad \lambda_{n2} = -1, \quad \lambda_{n3} = \lambda_{n4} = \dots = \lambda_{nn} = \frac{1}{n}.$$

Das Verfahren konvergiert für jede stetige Funktion, jedoch nicht für diejenige integrable Funktion, die für $x = 0$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat.

c) Zur Erfüllung der Bedingung (R) ist hinreichend die Existenz einer in $[a, b]$ definierten, nichtnegativen, im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktion $\varphi(x)$, so beschaffen, daß die Ungleichung

$$A(\mathfrak{I}) \leq \int_{\mathfrak{I}} \varphi(x) dx$$

für jeden Intervallverein $\mathfrak{I}$ gilt. Anders ausgedrückt: Die nichtnegative, monotone, subadditive Intervallvereinfunktion $A(\mathfrak{I})$ ist sicher halbstetig, wenn sie von einer nichtnegativen, additiven, totalstetigen Mengenfunktion majorisiert werden kann.

Dieses hinreichende Kriterium ist in vielen Fällen bequem anwendbar. Mit seiner Hilfe konnte ich insbesondere zeigen, daß das interpolatorische Quadraturverfahren für jede integrable Funktion konvergiert, wenn als Interpolationsstellen

$$(48) \quad x_{nj} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{[2(n-j)+1]\pi}{2n}$$

oder

$$(49) \quad x_{nj} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n-j+1)\pi}{n+1}$$

gewählt werden. Ich verzichte auf die Darstellung der Einzelheiten, da Herr Fejér nachher diese Resultate viel eleganter bewiesen hat. Vgl. in seiner nachfolgenden Abhandlung die Sätze $\alpha)$, $\beta)$, II und III.

d) Der schöne einfache Satz (Satz I der nachfolgenden Abhandlung), dessen sich Herr Fejér bei Behandlung der Interpolationstellen (48) und (49) bedient, läßt sich, ein wenig erweitert, so fassen: *Wenn ein Quadraturverfahren für alle Polynome konvergiert, und alle Gewichte $\lambda_{nj} \geq 0$ sind,*

so konvergiert es auch für alle integrierbaren Funktionen. In dieser Fassung umfaßt der Satz auch die in der Nr. 1 unter c) gegebene Aussage. Der Beweis von Herrn Fejér gilt sozusagen unverändert auch für die gegenwärtige Fassung.

e) Die unter c) genannte, für die Erfüllung von (R) hinreichende Bedingung ist nicht notwendig. Dies konnte ich durch kein einfacheres Beispiel dartun als das folgende.

Es sei $a = 0$, $b = 1$ und

$$x_{nj} = \frac{2^j - 1}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Zur Festlegung von λ_{nj} habe ich zuerst $\mathfrak{U}_n$, das „ausgezeichnete Intervall“ des n -ten Schrittes zu definieren. Man ordne die Intervalle

$$\left[\frac{r-1}{2^s}, \frac{r}{2^s} \right] \quad (r = 1, 2, \dots, 2^s; s = 2, 3, 4, 5, \dots)$$

nach abnehmender Länge, und diejenigen von gleicher Länge nach zunehmender Anfangsabszisse an und bezeichne sie in dieser Reihenfolge mit $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \dots$. Es ist

$$\mathfrak{I}_1 = [0, \tfrac{1}{4}], \mathfrak{I}_2 = [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], \dots, \mathfrak{I}_5 = [0, \tfrac{1}{8}], \dots$$

Man setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \mathfrak{I}_1, \\ \mathfrak{U}_2 &= \mathfrak{I}_1, \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{I}_2, \\ \mathfrak{U}_4 &= \mathfrak{I}_1, \mathfrak{U}_5 = \mathfrak{I}_2, \mathfrak{U}_6 = \mathfrak{I}_3, \\ \mathfrak{U}_7 &= \mathfrak{I}_1, \mathfrak{U}_8 = \mathfrak{I}_2, \mathfrak{U}_9 = \mathfrak{I}_3, \mathfrak{U}_{10} = \mathfrak{I}_4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ich unterscheide zwei Fälle.

(I) Wenn x_{nj} nicht in $\mathfrak{U}_n$ liegt, sei $\lambda_{nj} = 1/n$.

(II) Wenn x_{nj} in $\mathfrak{U}_n$ liegt, sei

$$\begin{aligned} \lambda_{n,j+2} &= \lambda_{nj}, & (-1)^j \lambda_{nj} &\geq 0, \\ \sum_{\mathfrak{U}_n} \lambda_{nj} &= m(\mathfrak{U}_n), & \sum_{\mathfrak{U}_n} |\lambda_{nj}| &= \sqrt{m(\mathfrak{U}_n)}. \end{aligned}$$

Die Vorschrift (II) kann widerspruchsvoll sein, wenn nämlich in $\mathfrak{U}_n$ weniger als zwei x_n liegen; dies kommt aber nur für endlich viele n vor. — Es ist leicht zu sehen, daß das so definierte Quadraturverfahren für jede integrierbare Funktion konvergiert. Ferner gilt: Ist $\mathfrak{U}$ ein ausgezeichnetes Intervall, so ist

$$A(\mathfrak{U}) = \sqrt{m(\mathfrak{U})}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß eine additive Mengenfunktion, die das vorliegende $A(\mathfrak{I})$ majorisieren würde, für kein einziges Intervall einen endlichen Wert haben könnte.

f) Die unter c) erwähnten interessanten Systeme (48), (49) von Interpolationsstellen, die in der nachfolgenden Abhandlung von Herrn Fejér genauer untersucht werden, sind Beispiele des folgenden wichtigen Verteilungstypus:

$$(50) \quad x_{nj} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \Theta_{nj}, \quad 0 \leq \Theta_{nj} \leq \pi,$$

und die Θ_{nj} sind für großes n im Intervalle $[0, \pi]$ gleichverteilt. Es ist, wie bekannt¹³⁾, diese Verteilung der Stellen x_{nj} notwendig und hinreichend dazu, daß die Interpolation an den Stellen x_{nj} für jede in $[a, b]$ analytische Funktion eine gleichmäßige Annäherung liefere. Ist diese Verteilung der Stellen x_{nj} etwa hinreichend auch dafür, daß das zu den x_{nj} gehörige interpolatorische Quadraturverfahren für jede stetige Funktion konvergiere? Nein, lautet die Antwort.

Es seien nämlich vorgegeben irgendwelche n Stellen

$$(51) \quad x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{n, n-1}, x_{nn}.$$

Dann kann man zwei beliebig kleine Zahlen ε und δ so finden, daß die zu den $n+1$ Stellen

$$(52) \quad x_{n1} + \varepsilon, x_{n2} + \varepsilon, \dots, x_{n, n-1} + \varepsilon, x_{nn} - \varepsilon, x_{nn} - \delta$$

gehörige interpolatorische Quadraturformel der Stelle $x_{nn} - \delta$ ein beliebig großes Gewicht zuordnet. Setzt man die Zahlen ε, δ in eine passende Abhängigkeit von n , so kann man die Erfüllung der Bedingung (S) für die Stellen (52) verhindern, wie auch die Stellen (51) beschaffen sein mögen, also insbesondere auch dann, wenn (50) besteht und die Θ_{nj} gleich verteilt in $[0, \pi]$ sind. Der Übergang von (51) zu (52), mit passendem $\varepsilon = \varepsilon_n$, ändert an der Gleichverteilung der Θ_{nj} nichts; wir sehen, daß es nicht nur auf die Gleichverteilung, sondern auch auf genauere Einzelheiten des asymptotischen Verhaltens der Θ_{nj} ankommt.

g) die Bemerkung unter f) zeigt weiter, daß ein Quadraturverfahren für jede in $[a, b]$ analytische Funktion konvergieren kann, ohne für jede daselbst stetige Funktion zu konvergieren. Das triviale Beispiel

$$x_{n1} = 0, \quad x_{n2} = n^{-n}, \quad \lambda_{n1} = -\lambda_{n2} = n^{n-1}, \\ x_{nj} = \frac{j-1}{n}, \quad \lambda_{nj} = \frac{1}{n} \quad \text{für } j = 3, 4, \dots, n$$

zeigt ein Quadraturverfahren, daß für jede differenzierbare Funktion konvergiert ohne für jede stetige zu konvergieren.

¹³⁾ Spezialfall (oder eigentlich Grenzfall) eines interessanten, von L. Kalmár aufgestellten allgemeinen Satzes, der aus einem Satz von L. Fejér durch Hinzufügung der Umkehrung entstanden ist. Vgl. *Mathematikai és Fizikai Lapok* **33** (1926), S. 120–149.

h) Hinreichend dafür, daß ein *interpolatorisches* Quadraturverfahren für jede in $[a, b]$ analytische Funktion konvergiere, ist die Bedingung

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda_{n1}| + |\lambda_{n2}| + \dots + |\lambda_{nn}|} = 1.$$

Dies beweist man unmittelbar aus der wohlbekannten Tatsache, daß zu einer in $[a, b]$ analytischen Funktion $f(x)$ eine Zahl ϱ , $0 < \varrho < 1$, gehört, so daß die Differenz zwischen $f(x)$ und dem bestapproximierenden Polynom n -ten Grades $O(\varrho^n)$ ist. Daß diese hinreichende Bedingung (53) nicht auch notwendig ist, zeigen die Bemerkungen unter f).

i) Eine leichte Modifikation des in Nr. 11 konstruierten Gegenbeispiels (45) zeigt: Sind sämtliche Differenzen

$$x_{n,j+1} - x_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

ganzzahlige Multipla einer Distanz δ_n und bleibt die Größe $(n \delta_n)^{-1}$ beschränkt für $n \rightarrow \infty$, so ist die Bedingung (53) *notwendig* zur Konvergenz des Quadraturverfahrens für die Klasse aller analytischen Funktionen. Diese Bemerkung kann herangezogen werden zur Aufklärung der Konvergenzverhältnisse der in der Praxis üblichen „gemischten“ Verfahren, deren geläufigstes Beispiel das Simpsonsche Verfahren ist. Man kann wohl diese notwendige Bedingung mit einiger Mühe auf allgemeinere Stellen x_{nj} ausdehnen, wobei der kleinsten Differenz $x_{n,j+1} - x_{nj}$ eine Rolle zufallen dürfte.

j) Eine mit der hier behandelten nahe verwandte Frage ist die folgende: Wie muß die Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ beschaffen sein, damit für alle stetigen (bzw. alle integrierbaren usw.) Funktionen $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

gelte? Zu der allgemeinen, durch die Herren Lebesgue, Hahn u. a. behandelten Frage [vgl. a. a. O.⁶⁾] habe ich hier nichts zu bemerken, ich benutze aber die Gelegenheit, um die folgende, hierher gehörige, vielleicht noch nicht hervorgehobene, spezielle Tatsache zu erwähnen: Sind $\varphi(x), f(x)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar, überdies $\varphi(x)$ beschränkt und periodisch von der Periode ω , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(nx) f(x) dx = \frac{1}{\omega} \int_a^{\omega} \varphi(x) dx \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

Dieser Satz umfaßt neben einem klassischen Lemma aus der Theorie der Fourierschen Reihe ($\varphi(x) = e^{ix}$) einen Satz von Herrn Fejér¹⁴⁾ ($\varphi(x) = |\sin x|$). Zum Beweis kann man sich auf den Spezialfall beschränken, daß $f(x)$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar ist (Annäherungsverfahren!), ferner, daß $\varphi(x) \geq 0$ ist; denn für $\varphi(x) = \text{konst.}$ ist der Satz selbstverständlich, und er ist für $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ wahr, wenn er für $\varphi = \varphi_1$ und $\varphi = \varphi_2$ wahr ist, und φ_1, φ_2 dieselbe Periode ω haben. Im besagten Spezialfall sind aber die Überlegungen von Herrn Fejér, a. a. O.¹⁴⁾, ohne Änderung anwendbar.¹⁵⁾

¹⁴⁾ L. Fejér, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **138** (1910), S. 22—53, insbesondere S. 26—28.

¹⁵⁾ (Anmerkung bei der Korrektur, 10. I. 1933.) Herr G. Szegő teilte mir folgende Bemerkungen mit:

1. Die Notwendigkeit der in Satz I genannten Bedingung (S) ist enthalten in einem allgemeinen Satz von E. Helly; vgl. seinen Satz III in Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-naturwiss. Klasse **121** (1912), Abt. IIa, S. 265—297.

2. Die Überlegungen der Nr. 9 sind auch verwendbar für die der dort behandelte nahestehende Frage, die Herr H. Kneser im Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. **42** (1932), S. 27—32 behandelt, und Herr J. F. Steffensen daselbst, S. 141—143 wiederbehandelt hat.

3. Es ist Herrn Szegő gelungen, die Konvergenzverhältnisse einer wichtigen, ausgedehnten Klasse von interpolatorischen Quadraturverfahren [vgl. Nr. 1 b)] aufzuklären: Das Grundintervall sei $[-1, 1]$, die Interpolationsstellen $x_{n\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) die Nullstellen des Jacobischen Polynoms $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. [Bezeichnungen wie bei G. Pólya und G. Szegő, a. a. O.¹²⁾, Bd. II, Nr. VI 98, S. 93—94 und S. 292—293.] Es gilt der Satz:

Ist $\text{Max}(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$, so gibt es eine im Intervall $[-1, 1]$ stetige Funktion $f(x)$, für welche die Quadraturwerte $Q_n[f]$ divergieren.

Ist $\text{Max}(\alpha, \beta) < \frac{3}{2}$, so konvergieren die Quadraturwerte $Q_n[f]$ gegen $\int_{-1}^1 f(x) dx$, wenn $f(x)$ eine beliebige, für $-1 \leq x \leq 1$ eigentlich integrierbare Funktion bezeichnet. (Dasselbe gilt auch für $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$.)

(Eingegangen am 2. Juli 1932.)

Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen.

Von

L. Fejér in Budapest.

Einleitung und Angabe der Resultate.

1. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ voneinander verschiedene reelle Werte. Es bezeichne ferner $l_k(x)$ diejenige ganze rationale Funktion von genau $(n-1)$ -tem Grade von x , die an der Stelle x_k den Wert 1 annimmt, an allen übrigen Stellen $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ aber verschwindet. Dann lautet die „Lagrangesche Interpolationsformel“

$$(1) \quad L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_n l_n(x).$$

Sie stellt diejenige (einzige) ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$ -tem Grade in x dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, der Reihe nach, die (gegebenen) Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ annimmt. Die Interpolationsstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ werde ich auch die „Grundpunkte“ der Interpolation nennen. Entsprechend werde ich die durch die Grundpunkte völlig bestimmten Polynome

$$(2) \quad l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$$

die „Grundpolynome“ (oder „Grundfunktionen“) der Lagrangeschen Interpolation nennen.

2. Sind außer $x_1, x_2, \dots, x_n$ noch zwei reelle Werte a und b gegeben, so liefert (1) durch Integration von a bis b die Formel

$$(3) \quad \int_a^b L(x) dx = y_1 \int_a^b l_1(x) dx + \dots + y_n \int_a^b l_n(x) dx,$$

die ich, in dieser Allgemeinheit, etwa die „Newton-Lagrangesche Quadraturformel“ nennen kann. $x_1, x_2, \dots, x_n$ nenne ich die „Grundpunkte“ dieser Quadratur, und die Zahlen

$$(4) \quad \int_a^b l_1(x) dx, \int_a^b l_2(x) dx, \dots, \int_a^b l_n(x) dx$$

mögen die „Grundzahlen“ oder „Grundfaktoren“ oder auch „Cotessche Zahlen“ der Quadratur heißen; ich bezeichne sie mit

$$(5) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Die Formel der mechanischen Quadratur (am Wege Lagrangescher Interpolation) lautet also:

$$(6) \quad Q = \int_a^b L(x) dx = y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + \dots + y_n \lambda_n,$$

wo die Grundfaktoren

$$(7) \quad \lambda_k = \int_a^b l_k(x) dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

nur von $x_1, x_2, \dots, x_n$; a, b abhängen (d. h. von $y_1, y_2, \dots, y_n$ unabhängig sind). Die Quadraturformel (6) stellt das Integral von a bis b derjenigen ganzen rationalen Funktion von höchstens $(n-1)$ -tem Grade in x dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach die (gegebenen) Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ annimmt. Setzt man in (1) und (6)

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1,$$

so erhält man

$$(8) \quad l_1(x) + l_2(x) + \dots + l_n(x) = 1$$

für jeden Wert von x , und

$$(9) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = b - a.$$

3. Ist im Intervall $a \leq x \leq b$ eine Funktion $y = f(x)$ definiert und liegen die Grundpunkte $x_1, x_2, \dots, x_n$ in diesem Intervall $a \leq x \leq b$, so soll $L_n(x)$ oder $L_n[f]$ natürlich dasjenige Lagrangesche Interpolationspolynom von höchstens $(n-1)$ -tem Grade in x bezeichnen, das an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach die Werte

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$$

annimmt. Weiter soll Q_n oder $Q_n[f]$ den Wert von $\int_a^b L_n(x) dx$ bezeichnen.

4. Im wichtigen Spezialfall, wo $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Nullstellen des n -ten Legendreschen Polynoms $P_n(x)$ bezeichnen und $a = -1, b = 1$ ist, hat Stieltjes¹⁾ das folgende schöne Theorem gefunden:

¹⁾ T. J. Stieltjes, Quelques recherches sur les quadratures dites mécaniques. Ann. Scient. de l'École Normale Supérieure, Paris, série 3 (1884), p. 409—426, und Oeuvres Complètes, Tome I, p. 377—394.

Es ist

$$(10) \quad \lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

und zwar für eine beliebige Funktion $f(x)$, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Dies besagt, daß die von Gauß entdeckte mechanische Quadratur auf eine solche Funktion $f(x)$, und auf das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ angewendet, bei dem „ n -ten Schritt“ einen Quadraturwert $Q_n[f]$ liefert, der mit unendlich wachsendem n zum genauen Integralwert $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ der Funktion $f(x)$ konvergiert.

Stieltjes hat den Beweis seines Satzes auf die folgenden drei Tatsachen gegründet.

A. Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Legendreschen Grundpunkte

$$(P_n(x_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n; \quad x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1),$$

so sind die zum Intervall $-1 \leq x \leq 1$ gehörigen Grundzahlen der Quadratur

$$(11) \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

positiv. [Resultat von Gauß, Christoffel, Stieltjes²⁾ usw.]

B. Wir zerlegen das ganze Intervall I von der Länge 2, das von $x = -1$ bis $x = +1$ reicht, in n Teilintervalle, die wir, von rechts nach links gehend, der Reihe nach mit $i_1, i_2, \dots, i_n$ bezeichnen, und zwar so, daß die Länge der Teilintervalle $i_1, i_2, \dots, i_n$, der Reihe nach, gleich $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sei. [Das ist möglich, weil nach A. alle Grundfaktoren λ_k positiv sind und weil nach (9) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 2$ ist.] Dann liegt x_1 im Innern des Intervalles i_1 , x_2 in i_2 , ..., x_n in i_n . Das heißt in Zeichen:

$$(12) \quad 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) < x_k < 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}).$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

[Resultat von Tschebyscheff, Markoff, Stieltjes.]

²⁾ Der Beweis lautet übrigens so: Da $(l_k(x))^3$ an den Legendreschen Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach denselben Wert annimmt als $l_k(x)$ selbst, und da weiter der Grad von $(l_k(x))^3$ $2n - 2$ ist, und also den Wert $2n - 1$ nicht übersteigt, so ist, nach der bekannten Grundeigenschaft der Legendreschen Abszissen,

$$\lambda_k = \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx = \int_{-1}^{+1} (l_k(x))^2 dx > 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

C. Der größte der n Grundfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ konvergiert zu³⁾ 0, wenn $n \rightarrow \infty$.

Aus den Tatsachen A., B. und C. folgt der Stieltjessche Satz (10) unmittelbar. Aus B. folgt nämlich, daß im Falle der Legendreschen Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Wert $Q_n[f]$ der mechanischen Quadratur bei dem n -ten Schritt, d. h. der Wert

$$(13) \quad Q_n = f(x_1)\lambda_1 + f(x_2)\lambda_2 + \dots + f(x_n)\lambda_n,$$

identisch ist mit dem Werte einer Riemannschen Rechtecksumme der Funktion $f(x)$, bezüglich einer Einteilung des Intervalls $-1 \leq x \leq +1$ in Teilintervalle. Die Länge der Teilintervalle wird der Reihe nach durch die Grundfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ angegeben, die „Zwischenstellen“ in diesen Intervallen sind der Reihe nach die Legendreschen Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ selbst. Mit Rücksicht auf C. ist also tatsächlich

$$(14) \quad \lim_{n=\infty} Q_n = \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

wenn nur die Funktion $f(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

5. Wir haben soeben gesehen, wie Stieltjes die Konvergenz der Gaußschen Quadratur aus den Tatsachen A., B. und C. ableitet (ein Beweis von klassischer Schönheit). Ich habe nun im Jahre 1922 bemerkt, daß allgemein, wenn eine beliebige unendliche Folge von interpolatorischen Punktgruppen des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$ vorliegt, der Wert

$Q_n[f]$ der Quadratur für $\lim_{n=\infty} Q_n$ zu $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ konvergiert, wenn die

Bedingung A. allein erfüllt ist, d. h. wenn sämtliche Cotessche Zahlen positiv (nichtnegativ) ausfallen.

³⁾ Beweis von Stieltjes: Da bekanntlich im Falle Legendrescher Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Differenzen $1 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - (-1)$ mit $1/n$ zu Null konvergieren, so folgt C. aus B. In § 5, Nr. 3 vorliegender Arbeit wird bewiesen, daß, kurz ausgedrückt, aus der Eigenschaft A. die Eigenschaft C. immer folgt. Ausführlicher formuliert: Sind für die Abszissen

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

des Intervalls $(-1, +1)$ die Cotesschen Zahlen

$$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

nichtnegativ, so konvergiert die größte der Cotesschen Zahlen $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ mit $1/n$ zu Null. Weiter wird in Nr. 2 desselben Paragraphen gezeigt, daß die unendliche Folge der Punktgruppen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ das Intervall $(-1, +1)$ überall dicht bedeckt, und zwar im strengeren Sinne des Wortes. — In die weitere Analyse von A., B., C. möchte ich an anderer Stelle eingehen.

getragen"). Von einer Publikation habe ich seinerzeit abgesehen, weil ich außer den Legendre-Gaußschen keine interessante Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ kannte, für welche die Cotesschen Zahlen für das Intervall $(-1, +1)$ nichtnegativ ausfallen.

Vor nicht langer Zeit hat mir nun Herr G. Pólya, der die Frage der Quadraturkonvergenz in seiner (dieser vorangehenden) Arbeit auf ganz breiter Grundlage behandelt, brieflich⁷⁾ die folgenden zwei überraschenden Sätze mitgeteilt, die dem Konvergenzsatz (10) von Stieltjes entsprechen:

$$\lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

ist auch dann richtig für beliebiges, im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ riemannisch integrierbares $f(x)$, wenn

$\alpha)$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ die sogenannten Tschebyscheffschen Abszissen bedeuten; d. h. wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln von $T_n(x) = 0$ sind, wo

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta,$$

und weiter auch dann richtig, wenn

$\beta)$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $U_n(x) = 0$ sind, wo

$$U_n(x) = U_n(\cos \theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta}. \quad (\text{Sätze von Pólya.})$$

Herr Pólya beweist seine Sätze $\alpha)$ und $\beta)$ (als Anwendungsbeispiele) mit Hilfe seiner weitreichenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Quadraturkonvergenz (bei Zugrundelegung verschiedener Funktionsklassen $f(x)$). In seinen Bedingungen figurieren auch die absoluten Beträge $|\lambda_k|$ der Cotesschen Zahlen. Die Kenntnis dieser Pólyaschen Sätze hat mich nun veranlaßt nachzusehen, ob die Cotesschen Zahlen nicht etwa auch für die Abszissen $\alpha)$ und $\beta)$ positiv sind? Ich habe gefunden, daß dies tatsächlich der Fall ist; es gelten die Sätze:

Satz II. *Die zum Intervall $(-1, +1)$ gehörigen Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ der Tschebyscheffschen Abszissen sind positiv (§ 1).*

Satz III. *Die zum Intervall $(-1, +1)$ gehörigen Cotesschen Zahlen für die n Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Gleichung*

$$U_n(x) = U_n(\cos \theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} = 0$$

sind positiv (§ 2).

⁶⁾ Diese Vorlesung wurde von meinem damaligen Schüler Herrn L. Kalmár genau ausgearbeitet.

⁷⁾ Brief vom 21. XI. 1931 und 30. XI. 1931.

Satz I enthält eine hinreichende Bedingung für die Quadraturkonvergenz (für integrierbare Funktionen $f(x)$), wenn die Anzahl der Grundpunkte $x_1, x_2, \dots, x_n$ unbegrenzt wächst. Diese Bedingung (in welcher die Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ explizite gar nicht auftreten) lautet:

Die Quadratur $Q_n[f]$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ zu $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$, falls die Cotes'schen Zahlen nichtnegativ sind. Da nach meinen Sätzen II und III für die Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ von $T_n(x) = 0$ oder $U_n(x) = 0$ die Cotes'schen Zahlen positiv sind, so ist also mit diesen Abszissen meine hinreichende Bedingung für die Quadraturkonvergenz (für riemannisch integrierbare Funktionen) erfüllt. Ich habe also solcherart die Pólya'schen Sätze α) und β) von neuem bewiesen.

7. Weiter habe ich noch auf sehr kurzem Wege das folgende Resultat erhalten:

Satz IV. Es seien A, B beliebige reelle Konstanten, jedoch $B \leq 0$, und so geartet, daß die Gleichung n -ten Grades⁸⁾

$$(19) \quad P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x) = 0$$

lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ besitzt, die in das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ fallen; hier bezeichnet $P_r(x)$ das r -te Legendresche Polynom. Dann sind die zu $x_1, x_2, \dots, x_n$ gehörigen Cotesschen Zahlen des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$ positiv.

Wir wollen einige spezielle Fälle von Satz IV betrachten (in welchen die Bedingung für A und B bekanntlich erfüllt ist).

1. $A = 0, B = 0$. Dann sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$. Der Satz IV liefert, daß die Cotesschen Zahlen positiv sind. (Resultat von Gauß, Christoffel, Stieltjes usw.).

2. $A = -1, B = 0$. Dann sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) - P_{n-1}(x) = 0$. Satz IV liefert, daß die Cotesschen Zahlen positiv sind.

3. $A = 0, B = -1$. Dann sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) - P_{n-2}(x) = 0$, die mit den Wurzeln der Gleichung $(1 - x^2) P'_{n-1}(x) = 0$, oder mit den Wurzeln von $\int_x^1 P_{n-1}(t) dt = 0$ identisch

sind. Diese Punktgruppe $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist besonders merkwürdig; sie ist z. B., wie ich neuerdings bewiesen habe, unter allen möglichen, in das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ fallenden Punktgruppen $x_1, x_2, \dots, x_n$ dadurch ausgezeichnet, daß für sie das Maximum von $(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \dots$

⁸⁾ In die Untersuchung der Polynome $P_n + A P_{n-1} + B P_{n-2}$ möchte ich an anderer Stelle eingehen.

$+ (l_n(x))^2$, genommen für das Intervall $-1 \leq x \leq 1$, am kleinsten ist. (Dieser kleinste Wert des Maximums ist 1.) Satz IV besagt nun, daß auch für diese Punktgruppe die Cotesschen Zahlen positiv sind, wenn, wie hier immer, $-1 \leq x \leq 1$ das Intervall der Quadratur ist. (Resultat von R. Radau⁹⁾).

Aus dem Satz I folgt nun, daß $\lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$ auch dann stattfindet, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung (19) bezeichnen, und namentlich, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die speziellen Punktgruppen 1., 2. und 3. bezeichnen. $f(x)$ bedeutet wieder eine für $-1 \leq x \leq 1$ beschränkte und riemannisch integrierbare Funktion.

8. Die in den Nr. 6. und 7. betrachteten fünf speziellen Punktgruppen $x_1, x_2, \dots, x_n$ unter α, β), 1., 2., 3. sind durchweg Jacobische Punktgruppen, d. h. $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind die Wurzeln eines Jacobischen Polynoms. Bezeichnet nämlich $J_n(\alpha, \beta, x)$ das zu den Parameterwerten α, β gehörige Jacobische Polynom n -ten Grades in x (mit irgendeiner Normierung des von x unabhängigen konstanten Faktors), so sind die soeben betrachteten fünf Polynome

$$(20) \quad P_n(x) - P_{n-2}(x), \quad T_n(x), \quad P_n(x), \quad U_n(x), \quad P_n(x) - P_{n-1}(x),$$

der Reihe nach (von einem konstanten Faktor abgesehen) identisch mit den Jacobischen Polynomen

$$(21) \quad J_n(0, 0, x), \quad J_n\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, x\right), \quad J_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right), \quad J_n\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, x\right), \quad J_n\left(\frac{1}{2}, 0, x\right).$$

Da man die Jacobischen Polynome mit gleichen Parameterwerten $J_n(\alpha, \alpha, x)$ „ultrasphärische Polynome“ nennt, so kann ich sagen, daß die Cotesschen Zahlen für das Intervall $(-1, +1)$ positiv sind, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln von

$$(22) \quad J_n(\alpha, \alpha, x) = 0$$

sind, d. h. wenn sie eine ultrasphärische Punktgruppe bilden, falls der Parameter die speziellen Werte $\alpha = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ hat.

Folgende Frage liegt hier nahe: Ist nicht etwa für einen beliebigen, aber festen nichtnegativen Wert des ultrasphärischen Parameters α die

⁹⁾ R. Radau, Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. Journ. de Math. pures et appl., série 3 (1880), p. 283—336. Die Radausche Arbeit enthält einen interessanten mathematischen Gedanken, der scheinbar in Vergessenheit geraten ist. Ich möchte über diese Radausche Arbeit an einer anderen Stelle referieren. Hier sei nur erwähnt, daß Radau auch wertvolle numerische Tabellen für die Cotesschen Zahlen $i_k^{(n)}$ dieser Punktgruppen mitteilt. Die Positivität der Cotesschen Zahlen wird aber bei Radau nicht weiter beachtet.

Gesamtheit der Cotesschen Zahlen $\lambda_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$) nichtnegativ? Die Antwort lautet, wie mir Herr Pólya mitgeteilt hat¹⁰⁾: nein. Anschließend habe ich gezeigt, daß die Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ der Nullstellen des ultrasphärischen Polynoms $J_n(\alpha, \alpha, x)$ unbedingt teilweise negativ ausfallen, wenn

$$(23) \quad \alpha > \frac{n(n-1)}{4} \quad (n \geq 3).$$

Den Beweis dieser Behauptung teile ich hier nicht mit, weil ich zu diesem Gegenstand an anderer Stelle noch zurückkehren möchte.

9. Die in den Nr. 6. und 7. aufgezählten Resultate sind natürlich zu unterscheiden von gewissen älteren Resultaten von Heine und Stieltjes.

Es sei $p(x)$ eine gegebene, im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ nichtnegative, integrierbare Funktion von x , und

$$(24) \quad P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$$

die unendliche Folge von Polynomen, die nach dem „Gewicht“ $p(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ orthogonal ist; d. h.

$$(25) \quad \int_{-1}^{+1} p(x) P_k(x) P_l(x) dx = 0, \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots), \\ k \neq l.$$

(Wir können uns $P_n(x)$ etwa so normiert denken, daß $P_n(x) = x^n + \dots$). Bezeichnen dann $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$, die bekanntlich alle reell, voneinander verschieden sind und im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ liegen, und bezeichnen wieder $l_k(x)$ die entsprechenden Lagrangeschen Grundpolynome, so lautet die zu den Ordinaten $y_1, y_2, \dots, y_n$ gehörige Lagrangesche Interpolationsformel:

$$(26) \quad L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \dots + y_n l_n(x).$$

Die entsprechende Formel für die „gewöhnliche“ mechanische Quadratur lautet:

$$(27) \quad \int_{-1}^{+1} L(x) dx = y_1 \int_{-1}^{+1} l_1(x) dx + \dots + y_n \int_{-1}^{+1} l_n(x) dx,$$

während die „Gewichtsquadraturformel“ für die Ausrechnung von $\int_{-1}^{+1} p(x) L(x) dx$ offenbar

$$(28) \quad \int_{-1}^{+1} p(x) L(x) dx = y_1 \int_{-1}^{+1} p(x) l_1(x) dx + \dots + y_n \int_{-1}^{+1} p(x) l_n(x) dx$$

lautet.

¹⁰⁾ Brief vom 10. I. 1932.

Der bekannte allgemeine Heine-Stieltjessche Satz besagt, daß die „Cotesschen Faktoren“ dieser Gewichtsquadratur (28) alle positiv sind, d. h.

$$(29) \quad \int_{-1}^{+1} p(x) l_k(x) dx > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

[Beweis: Da die Formel (28) bei der erwähnten Abszissenwahl nicht nur für die Lagrangesche ganze rationale Funktion $L(x)$ (Gradzahl $\leq n-1$), sondern sogar für jede ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$ -tem Grade gültig ist, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach die Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ annimmt, so ergibt die Formel (28), wenn ich sie auf die ganze rationale Funktion $(l_k(x))^2$ anwende,

$$(30) \quad \int_{-1}^{+1} p(x) (l_k(x))^2 dx = \int_{-1}^{+1} p(x) l_k(x) dx,$$

womit (29) bewiesen ist].

Während nun Heine und Stieltjes bewiesen haben, daß für die betrachteten Abszissen ganz allgemein

$$(31) \quad \int_{-1}^{+1} p(x) l_k(x) dx > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gültig ist, habe ich, allerdings nur in gewissen speziellen Fällen, bewiesen, daß

$$(32) \quad \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

stattfindet.

Zum Beispiel für Tschebyscheffschen Abszissen lautet (31):

$$(33) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{l_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

während mein Satz II die Feststellung

$$(34) \quad \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

enthält.

§ 1.

Beweis des Satzes, daß die Cotesschen Zahlen der mechanischen Quadratur für das Intervall $(-1, +1)$ im Falle Tschebyscheffscher Abszissen positiv sind.

1. In diesem Paragraph werde ich beweisen, daß die Cotesschen Zahlen für das Intervall $-1 \leq x \leq +1$ positiv sind, wenn die Grundpunkte $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Tschebyscheffschen sind.

Jetzt ist, wenn wir

$$(1) \quad \theta_s = (2s-1) \frac{\pi}{2n}, \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

setzen,

$$(2) \quad x_s = \cos \theta_s, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Die Formel, die ich für das zur Stelle $x_k = \cos \theta_k$ gehörige Grundpolynom $l_k(x)$ der Lagrangeschen Interpolation hier benutze, lautet¹¹⁾

$$(3) \quad l_k(x) = l_k(\cos \theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \cos r \theta_k \cos r \theta \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Nach (3) ist jetzt

$$\begin{aligned} (4) \quad \lambda_k &= \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx = \int_0^{\pi} l_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \sin \theta \cos r \theta d\theta \right) \cos r \theta_k \right\} \\ &= \frac{\pi}{n} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta + \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \cos r \theta d\theta \right) \cos r \theta_k \right\}. \end{aligned}$$

Entwickle ich also die Funktion $\sin \theta$ in eine Fouriersche Cosinusreihe

$$(5) \quad \sin \theta = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \cos 2\theta + \dots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)\theta + \dots,$$

und bezeichne ich die Partialsumme mit dem Index $n-1$ dieser Cosinusreihe mit $s_{n-1}(\theta)$, d. h.

$$(6) \quad s_{n-1}(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \cos 2\theta + \dots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)\theta,$$

so ist nach (4)

$$(7) \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n} s_{n-1}(\theta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Aus dieser merkwürdigen Formel für die Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ der mechanischen Quadratur, wenn die Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$

¹¹⁾ Diese Formel habe ich zuerst in meiner Arbeit „Die Abschätzung eines Polynoms usw.“ [Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 426–457] angegeben; siehe S. 442, Formel (ε). Vgl. auch L. Fejér, „Bestimmung derjenigen Abszissen usw.“, Ann. della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 1 (1932), S. 263–276. S. i. die Nr. 8. Übrigens kann man natürlich durch einfache Rechnung leicht verifizieren, daß

$$l_k(x_k) = l_k(\cos \theta_k) = 1,$$

während

$$l_k(x_j) = l_k(\cos \theta_j) = 0$$

ist für

$$j = 1, 2, \dots, (k-1), (k+1), \dots, n.$$

die Tschebyscheffschen sind, folgt unmittelbar, daß die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positiv sind. Ich behaupte nämlich: Die Partialsummen der Fourierschen Cosinusreihe von $\sin \theta$ unter (5) sind sämtlich positiv, und zwar für jeden reellen Wert von θ . Die Reihe (5) lautet nämlich, nach Ausrechnung ihrer Koeffizienten nach der Fourierschen Formel:

$$(8) \quad \sin \theta = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) \cos 2 \theta + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \cos 4 \theta + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right) \cos 2\nu \theta + \dots \right] \right\}.$$

Also lautet irgendeine Partialsumme $s(\theta)$ dieser Reihe:

$$(9) \quad s(\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) \cos 2 \theta + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \cos 4 \theta + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right) \cos 2\nu \theta \right] \right\},$$

so daß also

$$(10) \quad s(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right) \right] \right\} \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\nu+1} > 0.$$

Hiermit ist aber die Positivität der Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bei Tschebyscheffschen Abszissen schon bewiesen.

2. Übrigens führt die Formel (7) leicht zu einer genaueren beiderseitigen Abschätzung von $\lambda_k^{(n)}$ und auch zu einer asymptotischen Formel für $\lambda_k^{(n)}$.

Es sei $g = 2h$ die größte gerade Zahl, die $\leq n-1$ ist¹²⁾. Dann ergibt die Formel (7)

$$(11) \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n} s_g(\theta_k).$$

Nach (10) ist also

$$(12) \quad \lambda_k \geq \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{n} \frac{1}{2h+1} \geq \frac{2}{n^2}.$$

Weiter ist nach (8)

$$(13) \quad \sin \theta = s_g(\theta) + r_g(\theta),$$

wo

$$(14) \quad s_g(\theta) = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^h \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right) \cos 2\nu \theta \right\},$$

$$(15) \quad r_g(\theta) = -\frac{2}{\pi} \sum_{\nu=h+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1} \right) \cos 2\nu \theta.$$

¹²⁾ Da $n = 1, 2$ kein Interesse hat, kann $n \geq 3$ angenommen werden.

(14) ergibt nun

$$\begin{aligned}
 (16) \quad |s_g(\theta)| = s_g(\theta) &\leq \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{v=1}^h \left(\frac{1}{2^{v-1}} - \frac{1}{2^{v+1}} \right) \right\} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 1 - \frac{1}{2^{h+1}} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ 2 - \frac{1}{2^{h+1}} \right\} < \frac{4}{\pi},
 \end{aligned}$$

und (15)

$$\begin{aligned}
 (17) \quad |r_g(\theta)| &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{v=h+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{v-1}} - \frac{1}{2^{v+1}} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2^{h+1}} \\
 &\leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{n-1}.
 \end{aligned}$$

Aus (11) und (16) folgt aber

$$(18) \quad \lambda_k \leq \frac{\pi}{n} \frac{4}{\pi} = \frac{4}{n},$$

aus (11), (13) und (17)

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \lambda_k &= \frac{\pi}{n} \sin \theta_k - \frac{\pi}{n} r_g(\theta_k) \\
 &= \frac{\pi}{n} \sin \theta_k + \frac{\pi}{n} \varrho_n \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{n-1} \\
 &= \frac{\pi}{n} \sin \theta_k + \frac{2 \varrho_n}{n(n-1)},
 \end{aligned}$$

wo

$$(20) \quad |\varrho_n| \leq 1.$$

Ich habe also für die Cotesschen Zahlen $\lambda_k^{(n)}$ bei Tschebyscheffschen Abszissen die Abschätzungen

$$(21) \quad \frac{2}{n^2} \leq \lambda_k^{(n)} \leq \frac{4}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, 3, \dots),$$

und die asymptotische Formel

$$(22) \quad \lambda_k^{(n)} = \frac{\pi}{n} \sin \theta_k^{(n)} + \frac{2 \varrho_k^{(n)}}{n(n-1)},$$

$$\theta_k^{(n)} = (2k-1) \frac{\pi}{2n}, \quad |\varrho_k^{(n)}| \leq 1$$

$$(k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 3, 4, 5, \dots)$$

erhalten.

§ 2.

Beweis des Satzes, daß die Cotesschen Zahlen der mechanischen Quadratur für das Intervall $(-1, +1)$ positiv sind, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$U_n(x) = 0 \text{ sind, wo } U_n(x) = U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

1. Im folgenden werde ich beweisen, daß die Cotesschen Zahlen für das Intervall $(-1, +1)$ auch für die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad U_n(x) = U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = 0$$

positiv sind.

Wenn jetzt

$$(2) \quad \theta_s = s \frac{\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

gesetzt wird, so sind die Wurzeln von (1)

$$(3) \quad x_s = \cos \theta_s, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Es bezeichne $l_k(x)$ das zu x_k gehörige Lagrangesche Grundpolynom. Dann ist

$$(4) \quad \lambda_k = \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx = \int_0^\pi l_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Da $l_k(x)$ eine ganze rationale Funktion von $(n-1)$ -tem Grade von x ist, so ist $l_k(\cos \theta)$ ein trigonometrisches Cosinuspolynom $(n-1)$ -ter Ordnung von θ . Also ist $l_k(\cos \theta) \sin \theta$ ein Sinuspolynom n -ter Ordnung von θ . Es ist also, wenn ich in abgekürzter Bezeichnung

$$(5) \quad l_k(\cos \theta) \sin \theta = \varphi(\theta)$$

setze,

$$(6) \quad \varphi(\theta) = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \sin 2\theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta.$$

Aus (4), (5) und (6) folgt:

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda_k &= \int_0^\pi \varphi(\theta) d\theta = \int_0^\pi (\alpha_1 \sin \theta + \dots + \alpha_n \sin n\theta) d\theta \\ &= 2 \left(\frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_3}{3} + \frac{\alpha_5}{5} + \dots + \frac{\alpha_l}{l} \right), \end{aligned}$$

wo l die größte ungerade Zahl bezeichnet, die $\leq n$ ist.

Nun gilt für ein Sinuspolynom wie (6), ganz allgemein, die folgende Koeffizientenbestimmung¹³⁾:

$$(8) \quad \alpha_\nu = \frac{2}{n+1} \sum_{r=1}^n \varphi(\theta_r) \sin \nu \theta_r, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

¹³⁾ S. L. Tonelli, Serie Trigonometriche (Bologna 1928), S. 146.

(wo immer

$$(9) \quad \theta_s = s \frac{\pi}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n).$$

Für unser Sinuspolynom unter (5) (und (6)) ist aber

$$\varphi(\theta_k) = l_k (\cos \theta_k) \sin \theta_k = \sin \theta_k,$$

während $\varphi(\theta_r)$, für $r = 1, 2, \dots, (k-1), (k+1), \dots, n$, gleich 0 ist. Also erhalten wir in unserem Spezialfall, auf Grund von (8),

$$(10) \quad \alpha_v = \frac{2}{n+1} \sin \theta_k \sin v \theta_k = \frac{1}{n+1} [\cos (v-1) \theta_k - \cos (v+1) \theta_k],$$

$v = 1, 2, \dots, n.$

Nach (7) und (10) ist also

$$(11) \quad \lambda_k = \frac{2}{n+1} \left(\frac{\cos 0 \cdot \theta_k - \cos 2 \theta_k}{1} + \frac{\cos 2 \theta_k - \cos 4 \theta_k}{3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\cos (l-1) \theta_k - \cos (l+1) \theta_k}{l} \right),$$

so daß ich also jetzt für die Cotessche Zahl λ_k die folgende Formel erhalte:

$$(12) \quad \lambda_k = \frac{2}{n+1} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) \cos 2 \theta_k + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \cos 4 \theta_k + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{l-2} - \frac{1}{l} \right) \cos (l-1) \theta_k + \frac{1}{l} \cos (l+1) \theta_k \right] \right\},$$

wo, ich wiederhole es, l die größte ungerade Zahl bedeutet, die $\leq n$ ist. Aus (12) folgt aber

$$(13) \quad \lambda_k \geq \frac{2}{n+1} \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{l-2} - \frac{1}{l} \right) + \frac{1}{l} \right] \right\} = 0,$$

d. h.

$$(14) \quad \lambda_k \geq 0.$$

Die Cotesschen Zahlen sind also nichtnegativ¹⁴⁾.

Da übrigens $\cos 2 \theta_k = \cos 2 \cdot k \frac{\pi}{n+1} = \cos \frac{k}{n+1} \cdot 2\pi$ niemals gleich $+1$ ist, da doch k nur die Werte $1, 2, \dots, n$ haben kann, so kann also in der Ungleichung (13) das Gleichheitszeichen niemals gültig sein.

Ich habe also bewiesen, daß die Cotesschen Zahlen für die Wurzeln der Gleichung $U_n(x) = U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = 0$ positiv sind.

¹⁴⁾ Der Beweis wäre noch kürzer ausgefallen, wenn ich von der jetzt gültigen, und leicht verifizierbaren Formel für die Grundfunktion $l_k(x) = l_k(\cos \theta)$

$$l_k(\cos \theta) = \frac{2}{n+1} \sum_{r=1}^n \sin \theta_k \sin r \theta_k \frac{\sin r \theta}{\sin \theta}, \quad \theta_s = s \frac{\pi}{n+1}$$

hätte ausgehen wollen. Diese Formel entspricht der Formel § 1, (3), die im Tschebyscheffschem Falle gültig ist.

§ 3.

Die Cotesschen Zahlen für das Intervall $(-1, +1)$ sind positiv, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln von $P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x) = 0$ bezeichnen, falls die reellen Konstanten A, B gewissen Bedingungen genügen.

Es seien A und B reelle Konstanten, für welche die rationale ganze Funktion n -ten Grades

$$(1) \quad \omega(x) = P_n(x) + A P_{n-1}(x) + B P_{n-2}(x)$$

n voneinander verschiedene reelle Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ besitzt, die alle in das abgeschlossene Intervall $-1 \leq x \leq 1$ fallen. Hier bezeichnet $P_r(x)$ das r -te Legendresche Polynom. Ich behaupte, daß die zu den Grundpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ gehörigen Cotesschen Zahlen für das Intervall $(-1, +1)$ positiv sind, falls $B \leq 0$ ist. D. h., wenn wieder $l_k(x)$ das zu x_k gehörige Langrangesche Grundpolynom bezeichnet, so ist

$$(2) \quad \lambda_k = \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Ist speziell $A = B = 0$, so ist $\omega(x) = P_n(x)$, und ich habe schon in der Fußnote ²⁾ erwähnt, daß in diesem Spezialfall $\int_{-1}^{+1} l_k(x) dx > 0$ dadurch in Evidenz tritt, daß jetzt

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx = \int_{-1}^{+1} (l_k(x))^2 dx$$

ist, d. h.

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} [(l_k(x))^3 - l_k(x)] dx = 0.$$

Untersuchen wir nun das Integral in (4) im allgemeineren Falle (1).

Da sowohl $l_k(x)$ als $(l_k(x))^2$ an der Stelle x_k gleich 1 ist, beide aber an den übrigen Interpolationsstellen $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ verschwinden, so verschwindet die ganze rationale Funktion von genau $(2n-2)$ -tem Grade

$$(5) \quad (l_k(x))^2 - l_k(x)$$

an allen Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Es ist also

$$(6) \quad (l_k(x))^2 - l_k(x) = g(x) \omega(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion von genau $(n-2)$ -tem Grade bezeichnet, die also nach Legendreschen Polynomen geordnet die Form

$$(7) \quad g(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \dots + c_{n-2} P_{n-2}(x)$$

hat. Aus (1), (6), (7) folgt, daß

$$(8) \quad (l_k(x))^2 - l_k(x) \\ = [c_0 P_0(x) + \dots + c_{n-2} P_{n-2}(x)] [B P_{n-2}(x) + A P_{n-1}(x) + P_n(x)].$$

Über die Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ von $g(x)$ habe ich nur eine einzige Bemerkung zu machen, nämlich die, daß der Koeffizient $c_{n-2} > 0$ ist. Da nämlich auf der linken Seite von (8) eine ganze rationale Funktion von x steht, in welcher der Koeffizient der höchsten Potenz x^{2n-2} augenscheinlich positiv ist, und da auf der rechten Seite von (8) der zweite Faktor ebenfalls einen positiven höchsten Koeffizienten besitzt [der Koeffizient von x^n in $P_n(x)$ ist positiv], so muß also auch $c_{n-2} > 0$ sein.

Mit Rücksicht auf die Orthogonalität der Legendreschen Polynome i. B. auf das Intervall $(-1, +1)$ erhalte ich aber aus (8)

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} [(l_k(x))^2 - l_k(x)] dx = c_{n-2} B \int_{-1}^{+1} (P_{n-2}(x))^2 dx.$$

Da $c_{n-2} > 0$, so ist, wenn $B \leq 0$ vorausgesetzt wird,

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} [(l_k(x))^2 - l_k(x)] dx \leq 0,$$

d. h.

$$(11) \quad \int_{-1}^{+1} l_k(x) dx \geq \int_{-1}^{+1} (l_k(x))^2 dx > 0,$$

w. z. b. w.

§ 4.

Beweis des Satzes, daß $\lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$ ist, wenn sämtliche

Cotessche Zahlen nichtnegativ sind, und $f(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

1. In diesem Paragraphen will ich den Satz I beweisen, der besagt, daß der Wert

$$(1) \quad Q_n[f] = f(x_1^{(n)}) \lambda_1^{(n)} + f(x_2^{(n)}) \lambda_2^{(n)} + \dots + f(x_n^{(n)}) \lambda_n^{(n)}$$

der mechanischen Quadratur für das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ bei dem n -ten Schritte zu $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ konvergiert, wenn $n \rightarrow \infty$, d. h.

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

wenn die Cotesschen Zahlen $\lambda_k^{(n)}$, ($k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$) alle nichtnegativ sind. Hier bedeutet $f(x)$ eine beliebige, im Intervall der

Quadratur $-1 \leq x \leq 1$ definierte Funktion von x , die in diesem Intervall beschränkt und im Riemannschen Sinne integrierbar ist. Der Beweis wird in fünf Schritten geführt.

I. Fall: $f(x)$ ist eine beliebige ganze rationale Funktion von x , etwa vom Grade ν . Dann ist der Satz auch ohne irgendwelche Einschränkungen i. B. auf die Cotesschen Zahlen $\lambda_k^{(n)}$ richtig. Tatsächlich ist in diesem Falle, wenn nur $n \geq \nu + 1$ ist,

$$(3) \quad L_n(x) = f(x),$$

also ist

$$(4) \quad Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} L_n(x) dx = \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

womit die Limesgleichung (2) in Evidenz gesetzt ist.

II. Fall: $f(x)$ ist eine beliebige, im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ überall stetige Funktion. Ist δ eine beliebige kleine feste positive GröÙe, so läÙt sich, nach Weierstrass, eine ganze rationale Funktion $g(x)$ derart angeben, daÙ

$$(5) \quad f(x) = g(x) + \varepsilon(x)$$

mit

$$(6) \quad |\varepsilon(x)| \leq \delta \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1$$

stattfindet.

Nun besitzt aber der Quadraturwert $Q_n[f]$, ganz allgemein die folgende Eigenschaft:

Wenn $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei beliebige Funktionen bezeichnen, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ beschränkt sind, so ist

$$(7) \quad Q_n[f_1 + f_2] = Q_n[f_1] + Q_n[f_2].$$

Dies folgt unmittelbar aus (1).

Also ist, mit Rücksicht auf (5),

$$(8) \quad Q_n[f] = Q_n[g] + Q_n[\varepsilon].$$

Sind nun die Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nichtnegativ, so besitzt Q_n noch die folgende Eigenschaft:

Ist für die Funktion $F(x)$

$$(9) \quad |F(x)| \leq M \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1,$$

so ist

$$(10) \quad |Q_n[F]| \leq 2M.$$

Nach (1) ist nämlich

$$(11) \quad |Q_n[F]| \leq M \sum_{k=1}^n |\lambda_k|,$$

da aber jetzt

$$(12) \quad \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = \sum_{k=1}^n \lambda_k = 2,$$

so ist (10) schon erwiesen.

Aus (8) folgt nun, mit Rücksicht auf (6) und (10), und mit Rücksicht auf

$$(13) \quad \lim_{n=\infty} Q_n[g] = \int_{-1}^{+1} g(x) dx,$$

daß die Unbestimmtheitsgrenzen von $Q_n[f]$ für $n = \infty$ zwischen

$$(14) \quad \int_{-1}^{+1} g(x) dx - 2\delta \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} g(x) dx + 2\delta$$

liegen. Da aber, wegen (5) und (6), $\int_{-1}^{+1} g(x) dx$ zwischen

$$(15) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx - 2\delta \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx + 2\delta$$

liegt, so sind die Unbestimmtheitsgrenzen von $Q_n[f]$ für $n = \infty$ zwischen die Grenzen

$$(16) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx - 4\delta \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx + 4\delta$$

eingeschlossen. Da aber δ beliebig klein ist, so ist

$$(17) \quad \lim_{n=\infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$$

bewiesen.

III. Fall:

$$(18) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < a, \\ 1 & \text{für } a \leq x < b, \\ 0 & \text{für } b \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ich schicke die folgende Eigenschaft von $Q_n[f]$ voraus:

Sind die Cotesschen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nichtnegativ, so ist

$$(19) \quad Q_n[f_1] \geq Q_n[f_2],$$

falls im ganzen Intervall $-1 \leq x \leq 1$

$$(20) \quad f_1(x) \geq f_2(x)$$

gültig ist.

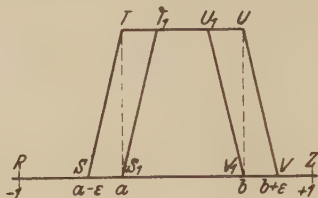
Nach (1) ist nämlich dann

$$(21) \quad Q_n[f_1] - Q_n[f_2] = \sum_{k=1}^n [f_1(x_k) - f_2(x_k)] \lambda_k \geq 0.$$

Man betrachte nun die sechs Punkte mit den Koordinaten

$$(22) \quad \begin{array}{lll} R(-1, 0), & S(a - \varepsilon, 0), & T(a, 1), \\ U(b, 1), & V(b + \varepsilon, 0), & Z(1, 0), \end{array}$$

wo ε eine (genügend kleine) sonst willkürliche positive GröÙe bezeichnet.



Durch geradlinige Verbindungen entsteht dann der Polygonzug $RSTUVZ$. Die durch diesen definierte, im Intervall überall stetige Funktion von x , bezeichne ich mit $\varphi(x)$. Es ist augenscheinlich

$$(23) \quad \varphi(x) \geq f(x) \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1.$$

Andererseits verbinde ich nacheinander geradlinig die sechs Punkte

$$(24) \quad \begin{array}{lll} R(-1, 0), & S_1(a, 0), & T_1(a + \varepsilon, 1), \\ U_1(b - \varepsilon, 1), & V_1(b, 0), & Z(1, 0). \end{array}$$

Ich erhalte so den Polygonzug $RS_1T_1U_1V_1Z$, der eine für $-1 \leq x \leq 1$ überall stetige Funktion $\psi(x)$ definiert. Es ist augenscheinlich

$$(25) \quad f(x) \geq \psi(x) \quad \text{für } -1 \leq x \leq 1.$$

Da aber laut (23) und (25)

$$(26) \quad \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x),$$

so ist, mit Rücksicht auf (19),

$$(27) \quad Q_n[\psi] \leq Q_n[f] \leq Q_n[\varphi].$$

Gehen wir in dieser Ungleichung zur Grenze $n = \infty$ über, so erhalten wir (mit Rücksicht darauf, daß die Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ stetig sind), daß die zwei Unbestimmtheitsgrenzen von $Q_n[f]$ zwischen den Werten

$$(28) \quad \int_{-1}^{+1} \psi(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx$$

liegen, d. h. zwischen

$$(29) \quad b - a - \varepsilon \quad \text{und} \quad b - a + \varepsilon.$$

Da aber ε beliebig klein angenommen werden kann, so ist also in unserem III. Falle tatsächlich

$$(30) \quad \lim_{n=\infty} Q_n[f] = b - a = \int_{-1}^{+1} f(x) dx.$$

IV. Fall: $y = f(x)$ besteht, im Intervall $-1 \leq x \leq 1$, aus einer endlichen Anzahl von Konstantenzügen. Dieser Fall läßt sich unmittelbar auf den III. Fall zurückführen.

V. Fall: $f(x)$ ist eine im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ beliebige beschränkte, und im Sinne von Riemann integrierbare Funktion.

Es sei das Intervall $(-1, +1)$ durch die Punkte

$$(31) \quad -1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{v-1} < a_v = 1$$

beliebig in v Teilintervalle zerlegt. Es sei M_r die Weierstrasssche obere Grenze, m_r die untere Grenze von $f(x)$ im Intervall $a_{r-1} \leq x \leq a_r$, $r = 1, 2, \dots, v$. Es sei nun

$$(32) \quad \varphi(x) = M_r, \quad \text{für } a_{r-1} \leq x < a_r; \quad r = 1, 2, \dots, v,$$

und

$$(33) \quad \psi(x) = m_r, \quad \text{für } a_{r-1} \leq x < a_r; \quad r = 1, 2, \dots, v,$$

und endlich

$$\varphi(a_v) = \varphi(1) = M_v, \quad \psi(a_v) = \psi(1) = m_v.$$

Dann ist

$$(34) \quad \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x),$$

also

$$(35) \quad Q_n[\psi] \leq Q_n[f] \leq Q_n[\varphi].$$

Für $n = \infty$ konvergiert $Q_n[\psi]$ zu $\int_{-1}^{+1} \psi(x) dx$, d. h. zur unteren Dar-

bouxschen Summe der Funktion $f(x)$ i. B. auf die Einteilung (31), und $Q_n[\varphi]$ zur oberen Darbouxschen Rechtecksumme derselben Einteilung. Da aber die Einteilung (31) beliebig ist, so habe ich erhalten, daß die Unbestimmtheitsgrenzen für $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f]$ für eine beliebige beschränkte Funktion $f(x)$ zwischen dem unteren und oberen Darbouxschen Integral von $f(x)$ liegen.

Ist also speziell $f(x)$ riemannisch integrierbar, dann ist

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

w. z. b. w.

§ 5.

Sind die Cotesschen Zahlen für die Folge der Punktgruppen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ des Intervalls nichtnegativ, so liegen die Punkte im Intervall überall dicht, und die Cotesschen Zahlen konvergieren zu Null.

1. Es sei $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) eine beliebige unendliche Folge von Punktgruppen des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$, deren Cotessche Zahlen $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) alle nichtnegativ sind. Dann bestehen die folgenden zwei Sätze:

1. Die Grundpunkte $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ bedecken das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ überall dicht, d. h. wenn das Intervall $i: \alpha \leq x \leq \beta$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ gelegen ist, so fällt mindestens einer der Punkte $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ in das Intervall i , wenn nur $n > N$ ist.

2. Der größte der n Grundfaktoren $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ konvergiert zu Null, wenn $n \rightarrow \infty$.

2. Beweis von 1. Wenn 1. nicht richtig wäre, so hätte man eine unendliche Folge von Indizes

$$(1) \quad n = n_1, n_2, \dots, n_\nu \dots,$$

so daß für diese Werte des Index n keiner der Punkte $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ in das Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ fallen würde. Es sei nun die Funktion $f(x)$ durch

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < \alpha, \\ 1 & \text{für } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 & \text{für } \beta < x \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Dann ist $Q_{n_\nu}[f] = 0$, und also $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Q_{n_\nu}[f] = 0$, während nach

dem Konvergenzsatz von § 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n[f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \beta - \alpha$ ist. Widerspruch.

3. Beweis von 2. Wäre 2. nicht richtig, so hätte man eine unendliche Folge von Indizes $n = n_1, n_2, \dots, n_\nu, \dots$, so daß für alle diese Werte von n mindestens eine der Cotesschen Zahlen $\lambda_1^{(n_\nu)}, \lambda_2^{(n_\nu)}, \dots, \lambda_{n_\nu}^{(n_\nu)}$ größer wäre als eine positive Größe p . Es sei etwa $x_{k_\nu}^{(n_\nu)}$ eine von den Stellen $x_1^{(n_\nu)}, x_2^{(n_\nu)}, \dots, x_{n_\nu}^{(n_\nu)}$ der n_ν -ten Gruppe, für welche $\lambda_{k_\nu}^{(n_\nu)} > p$ ist. Es sei weiter c einer der Grenzwerte der unendlichen, im Intervall $-1 \leq x \leq +1$ liegenden unendlichen Zahlenfolge $x_{k_\nu}^{(n_\nu)}$, ($\nu = 1, 2, 3, \dots$). Es liege c etwa im Innern des Intervalls $(-1, +1)$, so daß also, wenn nur ε gehörig klein ist, auch das Intervall $c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$ im Innern von $(-1, +1)$ liegt. Wir wählen ε demgemäß, unterwerfen es aber noch der Ungleichung

$$(3) \quad \varepsilon \leq \frac{p}{4}.$$

Nachdem wir ε derart fixiert haben, definieren wir die Funktion $f(x)$ durch

$$(4) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < c - \varepsilon, \\ 1 & \text{für } c - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon, \\ 0 & \text{für } c + \varepsilon < x \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist sicher

$$(5) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup. Q_{n_\nu} [f] \geq 1 \cdot p = p.$$

Da aber nach dem Konvergenzsatz von § 4

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n [f] = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2\varepsilon,$$

so liefert (5) und (6)

$$(7) \quad 2\varepsilon \geq p,$$

$$(8) \quad \varepsilon \geq \frac{p}{2},$$

während nach (3) $\varepsilon \leq \frac{p}{4}$ ist. Widerspruch.

Wenn $c = 1$ wäre, so betrachten wir das Intervall $(1 - \varepsilon, 1)$, und wenn $c = -1$ wäre, ein Intervall $(-1, -1 + \varepsilon)$, und gelangen durch die vorige Schlußweise zum Widerspruch.

Budapest, den 18. Mai 1932.

(Eingegangen am 15. Juni 1932.)

Maximalteiler und Regularitätshüllen.

Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Carathéodory *).

Von

H. Behnke und P. Thullen in Münster (Westf.)

Zur Untersuchung der eindeutigen und analytischen Abbildungen im Raume R_{2n} der n komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \dots, z_n$ führt Carathéodory in seiner Arbeit: „Über die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden“ *) den Begriff des *Maximalteilers* ein:

„Es sei G ein beschränktes Gebiet, das den Anfangspunkt 0 der Koordinaten als inneren Punkt enthält, und B' ein Teilgebiet von G , das dieselbe Eigenschaft besitzt. Das Gebiet B' heißt ein *Maximalteiler* von G , wenn jede analytische Transformation S mit dem Fixpunkt 0 , die B' topologisch auf ein Teilgebiet von G abbildet, im Punkte 0 eine Funktionaldeterminante besitzt, deren Absolutbetrag nie größer als Eins ist¹⁾“.

Es gilt der Satz, daß zu jedem beliebigen beschränkten Bereiche B ein Maximalteiler B' des Grundbereiches G existiert, auf den sich B eindeutig und analytisch abbilden läßt. Um ein „vollständiges Repräsentantensystem“ der beschränkten Bereiche des R_{2n} zu gewinnen, kommt es also nach Carathéodory darauf an, ein vollständiges System der Maximalteiler eines (beliebigen) Grundbereiches — etwa des Polyzylinders $|z_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — aufzustellen.

Wir wollen nun zeigen, wie man aus der Theorie der Regularitätshüllen²⁾ unmittelbar einige interessante Aussagen über die Maximalteiler

*) Vgl. Carathéodory. Über die Abbildungen, die durch Systeme ... Math. Zeitschr. **34** (1932), S. 758—792.

¹⁾ Vgl. *), S. 788. Man beachte, daß die Eigenschaft eines Bereiches B' , Maximalteiler von G zu sein, von der Wahl des Bezugspunktes 0 abhängig ist.

²⁾ Zum folgenden vgl. (a) P. Thullen, Die Regularitätshüllen, Math. Ann. **106** (1932), S. 64—76, (b) H. Cartan und P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen **106** (1932), S. 617—647.

ableiten kann; es gelingt insbesondere, zu einem vorgegebenen Regularitätsbereich eine ganze Klasse von Maximalteilern anzugeben.

Hierzu beweisen wir den Satz:

Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ ein Maximalteiler des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$, so ist jeder Bereich $\mathfrak{B}_0$, der die gleiche Regularitätshülle wie $\mathfrak{B}$ besitzt und 0 als inneren Punkt enthält, ebenfalls ein Maximalteiler von $\mathfrak{R}$.

Beweis. Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ die Regularitätshülle von $\mathfrak{B}$; da $\mathfrak{B} < \mathfrak{H}(\mathfrak{B}) < \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ nach Voraussetzung ein Maximalteiler ist, ist notwendig auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ein Maximalteiler von $\mathfrak{R}$ ³⁾.

Die Transformation S mit dem Fixpunkt 0 bilde den Bereich $\mathfrak{B}_0$ auf einen Bereich $\mathfrak{B}'_0 < \mathfrak{R}$ ab. Durch S wird $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}) \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_0)$ in $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}'_0)$ transformiert⁴⁾. Da $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}'_0) < \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ein Maximalteiler von $\mathfrak{R}$ ist, kann der Absolutbetrag der Funktionaldeterminante von S in 0 höchstens gleich Eins sein, w. z. bw. w.

Setzt man voraus, daß $\mathfrak{B}$ selbst ein Regularitätsbereich ist — also $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ —, so folgt unmittelbar:

Ist der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}_0$ ein Maximalteiler des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$, so ist jeder Bereich $\mathfrak{B}$, der $\mathfrak{R}_0$ zur Regularitätshülle hat und 0 als inneren Punkt enthält, gleichfalls ein Maximalteiler von $\mathfrak{R}$.

Verlangt man nun noch, daß $\mathfrak{R}_0$ mit dem Grundbereiche $\mathfrak{R}$ identisch ist, so ergibt sich als wichtigste Folgerung:

Jeder Bereich ist Maximalteiler seiner Regularitätshülle.

Es ist also jetzt leicht, zu einem gegebenen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}$ eine ganze Klasse von Maximalteilern anzugeben — nämlich sämtliche Bereiche, die $\mathfrak{R}$ zur Regularitätshülle haben und den Bezugspunkt 0 als inneren Punkt enthalten. Wir wollen solche Bereiche *triviale Maximalteiler* des Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ nennen. Nur falls $\mathfrak{R}$ keine echte Regularitätshülle⁵⁾ ist, besitzt $\mathfrak{R}$ (außer sich selbst) keine trivialen Maximalteiler.

Ein trivialer Maximalteiler $\mathfrak{B}$ besitzt die wichtige Eigenschaft, daß er bei beliebiger Wahl eines anderen Bezugspunktes $0'$ (der noch im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt) Maximalteiler des Grundbereiches $\mathfrak{R}$ in bezug auf den neuen Bezugspunkt $0'$ bleibt; der Bereich $\mathfrak{B}$ hat ferner die Eigenschaft, daß er bei einer eindeutigen und analytischen Transformation des Grundbereiches $\mathfrak{R}$ auf einen Bereich $\mathfrak{R}'$ in einen (trivialen) Maximalteiler $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{R}'$ übergeht — als Bezugspunkt von $\mathfrak{R}'$ wähle man einen beliebigen im Innern von $\mathfrak{B}'$ liegenden Punkt.

³⁾ Vgl. *), S. 788.

⁴⁾ Vgl. ³⁾, (b), Satz 3.

⁵⁾ Vgl. ³⁾, (b), S. 643.

Man beachte, daß diese Aussage keineswegs für beliebige Maximalteiler bewiesen ist. Vielleicht wird im allgemeinen Falle bei einer Transformation des Grundbereiches ein Maximalteiler nur dann wieder in einen Maximalteiler übergehen, falls man als Bezugspunkt des Bildbereiches den Bildpunkt von 0 wählt.

Im Zusammenhang mit dem zu Anfang bewiesenen Satze sei auch noch auf folgende Frage aufmerksam gemacht:

$\mathfrak{B}$ sei ein Maximalteiler des Bereiches $\mathfrak{G}$; ist dann stets auch die Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ ein Maximalteiler der Regularitätshülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ des Grundbereiches $\mathfrak{G}$? Ist $\mathfrak{G}$ ein Regularitätsbereich, so ist die Lösung trivial; in diesem Falle gilt nämlich $\mathfrak{B} < \mathfrak{H}(\mathfrak{B}) < \mathfrak{G}$, woraus unmittelbar folgt, daß auch $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ ein Maximalteiler von $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ sein muß.

Anwendung auf die Maximalteiler des Dizylinders $|w| < 1$, $|z| < 1$. Beispiele trivialer Maximalteiler des Dizylinders sind etwa sämtliche Bereiche, die eine stetige dreidimensionale Hyperfläche der Form $g(|w|, |z|) = 0$ mit $g(0, 0) = 0$ und $\lim_{|w|, |z| \rightarrow 1} g(|w|, |z|) = 0$ im Innern enthalten⁶⁾.

Hieraus ergibt sich zugleich, daß der Durchschnitt der inneren Punkte sämtlicher Maximalteiler des Dizylinders *nur* aus dem Bezugspunkte 0 besteht.

Zwei triviale Maximalteiler des Dizylinders lassen sich nullpunktstreu höchstens durch die triviale Transformation $w' = w e^{i\vartheta}$, $z' = z e^{i\varphi}$ aufeinander abbilden; es ist nämlich jede Transformation zweier trivialer Maximalteiler aufeinander eine mittelpunktstreu Selbsttransformation des Dizylinders, also von der obigen Form.

Erwähnt sei, daß jeder triviale Maximalteiler des Dizylinders ein (nicht trivialer) Maximalteiler der umschriebenen Hyperkugel ist (dies folgt aus dem zu Anfang bewiesenen Satze und der Tatsache, daß der Dizylinder ein Maximalteiler der Hyperkugel ist⁷⁾).

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die oben bewiesenen Sätze sich nicht auf *Nebenhüllen*⁸⁾ übertragen lassen; es gibt nämlich Bereiche, die keine Maximalteiler ihrer Nebenhüllen sind. Als Beispiel sei der Regularitätsbereich

$$(\mathfrak{B}) \quad |w| < 1, \quad |z| < |w|$$

⁶⁾ Vgl. ²⁾, (a), Satz 10.

⁷⁾ Vgl. ^{*}), S. 792.

⁸⁾ Vgl. H. Behnke und P. Thullen, Die Nebenhüllen. Erscheint zur Zeit in den Math. Annalen. Die Nebenhülle eines Bereiches $\mathfrak{B}$ ist als Durchschnitt aller $\mathfrak{B}$ ganz umfassenden Regularitätsbereiche definiert, während die Regularitätshülle bekanntlich mit dem Durchschnitt aller umfassenden Regularitätsbereiche identisch ist.

genannt. Die zugehörige Nebenhülle ist der Dizylinder $|w| < 1, |z| < 1$. Die Transformation

$$(S) \quad w' = w, \quad z' = \frac{z}{w}$$

bildet $\mathfrak{B}$ eineindeutig und analytisch auf den (im Innern des Dizylinders liegenden) Bereich

$$(\mathfrak{B}') \quad |w'| < 1, \quad |z'| < 1, \quad w' \neq 0$$

ab; hierbei hat die Funktionaldeterminante der Abbildung den Wert $\frac{1}{w}$, besitzt daher in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ — insbesondere also in den Fixpunkten $(w, 0), |w| < 1$ — einen Absolutbetrag, der größer ist als Eins. $\mathfrak{B}$ kann somit unmöglich ein Maximalteiler seiner Nebenhülle sein.

(Eingegangen am 1. August 1932.)

**Bemerkungen zu der M.-P. Geppertschen Abhandlung
„Approximative Darstellungen analytischer Funktionen,
die durch Dirichletsche Reihen gegeben sind“
im Bd. 35 dieser Zeitschrift, S. 190—211.**

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Nachdem die Kalmársche Rezension obiger Arbeit im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Bd. 4, Heft 3 vom 28. 6. 1932) außer drei berechtigten sachlichen bzw. historischen Einwänden nichts Negatives bemerkt hatte und alsdann von keiner Seite Weiteres erfolgt ist, sehe ich mich leider veranlaßt, folgende Tatbestände klarzulegen, ohne hierbei Vollständigkeit anzustreben.

1. Es sei

$$(1) \quad R(m) = \sum_{n=1}^m c_n = O(m^{\vartheta}), \quad \vartheta < 1.$$

Dann konvergiert die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\sigma}}$$

für $\sigma > \vartheta$, und für $\sigma > \vartheta$ ist bei ganzem $N > 0$

$$(2) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\sigma}} = s \int_{N+1}^{\infty} \frac{R(x)}{x^{\sigma+1}} dx - \frac{R(N)}{(N+1)^{\sigma}};$$

also für festes $\sigma > \vartheta$ bei $|t| \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{\sigma}} = O(tN^{\vartheta-\sigma}).$$

Dies gehört zu dem Wenigen, was man in der vormodernen Zeit über Dirichletsche Reihen wußte. Verf. kannte es nicht und entdeckt durch die übliche partielle Summation auf S. 195—196 nur den Teil wieder, daß, wenn eine Funktion für große σ durch die linke Seite von (2) definiert ist, sie für $\sigma > \vartheta$ regulär ist und durch die rechte Seite von (2) bzw. (3) dargestellt bzw. abgeschätzt wird.

Unter der Annahme (1) konvergiert,

$$a_n = c_n + A$$

gesetzt,

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\sigma > 1$, und wenn $f(s)$ die für $\sigma > 1$ durch (4) definierte Funktion, $g(s)$ die für $\sigma > \vartheta$ durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

definierte Funktion ist, so ist für $\sigma > 1$

$$f(s) = g(s) + A \zeta(s),$$

also

$$(5) \quad f(s) - \frac{A}{s-1} \quad \text{für } \sigma > \vartheta \text{ regulär.}$$

Auch hiermit sage ich nur Altes, aber offenbar für Verf. Neues. Verf. fordert für den Schluß (5) noch besonders die Existenz einer Konvergenzhalbebene $\sigma > \sigma_0$ für die Reihe (4) (also ohne zu bemerken, daß $\sigma_0 = 1$ dies automatisch leistet) und erwähnt auf S. 194, Z. 5 bis 8 der Einleitung den betreffenden Teil des Satzes 1 noch besonders als Nebenresultat, welches eine „immerhin merkwürdige Tatsache“ darstellt.

Auf S. 198, Z. 7 wird unter der Annahme (1) und weiteren Annahmen ein brauchbares σ_0 explizit angegeben, nämlich $\sigma_0 = 1 + |\vartheta|$ (sic!), also $\sigma_0 = \frac{3}{2}$ im Falle $\vartheta = \frac{1}{2}$.

2. Verf. erwähnt auf S. 191 die Hardy-Littlewoodsche Relation: Für $2 < |t| < 2\pi BN$, $B < 1$, $\sigma > 0$ (σ, B fest) ist

$$(6) \quad \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = O(N^{-\sigma}) + O(t^{-1} N^{1-\sigma}).$$

Dies ist zwar richtig, auch l. c. bei Hardy-Littlewood bewiesen; aber diese Verfasser waren nicht so ungeschickt, nicht zu bemerken, daß das erste Fehlerglied $O(N^{-\sigma})$ gegenüber dem zweiten $O(t^{-1} N^{1-\sigma})$ zu vernachlässigen ist, indem nämlich

$$N^{-\sigma} < 2\pi |t|^{-1} N^{1-\sigma}$$

ist. (Bei Hardy-Littlewood steht die schärfere Relation

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = O(N^{-\sigma}) - \frac{N^{1-s}}{1-s},$$

in der rechts natürlich kein Glied unnötig ist.)

Der volle Wortlaut von Satz 1 enthält also nichts Neues; eine Voraussetzung ist unnötig, und in der Endformel kann das letzte Fehlerglied gestrichen werden.

Also kann auch im Spezialfall S. 197, Z. 2 das letzte Fehlerglied gestrichen werden.

3. In einem speziellen Falle, den ohne Kritik zu erwähnen Rezensent nicht unterläßt, verschärft Verf. den Satz 1 zu Satz 1a, in dessen Behauptung rechts drei Fehlerglieder stehen:

$$O(N^{\vartheta-\sigma}), \quad O(t^{-1}N^{1-\sigma}), \quad O(N^{-\sigma}).$$

Daß das letzte Glied unnötig ist, bemerkte ich schon oben. Aus folgendem trivialen Grunde kann man aber, ohne den Beweis von Satz 1a irgendwie zu benutzen, das erste Fehlerglied, das $O(tN^{\vartheta-\sigma})$ war und zu $O(N^{\vartheta-\sigma})$ verschärft wurde, ganz streichen.

Aus den Zusatzvoraussetzungen zu Satz 1a (für $n \geq N+1$ haben $\Re R(n)$ und $\Im R(n)$ konstante Vorzeichen, und $|\Re R(n)|$ und $|\Im R(n)|$ fallen monoton) folgt, wie Verf. übersehen hat, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

konvergiert; aus

$$f(s) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} + A \left(\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right)$$

und (6) folgt also für die rechte Seite

$$O(N^{-\sigma}) + O(t^{-1}N^{1-\sigma}) = O(t^{-1}N^{1-\sigma}).$$

Die erste Voraussetzung von Satz 1a gilt eben auf Grund der anderen automatisch mit $\vartheta = 0$.

Aber auch von allem bisher unter 3. Gesagten abgesehen: Bei der hinter dem Wortlaut des Satzes 1a angegebenen Spezialisierung

$$N = \left[\left| t \right|^{\frac{1}{1-\vartheta}} \right]$$

muß wegen $|t| < 2\pi N$ automatisch $\vartheta \geq 0$ sein; schon aus diesem Grunde hätte Verf. in der Schlußformel des § 2 das zweite Glied gegen das erste streichen sollen.

4. In § 3, der in Satz 2 gipfelt, wird die Voraussetzung (1) (dortige Numerierung) nirgends gebraucht.

5. Rezensent hat schon moniert, daß Verf. der Meinung ist, das Argument einer in einem Bereiche regulären nicht identisch verschwindenden Funktion könne dort stetig definiert werden; und daß bei Verf. für die Horizontalstücke, auf denen Nullstellen liegen, $\arg f(s)$ überhaupt nicht überall definiert ist, sondern nur in den Nullstellen und rechts von der am weitesten rechts gelegenen.

Die ganze Arbeit verfolgt, wie in ihrer Einleitung erwähnt ist, den Zweck, eine Hoheiselsche Methode auf allgemeinere Dirichletsche Reihen auszudehnen. An der entsprechenden Stelle, S. 74, Z. 6 bis 1 v. u., begeht

selbstverständlich der Autor weder die gerügte Unterlassung noch den gerügten Fehler.

6. Die Richtigkeit des Satzes 2 muß der Leser auf Grund des bloßen Wortlauts anzweifeln. Aus der Regularität der Funktion $f(s)$ in einem abgeschlossenen Vertikalstreifen und den weiteren Annahmen folgt nichts von der behaupteten Art über $\arg f(s)$ auf dem linken Rand.

In der Tat enthält der Beweis des Satzes 2 zunächst folgenden Fehler: die sogenannte Jensensche Formel ist auf S. 201 auf Grund des bei Hoheisel richtig stehenden Spezialfalls falsch geraten. Die richtige Formel lautet bekanntlich:

Es sei $0 < \eta < r$, $\psi(s)$ für $|s| \leq r$ regulär, $|\psi(0)| = m > 0$, $\text{Max}_{|s| \leq r} |\psi(s)| = M$. Es sei l die Anzahl der Nullstellen von $\psi(s)$ für $|s| \leq \eta$. Dann ist

$$l \leq \frac{\log \frac{M}{m}}{\log \frac{r}{\eta}}.$$

Der von Verf. zugrunde gelegte Wortlaut (ich übertrage alles in meine einheitlichen Bezeichnungen) enthält folgende drei Fehler.

1. $M = \text{Max}_{|s| \leq \eta} |\psi(s)|$. 2. $r = 1$. 3. Auch für $\eta > r > 0$ sei die Formel gültig. Zusammengefaßt: Verf. merkt nicht, daß es sich bei der Jensenschen Formel um zwei Kreise handelt.

Aber auch sonst ist der Beweis des Satzes 2 wirr. Zum Beispiel das auf S. 201, Z. 10 v. u. eingeführte β braucht nicht vorhanden zu sein, da erstens die $\alpha(\sigma)$ nicht notwendig nach oben beschränkt sind, zweitens nicht jede nach oben beschränkte Menge ein Maximum besitzt.

7. Auch ein richtiger Teil in diesem § 3 ist höchst befremdlich. Verf. schließt auf S. 198, Z. 4 bis 3 v. u. mit Recht, daß aus den Voraussetzungen gleichmäßig in t

$$(7) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f(s) = 1$$

folgt, und rechnet später auf S. 199 in zwölf Zeilen und auf S. 201 in weiteren drei Zeilen vor, daß bei passenden positiven Weltkonstanten P_1, P_2 für große σ und alle t

$$P_1 \leq |\Re f(s)| \leq P_2$$

ist, statt dies einfach daraus zu folgern, daß nach (7) gleichmäßig in t

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \Re f(s) = 1.$$

8. Ich erwähne noch, daß die von Verf. über $f(s, \bar{a})$ gemachten besonderen Voraussetzungen unnötig sind, da sie aus den über $f(s, a)$ gemachten folgen.

9. Wäre selbst Satz 2 richtig bewiesen, so wäre er doch für die spätere Anwendung zum Beweise des Satzes 3 in § 6 (lies § 4) ungeeignet. Und dies ist der schwerste Einwand, den ich gegen die Arbeit erhebe. Verf. hätte auf S. 203 (auf Grund der Sätze 1 und 2) für jede aus einer Schar $\Phi_Z(s)$ ausgewählte analytische Funktion $\arg \Phi_Z(s) = O(\log |t|)$ bewiesen, und Verf. wendet diese Relation gleichmäßig für alle unendlich vielen Z an. Im Hoheiselschen Paradigma S. 79 bis 80 ist auch all dies in schönster Ordnung, indem über $Z = Z(T)$ rechtzeitig hinreichende Voraussetzungen gemacht werden.

10. Auf S. 204, Z. 1 v. u. befindet sich ein weiterer, durch Mißverständnis des O -Zeichens entstandener Fehlschluß.

11. Gesetzt, Verf. hätte Satz 3 bewiesen, so hätte doch auffallen müssen, daß von den drei Fehlergliedern das erste und dritte hätten glatt weggelassen werden können.

Trivialerweise ist bei jedem $\varepsilon > 0$

$$N_f(\sigma_0, T) = O(T \log T) = O(T^{1+\varepsilon})$$

und für $\sigma_0 \geq 1$

$$N_f(\sigma_0, T) = 0.$$

I. Für $\sigma_0 < \frac{3+\vartheta}{4}$ ist

$$T^{1+\varepsilon} = O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right).$$

II. Für $\sigma_0 \geq 1$ ist bei jedem $c \geq 0$

$$0 = O(T^c).$$

III. Für $\frac{3+\vartheta}{4} \leq \sigma_0 < 1$ ist

$$\begin{aligned} \sigma_0(4\sigma_0-3-\vartheta) - (5-\vartheta-4\sigma_0) \\ = \sigma_0(4\sigma_0+1-\vartheta) - 5 + \vartheta < 4+1-\vartheta-5+\vartheta = 0, \\ T^{1-\frac{5-\vartheta-4\sigma_0}{2(1-\vartheta)}+\varepsilon} = O\left(T^{1-\frac{\sigma_0}{2(1-\vartheta)}(4\sigma_0-3-\vartheta)+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

12. Im trivialen Falle I. hat Verf. schon darum die Behauptung des Satzes 3 nicht bewiesen, weil auf S. 203, Z. 3 v. u. gefordert wird, daß Z mit wachsendem T nicht fällt, und auf S. 206, Z. 7 v. u.

$$Z = \left[T^{\frac{4\sigma-3-\vartheta}{2(1-\vartheta)}} \right]$$

gesetzt wird. Verfs. $\Phi(s)$ wäre also für $T > 2$, $4\sigma < 3+\vartheta$, identisch 0.

13. Auch für $\vartheta = 0$ ist das ausschlaggebende Glied rechts das zweite. Verfs. Behauptung (S. 207, Z. 15 v. u.), für $\vartheta = 0$ sei die rechte Seite (der Behauptung des Satzes 3) $O(T^{1-\sigma_0(4\sigma_0-3)+\varepsilon})$, ist falsch, da für $\sigma_0 > \frac{3}{4}$

$$1 - \frac{\sigma_0}{2}(4\sigma_0-3) > 1 - \sigma_0(4\sigma_0-3)$$

ist.

14. Auch für $4\sigma \geq 3 + \vartheta$ hat Verf. das Z auf S. 206, Z. 7 v. u. erstaunlicherweise gar nicht so gewählt, daß die rechte Seite der vorangehenden Formel (11) möglichst klein wird.

15. Aber auch bei dem von Verf. gewählten Z trifft es nicht zu, daß aus (11) die Formel auf Z. 5 bis 4 v. u. folgt.

16. Die beiden Einwände 14. und 15. treffen leider auch das Hoheisel'sche Paradigma. Gegen die zweite der auf S. 191 zitierten Hoheisel'schen Arbeiten wende ich nichts ein; aber Verf. schließt sich an die erste an. In dieser ist der Carlsonsche Satz nicht, wie erforderlich, für $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ bewiesen, sondern nur für $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; in der Tat wird $O(T^{2\delta-1})$ auf S. 78 für $0 < \delta < \frac{1}{2}$ gegen $O(T^{-\delta^2})$ vernachlässigt, was für $0 < \delta \leq \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ richtig, aber für $\frac{\sqrt{5}-1}{4} < \delta < \frac{1}{2}$ falsch ist. Schuld am Auftreten des bei Verf. bzw. im Paradigma so störenden Gliedes $O(Z \cdot T^{-1})$ bzw. $O(z T^{-1})$ ist die unglückliche Einführung der von t abhängigen $e(n)$ (während in der zweiten Hoheisel'schen Arbeit die $e(n)$ nicht von t abhängen).

17. Noch einmal gesetzt, Verf. hätte Satz 3 bewiesen, so hätte doch auffallen müssen, daß die Voraussetzung (4) (auf S. 203) hätte glatt weggelassen werden können. Für jedes ϑ' mit $\vartheta < \vartheta' < 1$ ist nämlich von selbst

$$f(s) = O(t) \text{ für } \sigma \geq \vartheta',$$

und aus der Behauptung des Satzes 3 mit jedem solchen ϑ' statt ϑ folgt sie sofort mit ϑ .

18. Den Wortlaut des Satzes 3a, der Satz 3 unter gewissen Annahmen verschärft, hat Rezensent übernommen. Jene Annahmen sind auf S. 207, Z. 6 bis 5 v. u. unvollständig genannt, im Wortlaut des Satzes 3a vollständig. Aber auf Grund des zu Satz 1a Bemerkten könnte das ϑ in der Behauptung des Satzes 3a (wenn Verf. ihn bewiesen hätte) glatt durch 0 ersetzt werden.

19. In Satz 4, den Verf. durch Spezialisierung aus Satz 3 folgert, können von den drei Fehlergliedern das erste und dritte entsprechend gestrichen werden.

20. Zur letzten Zeile der Arbeit bemerke ich, daß der hier erwähnte Fall $(\frac{1}{2} <) \sigma_0 \leq \frac{1}{2(k+1)} (\leq \frac{1}{4})$ nicht vorkommt.

21. Rezensent hat schon erwähnt, daß die von Verf. in der Einleitung ausgesprochene Ansicht, der Carlsonsche Parabelbogen

$$1 - (2\sigma_0 - 1)^2$$

für $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ sei bisher nicht verschärft worden, in Unkenntnis der Tatsache geschrieben ist, daß Herr Titchmarsh in einer um die Jahreswende 1929/30 etwa gleichzeitig mit der Hoheiselschen Arbeit erschienenen Arbeit jene Funktion von σ_0 zum Hyperbelbogen

$$1 - \frac{2\sigma_0 - 1}{3 - 2\sigma_0}$$

verschärft hat. Ich füge hinzu, daß in dem von Verf. auf S. 193, Z. 15 bis 16 zitierten Titchmarshschen Buche in dem eigentlich nicht zu übersehenden Kapitel „The distribution of the zeros“ diese Verschärfung des Carlsonschen Satzes 37 als Satz 38 mit Quellenangabe für den Beweis zu finden ist.

22. Die historische Bemerkung in der Einleitung, Carlson habe seinen Satz über die Zetafunktion indirekt aus dem für in der Halbebene $\sigma > 0$ konvergente Dirichletsche Reihen abgeleitet, zeigt, daß auch der Inhalt der Carlsonschen Arbeit aus dem Jahre 1921 trotz Zitates Verf. nicht bekannt geworden ist. Dort mußte natürlich auf die *Beweismethode* des anderen Satzes zurückgegriffen werden.

Göttingen, den 13. Januar 1933.

(Eingegangen am 14. Januar 1933.)

Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen.

Von

Wilhelm Specht in Berlin-Halensee.

Einleitung.

In meiner Arbeit „Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe“ (Lit. 12)¹⁾ habe ich mit Hilfe einer beliebigen endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ in n Symbolen, die ich mit $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{G})$ bezeichnete, untersucht und ihre sämtlichen irreduziblen Darstellungen und einfachen Charaktere angegeben. Diese Verallgemeinerung läßt sich in naheliegender Weise in zweifacher Weise ausdehnen, einmal, indem man an Stelle der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ eine beliebige endliche oder unendliche Gruppe allgemeinsten Struktur zuläßt, das anderemal aber, indem man auf eine beliebige Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ in n Symbolen dieses Erweiterungsverfahren anwendet. Unter einer Gruppe wird im folgenden stets ein System der allgemeinen Struktur verstanden, wie es der Arbeit Lit. 4 zugrunde liegt. Wir wollen lediglich von einer Gruppe noch verlangen, daß sie ein Einheitsselement besitzt. Eine *eigentliche* Gruppe bedeutet dann ein System, das sämtlichen Gruppenpostulaten genügt.

Nennt man die aus den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}_n$ durch das Verallgemeinerungsverfahren entstehende Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, so besteht die Aufgabe, die in der vorliegenden Arbeit gelöst werden soll, darin, sämtliche Darstellungen $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, d. h. alle mit $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ homomorphen Gruppen linearer homogener Substitutionen, aus den Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und denen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ zu bestimmen.

Bezeichnet man eine Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, wie allgemein üblich, als *irreduzibel*, wenn es keine Matrix P gibt, die die Gruppe $\mathfrak{D}$ auf die Gestalt

$$P \mathfrak{D} P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & 0 \\ \mathfrak{D}_{21} & \mathfrak{D}_2 \end{pmatrix}$$

¹⁾ Die hinter Lit. stehende Ziffer gibt die betreffende Arbeit im Literaturverzeichnis an.

reduziert, so kann man sich im wesentlichen auf die Aufstellung der irreduziblen Darstellungen beschränken.

Stellt man an die Gruppe $\mathfrak{G}$ außer dem schon Gesagten keine weiteren Forderungen, so kann man zwar, wie im folgenden gezeigt wird, irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ aufstellen, über die Vollständigkeit des Systems dieser Darstellungen kann jedoch nichts ausgesagt werden. Verlangt man aber weitergehend, daß *sämtliche Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel sein sollen*, in der üblichen Bedeutung des Ausdruckes, so kann man zeigen, daß das System der aufgestellten Darstellungen vollständig ist, d. h. daß jede andere irreduzible Darstellung der Gruppe einer von ihnen ähnlich ist. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ dieser Art möchte ich kurz *vollständig reduzibel* nennen, eine Ausdrucksweise, die wohl zu keinen Verwechslungen Anlaß geben wird.

Der Gang der Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit wird so sein, daß in I. zunächst kurz die Verallgemeinerung charakterisiert wird und die verwendeten Bezeichnungen eingeführt werden, ferner aber ein allgemeiner Satz über Darstellungen direkter Produkte von Gruppen bewiesen wird, der uns dann in II. die Möglichkeit bietet, irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ zu konstruieren, mit Hilfe einer Methode, die im wesentlichen schon in Lit. 12 vorgezeichnet ist. Es wird dabei allerdings notwendig sein, die irreduziblen Darstellungen gewisser Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ heranzuziehen, wie es schon in Lit. 12 geschehen ist. Schließlich folgen in III. noch einige Anwendungen auf spezielle Gruppen.

Literaturverzeichnis.

1. W. Burnside, On the condition of reducibility of any group of linear substitutions, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 3.
2. G. Frobenius, Über Darstellungen endlicher Gruppen, Berl. Sitzungsber. I. 1897, II. 1899.
3. —, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, Berl. Sitzungsber. 1898.
4. — und I. Schur, Über die Äquivalenz der Gruppen linearer Substitutionen, Berl. Sitzungsber. 1906.
5. A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie, Math. Annalen 45.
6. A. Loewy, Über die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Am. Math. Soc. Trans. 4.
7. —, Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer Substitutionen gehören, Am. Math. Soc. Trans. 6.
8. I. Schur, Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Diss. Berlin 1901.

9. I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Berl. Sitzungsber. 1905.
10. —, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Berl. Sitzungsber. 1927.
11. —, Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, Berl. Sitzungsber. 1928.
12. W. Specht, Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe, Berl. Seminar. 1 (1932).

I.

Das Symbol $\mathfrak{G}$ bezeichne im folgenden eine beliebige Gruppe mit Einheits-element E , also ein System von Elementen, in dem eine assoziative Komposition $A \cdot B$ zweier Elemente A und B erklärt ist, derart, daß mit A und B auch $A \cdot B$ im System enthalten ist. Weitere Forderungen werden, soweit nichts anderes vermerkt, an $\mathfrak{G}$ nicht gestellt.

Ist dann $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ eine beliebige Permutation in n Symbolen, so ist ihr eineindeutig die Matrix der linearen Substitution in n Veränderlichen

$$y_\nu = x_{\alpha_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

zugeordnet. In dieser Matrix ersetze man die Einheiten den Zeilen nach durch beliebige Elemente $A_1, A_2, \dots, A_n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, wodurch man ein Symbol erhält, für das wir

$$(1) \quad H = (A_1, A_2, \dots, A_n; P)$$

schreiben wollen. Das gesamte System dieser Symbole H , das man erhält, wenn man die A_ν unabhängig voneinander alle Elemente von $\mathfrak{G}$, die Permutation P alle Permutationen einer beliebigen Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ durchlaufen läßt, nenne man $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$. Ein Element (1) von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ bezeichne ich kürzer mit $H = (A; P)$, worin A als Abkürzung für die Zeile $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ von H geschrieben wird. Setzt man

$$A = B \text{ dann und nur dann, wenn } A_\nu = B_\nu,$$

für zwei Zeilen A und B

$$A B = (A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n),$$

ferner, wenn $P = \begin{pmatrix} \nu \\ \alpha_\nu \end{pmatrix}$ eine beliebige Permutation bedeutet,

$$A_P = (A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_n}),$$

so wird in $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ Gleichheit und Komposition folgendermaßen definiert:

1. $(A; P) = (B; Q)$ dann und nur dann, wenn $A = B$; $P = Q$.
2. Das Produkt zweier Elemente $(A; P)$ und $(B; Q)$ soll sein:

$$(2) \quad (A; P) \cdot (B; Q) = (A B_P; P Q).$$

Das Gesetz der Assoziativität ist offenbar erfüllt, da es von der Permutationsgruppe und dem System der Zeilen erfüllt wird. Ein Einheits-element enthält die Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ ebenfalls, nämlich $(E; E')$, wenn E die aus dem n -mal genommenen Einheits-element E von $\mathfrak{G}$ gebildete Zeile, E' das Einheits-element von $\mathfrak{P}_n$ darstellt.

Ordnet man jedem Element $(A; P)$ die Permutation P aus $\mathfrak{P}_n$ zu, so besteht eine mehrstufige isomorphe Beziehung zwischen den Gruppen $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{P}_n$. Daraus folgt, daß die Elemente $(A; E')$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ bilden, deren Faktorgruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})/\mathfrak{A}$ der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ einstufig isomorph ist. Daher kann ein jedes Element $H = (A; P)$ von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ eindeutig als Produkt folgender Gestalt geschrieben werden:

$$H = (A; E')(E; P).$$

Ersetzt man hierin $(A; E')$ durch A , $(E; P)$ durch P , so wird in eindeutiger Schreibweise

$$(3) \quad H = A \cdot P.$$

Die Multiplikation drückt sich folgendermaßen aus:

$$(AP) \cdot (BQ) = A B_P \cdot PQ,$$

woraus man insbesondere entnimmt:

$$PB = B_P P^2).$$

Als erste Aufgabe haben wir die Aufstellung der irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{A}$ vor uns. Dazu gebrauchen wir die sogenannte *Hurwitz-Kroneckersche Matrizenkomposition*, die folgendermaßen ausgeführt wird³⁾. Sind A_1 und A_2 zwei Matrizen der Grade m und n , so verstehe man unter der Matrix $A_1 \times A_2$ vom Grade $m \cdot n$:

$$A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} A_2 & a_{12} A_2 & \dots & a_{1m} A_2 \\ a_{21} A_2 & a_{22} A_2 & \dots & a_{2m} A_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} A_2 & a_{m2} A_2 & \dots & a_{mm} A_2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Die Spur dieser Matrix ist das Produkt der Spuren der Matrizen A_1 und A_2 . Ferner gilt, wenn A_1, B_1 vom Grade m, A_2, B_2 vom Grade n sind:

$$(A_1 \times A_2)(B_1 \times B_2) = (A_1 B_1 \times A_2 B_2).$$

Dieses Verfahren kann eindeutig weiter fortgesetzt werden, da es dem assoziativen Gesetz genügt, weshalb man auch Kompositionen $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ mit mehr als zwei Komponenten ausführen kann. Das Multiplikationsgesetz hat hier die entsprechende Gestalt.

²⁾ Man vergleiche zum Bisherigen Lit. 12, 1.

³⁾ Siehe Lit. 5, § 6.

Betrachten wir nun die Gruppe $\mathfrak{A}$, so erkennen wir ohne weiteres, daß sie dem direkten Produkte

$$(4) \quad \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \times \dots \times \mathfrak{G} \text{ in } n \text{ Faktoren } \mathfrak{G}$$

einstufig isomorph ist. Sind daher $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_n$ beliebige Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Grade $f_1, f_2, \dots, f_n$ ⁴⁾ und bezeichnet $D_\lambda^{(x)}$ die Matrix, die in $\mathfrak{D}_x$ dem Element A_λ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist, so erhält man dadurch, daß man die mittels des Hurwitz-Kroneckerschen Verfahrens gebildete Matrix

$$D_1^{(1)} \times D_2^{(2)} \times \dots \times D_n^{(n)}$$

vom Grade $f_1 f_2 \dots f_n$ dem Elemente $(A_1, A_2, \dots, A_n; E')$ von $\mathfrak{A}$ zuordnet, eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$, die mit

$$(5) \quad \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \dots \times \mathfrak{D}_n$$

bezeichnet werden soll. Es gilt dann folgender

Satz I. Sind $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_n$ beliebige irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \dots \times \mathfrak{D}_n$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$.

Der Beweis dieses Satzes ist mit Hilfe des bekannten Kriteriums von Burnside ⁵⁾ sehr leicht zu geben. Ist etwa $(A_1, A_2, \dots, A_n; E')$ die Matrix $D_1^{(1)} \times D_2^{(2)} \times \dots \times D_n^{(n)}$ zugeordnet mit $D_v^{(i)} = (d_{\alpha_v \beta_v}^{(i)})$, so ist

$$D = (d_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} d_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)} \dots d_{\alpha_n \beta_n}^{(n)}),$$

wobei die Indizesreihen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ lexikographisch angeordnet sein sollen. Besteht nun eine Relation

$$\sum_{(\alpha, \beta)} k_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} d_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} d_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)} \dots d_{\alpha_n \beta_n}^{(n)} = 0,$$

so folgt daraus, daß die Darstellung $\mathfrak{D}_n$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ irreduzibel ist, nach dem Burnsidischen Kriterium

$$\sum_{(\alpha, \beta)} k_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} d_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} d_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)} \dots d_{\alpha_{n-1} \beta_{n-1}}^{(n)} = 0$$

für alle Paare der Indizes α_n, β_n .

Nach n Schritten erhält man daher die Bestätigung

$$k_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} = 0$$

für jede Indizesreihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

der Behauptung des Satzes I.

Für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ kann darüber nichts ausgesagt werden, ob jede irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}$ in der in Satz I angegebenen

⁴⁾ Die Nulldarstellung ist stets ausgeschlossen.

⁵⁾ Vgl. Lit. 1, S. 433 und auch Lit. 4, S. 210.

Gestalt geschrieben werden kann; für vollständig reduzible Gruppen $\mathfrak{G}$ gilt aber folgender weiterer

Satz II. *Ist $\mathfrak{G}$ eine vollständig reduzible Gruppe, so ist auch $\mathfrak{A}$ eine vollständig reduzible Gruppe, und jede irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$ ist einer Darstellung $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \dots \times \mathfrak{D}_n$ ähnlich, worin die $\mathfrak{D}_i$ irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind.*

Der Beweis dieses Satzes geht in einfacher Weise aus dem Beweise folgenden Satzes hervor:

Satz II'. *Es sei $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt zweier vollständig reduzibler Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$. Ist dann $\mathfrak{D}$ eine beliebige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$, so ist diese vollständig reduzibel und jeder irreduzible Bestandteil ist einer Gruppe $\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}''$ ähnlich, worin $\mathfrak{D}'$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}''$ eine solche der Gruppe $\mathfrak{H}$ bedeutet.*

Jedes Element A von $\mathfrak{A}$ kann in der Gestalt geschrieben werden:

$$A = G \cdot H = H \cdot G,$$

wobei G ein Element aus $\mathfrak{G}$, H ein Element aus $\mathfrak{H}$ darstellt. Ist in $\mathfrak{D}$ dem Element A die Matrix $D(A)$ zugeordnet, so gilt auch:

$$D(A) = D(G) \cdot D(H) = D(H) \cdot D(G),$$

und die Matrizen $D(G)$ und $D(H)$ bilden beziehungsweise eine Darstellung der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. Der Grad von $\mathfrak{D}$ sei f^0 .

Nach Voraussetzung kann dann eine feste Matrix P angegeben werden, so daß man für jede Matrix $D(G)$ die Gestalt erhält:

$$P^{-1} D(G) P = \begin{pmatrix} D_1(G) & & & \\ & D_2(G) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k(G) \end{pmatrix},$$

worin die Matrizen $D_\kappa(G)$ bei festem κ , wenn G die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, eine irreduzible Darstellung der Gruppe bilden. Man schreibe nun auch $P^{-1} D(H) P$ in der entsprechenden Zerlegung in Teilmatrizen wie $P^{-1} D(G) P$, etwa in der Form

$$P^{-1} D(H) P = (F_{\kappa\lambda}) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, k).$$

Dann gilt wegen der Vertauschbarkeit von $D(G)$ und $D(H)$

$$D_\kappa(G) F_{\kappa\lambda} = F_{\kappa\lambda} D_\lambda(G) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, k).$$

⁶⁾ Wir können hierbei $|D(E)| \neq 0$ annehmen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtungen.

Unter den irreduziblen Darstellungen $D_x(G)$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ mögen etwa r wesentlich verschiedene Darstellungen auftreten; mit passender Abänderung der Matrix P kann dann erhalten werden:

$$P^{-1} D(G) P = \begin{pmatrix} E_{k_1} \times D_1(G) & & \\ & E_{k_2} \times D_2(G) & \\ & \vdots & \\ & & E_{k_r} \times D_r(G) \end{pmatrix},$$

wobei gilt: $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$ ⁷⁾. Dann ist aber nach dem Schurschen Verkettungssatz ⁸⁾ die Matrix $P^{-1} D(H) P$ von der Gestalt:

$$P^{-1} D(H) P = \begin{pmatrix} U_1 \times E_{f_1} & & \\ & U_2 \times E_{f_2} & \\ & \vdots & \\ & & U_r \times E_{f_r} \end{pmatrix},$$

worin die Matrizen U_σ Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Grade k_σ bilden. Auch diese Gruppen sind nach Voraussetzung vollständig reduzibel, weshalb man mit einer passenden Abänderung von P für die Matrix $D(A)$ die Gestalt erhält:

$$P^{-1} D(A) P = \begin{pmatrix} D'_1(G) \times D'_1(H) & & \\ & D'_2(G) \times D'_2(H) & \\ & \vdots & \\ & & D'_s(G) \times D'_s(H) \end{pmatrix},$$

worin nun die $D'_\sigma(G)$ und $D'_\sigma(H)$ beziehungsweise irreduzible Darstellungen der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind; daß die Darstellungen $D'_\sigma(G) \times D'_\sigma(H)$ der Gruppe $\mathfrak{A}$ irreduzibel sind, kann genau so wie Satz I bewiesen werden. Dann liest man aber die Behauptung des Satzes II' aus der zuletzt angegebenen Form von $D(A)$ direkt ab. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß dieser Satz auch für mehr als zwei direkte Gruppenfaktoren gilt, womit Satz II vollständig bewiesen ist.

II.

Es seien $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_n$ beliebige irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Graden $f_1, f_2, \dots, f_n$, dabei soll dem Element A aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{D}_r$ die Matrix

$$D^{(v)}(A) = (d_{\alpha\gamma\beta_r}^{(v)}(A))$$

⁷⁾ E_r bezeichne im folgenden stets die Einheitsmatrix vom Grade r .

⁸⁾ Vgl. Lit. 9, § 2.

entsprechen⁹⁾. Es ist dann nach Satz I

$$(6) \quad \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}_1(A_1) \times \mathfrak{D}_2(A_2) \times \dots \times \mathfrak{D}_n(A_n)$$

eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}$ vom Grade $f_1 f_2 \dots f_n$, die dem Element $A = (A_1, A_2, \dots, A_n; E')$ die Matrix

$$(7) \quad D(A) = (d_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)}(A_1) d_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)}(A_2) \dots d_{\alpha_n \beta_n}^{(n)}(A_n))$$

zuordnet, für die wir kürzer schreiben wollen:

$$(7') \quad D(A) = (d_{\alpha \beta}(A)).$$

Bedeutet weiter R eine beliebige Permutation in n Symbolen: $R = \begin{pmatrix} \nu \\ \varrho_\nu \end{pmatrix}$, so ist auch

$$\mathfrak{D}_R(A) = \mathfrak{D}_1(A_{\varrho_1}) \times \mathfrak{D}_2(A_{\varrho_2}) \times \dots \times \mathfrak{D}_n(A_{\varrho_n})$$

eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{U}$, die dem Element A die Matrix

$$(7a) \quad D_R(A) = (d_{\alpha \beta}(A_R)) = D(A_R)$$

zuordnet und im allgemeinen der Darstellung $\mathfrak{D}$ nicht ähnlich ist. Ist aber $\mathfrak{D}_R$ zu $\mathfrak{D}$ ähnlich, so nenne man $\mathfrak{D}$ eine Darstellung von $\mathfrak{U}$, die die Permutation R zuläßt. Alle Permutationen aus $\mathfrak{P}_n$, die die Darstellung $\mathfrak{D}$ zuläßt, bilden eine gewisse Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, die wir mit $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ bezeichnen wollen.

Man kann die Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ sehr leicht folgendermaßen genauer charakterisieren. Sind unter den Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ etwa k wesentlich verschiedene Darstellungen, und von ihnen

$$(8) \quad \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{\alpha_1}, \mathfrak{D}_{\alpha_2}, \dots, \mathfrak{D}_{\alpha_{n_1}}, \\ \mathfrak{D}_{\beta_1}, \mathfrak{D}_{\beta_2}, \dots, \mathfrak{D}_{\beta_{n_2}}, \\ \vdots \\ \mathfrak{D}_{x_1}, \mathfrak{D}_{x_2}, \dots, \mathfrak{D}_{x_{n_k}} \end{array} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$

in diesen Zeilen einander ähnlich, so besteht die Gruppe aus allen und nur den Permutationen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$, die die Zifferngruppen

$$(8a) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}); (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}); \dots; (x_1, x_2, \dots, x_{n_k})$$

nur in sich permutieren, wie sich unschwer nachweisen läßt.

Von diesen Untergruppen von $\mathfrak{P}_n$ muß nun für das folgende angenommen werden, daß ihre irreduziblen Darstellungen sämtlich bekannt sind.

Betrachten wir jetzt die Untergruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, die aus allen den Elementen $(A; P)$ besteht, die als zugehörige Permutation P ein Element der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ besitzen, so gilt, da die Gruppe $\mathfrak{U}$ gleichfalls invariante Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ ist, der

⁹⁾ Die Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ brauchen dabei nicht sämtlich voneinander wesentlich verschieden zu sein, auch einander ähnliche brauchen nicht gleich angenommen zu werden.

Satz III. Die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ sind irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$, wenn man dem Komplex $(\mathfrak{A}; P)$ die der Permutation P aus $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ entsprechende Matrix zuordnet¹⁰⁾.

Bevor wir indes weiter zur Aufstellung von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ übergehen, müssen wir zunächst noch die Darstellungen $\mathfrak{D}_R$ der Gruppe $\mathfrak{A}$ genauer behandeln, wobei R die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ durchlaufen möge.

Die Gesamtheit aller dieser Darstellungen $\mathfrak{D}_R$ mit den zu ihnen ähnlichen nenne ich die Klasse von $\mathfrak{D}$ unter der Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$; diese Klasse bezeichne ich mit $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$. Offenbar ist eine solche Klasse $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$ durch jedes ihrer Elemente eindeutig bestimmt, außerdem sind je zwei Klassen entweder identisch oder elementefremd.

Man kann auch von einer Klasse $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$ sehr leicht bestimmen, wie viele wesentlich verschiedene Darstellungen von $\mathfrak{A}$ sie enthält und welcher Art diese sind. Gehört nämlich zur Darstellung $\mathfrak{D}$ die Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$, und ist die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ nach diesem Modul etwa in der Form zerlegt:

$$(9) \quad \mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} Q_1 + \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} Q_2 + \dots + \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} Q_r,$$

wobei

$$(10) \quad r = \frac{p}{p_{\mathfrak{D}}}$$

und p und $p_{\mathfrak{D}}$ die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ bedeuten, so sind offenbar die Darstellungen

$$\mathfrak{D}_{Q_1}, \mathfrak{D}_{Q_2}, \dots, \mathfrak{D}_{Q_r}$$

sämtlich voneinander wesentlich verschieden, und eine jede Darstellung der Klasse $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$ ist einer von ihnen ähnlich.

Man sieht weiter auch sehr leicht ein, daß die zu den Darstellungen $\mathfrak{D}_R$ gehörigen Permutationsgruppen $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}_R}$ die folgende Gestalt haben:

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}_R} = R^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} R.$$

Zu ähnlichen Darstellungen gehört daher offensichtlich die gleiche Permutationsgruppe.

Die von Frobenius und Schur gefundene Verallgemeinerung des Burnside'schen Kriteriums¹¹⁾ verhilft uns somit zu dem Resultat, daß die lineare Beziehung

$$(11) \quad \sum_{\alpha, \beta, \varrho} k_{\alpha, \beta, \varrho} d_{\alpha, \beta}(A_{Q_{\varrho}}) = 0$$

für alle Elemente A aus $\mathfrak{A}$ nur bestehen kann, wenn sämtliche Koeffizienten $k_{\alpha, \beta, \varrho}$ verschwinden.

¹⁰⁾ Vgl. Lit. 2, I., § 1.

¹¹⁾ Siehe Lit. 4, Satz I.

Ist nun $P = \begin{pmatrix} \nu \\ \pi_\nu \end{pmatrix}$ ein Element der Gruppe $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}$, so bilde man aus der Matrix $D(A)$ mit seiner Hilfe die Matrix:

$$(12) \quad D(A; P) = (d_{\alpha_1 \beta_{\pi_1}}^{(1)}(A_1) d_{\alpha_2 \beta_{\pi_2}}^{(2)}(A_2) \dots d_{\alpha_n \beta_{\pi_n}}^{(n)}(A_n)) = (d_{\alpha \beta_P}(A))$$

des gleichen Grades $f_1 f_2 \dots f_n$. Das System dieser Matrizen bildet dann, wenn man A alle Elemente von $\mathfrak{A}$, P alle Permutationen von $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}$ durchlaufen läßt und $D(A; P)$ dem Elemente $(A; P)$ von $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ zuordnet, eine irreduzible Darstellung dieser Gruppe. Wir bezeichnen sie im folgenden stets mit $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})^{12}$.

Ist nun $\mathfrak{I}(\mathfrak{P}_\mathfrak{D})$ eine beliebige irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}$ vom Grade $t_\mathfrak{D}$, die der Permutation P von $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}$ die Matrix

$$(t_{\kappa\lambda}(P)) \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, \dots, t_\mathfrak{D})$$

zuordnet, so ist sie nach Satz III auch eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. Infolgedessen ist auch die mit Hilfe des Hurwitz-Kroneckerschen Verfahrens gebildete Gruppe $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) \times \mathfrak{I}(\mathfrak{P}_\mathfrak{D})$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ vom Grade $t_\mathfrak{D} f_1 f_2 \dots f_n$. Die dem Elemente $H = (A; P)$ von $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ zugeordnete Matrix dieser Darstellung bezeichnen wir mit $T(H)$; sie hat die Form

$$(13) \quad T(H) = (d_{\alpha \beta_P}(A) t_{\kappa\lambda}(P)).$$

Diese Gruppe führt uns nun ohne weiteres mit Hilfe des bekannten Frobeniusschen Verfahrens auf eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$. Denn greifen wir wieder auf die Zerlegung von $\mathfrak{P}_n$ nach dem Modul $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}$ zurück, so erhalten wir daraus auch eine Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ nach dem Modul $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ in der Gestalt:

$$(14) \quad \mathfrak{P}_n(\mathfrak{G}) = \sum_{\varrho} \mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})(E; Q_\varrho),$$

wobei wir der Kürze wegen schreiben wollen:

$$(15) \quad J_\varrho = (E; Q_\varrho).$$

Das Wesentliche an diesem Restsystem ist, daß diese Elemente J_ϱ in der Gruppe Inverse besitzen, nämlich die Elemente

$$(15a) \quad J_\varrho^{-1} = (E; Q_\varrho^{-1}),$$

weshalb man das Frobeniussche Verfahren auch wirklich anwenden kann. Setzt man nämlich

$$T(J_\varrho H J_\sigma^{-1}) = T(H^*),$$

wenn $J_\varrho H J_\sigma^{-1}$ ein Element H^* aus $\mathfrak{P}_\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist, aber

$$T(J_\varrho H J_\sigma^{-1}) = 0,$$

wenn dies nicht der Fall ist, wobei 0 die Nullmatrix des Grades $t_\mathfrak{D} f_1 f_2 \dots f_n$ bezeichnen soll, so bildet das System der Matrizen

$$(16) \quad T^*(H) = (T(J_\varrho H J_\sigma^{-1})) \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, r)$$

¹²⁾ Vgl. Lit. 12, III.

eine Darstellung $\mathfrak{T}^*$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ vom Grade

$$(17) \quad \frac{p}{p_{\mathfrak{D}}} t_{\mathfrak{D}} f_1 f_2 \dots f_n^{18}).$$

Ich behaupte dann, daß folgender Satz gilt:

Satz IV. *Alle auf die geschilderte Art und Weise herstellbaren Darstellungen $\mathfrak{T}^*$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ sind irreduzibel.*

Der Beweis dieses Satzes ist mit Hilfe der früheren Ergebnisse und des Burnsidischen Kriteriums sehr leicht durchzuführen. Es ist genauer

$$J_{\varrho} H J_{\sigma}^{-1} = (A_{Q_{\varrho}}; Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1})$$

und daher die Matrix $T^*(H)$ von der Gestalt

$$(18) \quad T^*(H) = (d_{\alpha\beta Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}} (A_{Q_{\varrho}}) t_{\kappa\lambda} (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1})),$$

wobei man

$$d_{\alpha\beta Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}} (A_{Q_{\varrho}}) t_{\kappa\lambda} (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}) = 0$$

zu setzen hat, wenn $Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}$ nicht zu $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ gehört.

Besteht nun eine lineare Beziehung

$$\sum_{\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \varrho, \sigma} k_{\alpha, \beta Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}, \kappa, \lambda, \varrho, \sigma} d_{\alpha\beta Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}} (A_{Q_{\varrho}}) t_{\kappa\lambda} (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}) = 0 \quad (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$$

für alle Elemente $(A; P)$ von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, so muß nach (11) sein:

$$\sum_{\kappa, \lambda, \sigma} k_{\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \varrho, \sigma} t_{\kappa\lambda} (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}) = 0 \quad (Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$$

für jedes System α, β, ϱ . Bei festem ϱ gibt es aber nur ein σ , so daß $Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}$ ein Element von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ ist. Daher muß, da die Matrizen $(t_{\kappa\lambda}(P))$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ bilden:

$$k_{\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \varrho, \sigma} = 0$$

sein, wenn $Q_{\varrho} P Q_{\sigma}^{-1}$ in $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ ist. Läßt man aber P alle Elemente von $\mathfrak{P}_n$ durchlaufen, so findet man

$$k_{\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \varrho, \sigma} = 0$$

für jedes Indizessystem.

Wiederum kann man über die *Vollständigkeit* des durch Satz IV gewonnenen Systems von irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ nichts aussagen, solange über die Gruppe $\mathfrak{G}$ keine weiteren Aussagen gemacht werden. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ eine *vollständig reduzible Gruppe*, so gewinnen wir den weiteren Satz:

Satz V. *Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, so ist auch die Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ vollständig reduzibel, und jede irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ ist einer der Darstellungen $\mathfrak{T}^*$, wie sie in Satz IV gewonnen wurden, ähnlich.*

$\mathfrak{T}$ sei eine beliebige Darstellung von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ vom Grade g , $T(H)$ die zu H aus $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ zugeordnete Matrix dieser Gruppe. Wir können dabei

¹⁸⁾ Vgl. Lit. 3, § 3.

ohne Beschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtungen annehmen, daß dem Einheitsselement $(E; E')$ die Einheitsmatrix des Grades g zugeordnet ist.

Da wir in der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ die Beziehung haben:

$$(19) \quad H = (A; P) = (A; E') (E; P) = (E; P) (A_{P-1}; E')$$

in eindeutiger Schreibweise, so gilt auch

$$(20) \quad T(H) = T(A; E') T(E; P) = T(E; P) T(A_{P-1}; E').$$

Die Matrizen $T(A; E')$ bilden dabei eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist aber die Gruppe $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel, so gilt das Gleiche für die Gruppe $\mathfrak{A}$ (nach Satz II), weshalb man eine Matrix M des Grades g angeben kann, so daß gilt:

$$(21) \quad M T(A; E') M^{-1} = \begin{pmatrix} D'(A) & & \\ & D''(A) & \\ & & \ddots \\ & & & D^{(l)}(A) \end{pmatrix},$$

worin die Gruppen $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ der Matrizen $D^{(\lambda)}(A)$ irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{A}$ bilden, also nach Satz II sämtlich von der Gestalt sind:

$$(22) \quad \mathfrak{D}^{(\lambda)} = \mathfrak{D}_1^{(\lambda)}(A_1) \times \mathfrak{D}_2^{(\lambda)}(A_2) \times \dots \times \mathfrak{D}_n^{(\lambda)}(A_n)$$

mit irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_v^{(\lambda)}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$. Dabei denken wir uns die irreduziblen Bestandteile in (21) so angeordnet, daß stets irreduzible Darstellungen einer Klasse $\mathfrak{R}(\mathfrak{D})$ unter $\mathfrak{P}_n$ zusammenstehen, was durch eine unwesentliche Abänderung der Matrix M erreicht werden kann. Dann schreibe man die Matrix $M T(E; P) M^{-1}$ in derselben Zerlegung in Teilmatrizen:

$$(23) \quad M T(E; P) M^{-1} = (F_{x\lambda}) \quad (x, \lambda = 1, 2, \dots, l),$$

wodurch man mit Hilfe von (20) erhält:

$$(24) \quad D^{(x)}(A) F_{x\lambda} = F_{x\lambda} D^{(\lambda)}(A_{P-1}).$$

Gehören nun $\mathfrak{D}^{(x)}$ und $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ nicht derselben Klasse an, so ist $\mathfrak{D}^{(x)}$ keiner der Darstellungen $\mathfrak{D}_{P-1}^{(\lambda)}$ ähnlich, wenn P die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ durchläuft, also nach dem Verkettungssatz für alle $H = (A; P)$ aus $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$: $F_{x\lambda} = 0$. Daher läßt sich $M T(A; P) M^{-1}$ in lauter Bestandteile zerfallen:

$$(25) \quad T'(A; P) = \begin{pmatrix} D'(A) & & \\ & D''(A) & \\ & & \ddots \\ & & & D^{(k)}(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \vdots & & & \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kk} \end{pmatrix}$$

wobei die Gruppen $\mathfrak{D}^{(x)}$ der Matrizen $D^{(x)}(A)$ nun sämtlich einer Klasse $\mathfrak{R}(\mathfrak{D})$ angehören und den gleichen Grad $f = g/k$ haben.

Wir können uns daher für die weitere Beweisführung auf Darstellungen dieser speziellen Art beschränken. Ist dann $\mathfrak{D}$ ein beliebiges Element der Klasse $\mathfrak{R}(\mathfrak{D})$, so können, wenn $p_{\mathfrak{D}}$ die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ bedeutet, die wesentlich verschiedenen Gruppen dieser Klasse durch die Zeichen

$$\mathfrak{D}_{Q_1}, \mathfrak{D}_{Q_2}, \dots, \mathfrak{D}_{Q_r} \quad (r = p/p_{\mathfrak{D}})$$

bezeichnet werden, wobei die Q_{ϱ} wie früher ein rechtsseitiges Restsystem von $\mathfrak{P}_n \bmod \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ bilden. Mit einer gewissen Matrix M erhalten wir deshalb

$$(26) \quad M T'(A; E') M^{-1} = \begin{pmatrix} E_{Q_1} \times D_{Q_1}(A) & & \\ & E_{Q_2} \times D_{Q_2}(A) & \\ & & \ddots \\ & & & E_{Q_r} \times D_{Q_r}(A) \end{pmatrix}$$

mit $q_1 + q_2 + \dots + q_r = k$; $f k = g$. Es ist nun stets $|T(E; P)| \neq 0$, da wir $|T(E; E')| \neq 0$ angenommen hatten. Infolgedessen entnehmen wir aus

$$T(E; P^{-1}) \begin{pmatrix} E_{Q_1} \times D_{Q_1}(A) & & \\ & \cdot & \\ & & \ddots \\ & & & E_{Q_r} \times D_{Q_r}(A) \end{pmatrix} T(E; P) = \begin{pmatrix} E_{Q_1} \times D_{Q_1 P^{-1}}(A) & & \\ & \cdot & \\ & & \ddots \\ & & & E_{Q_r} \times D_{Q_r P^{-1}}(A) \end{pmatrix},$$

worin wir beide Seiten als Darstellungen von $\mathfrak{A}$ auffassen und P die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ durchlaufen lassen, mit Hilfe eines bekannten Satzes von Herrn Loewy¹⁴⁾, nach dem in zwei Zerlegungen einer Gruppe die irreduziblen Bestandteile, abgesehen von der Reihenfolge und von Ähnlichkeitstransformationen, übereinstimmen müssen, die Gleichungen

$$q_1 = q_2 = \dots = q_r = q; \quad q r = k; \quad f q r = g.$$

Nach der Form (25) für $T'(A; P)$ erhalten wir:

$$D^{(\kappa)}(A) F_{\kappa \lambda} = F_{\kappa \lambda} D^{(\zeta)}(A_{P^{-1}}),$$

also Beziehungen der Gestalt:

$$D_{Q_{\varrho}}(A) F = F D_{Q_{\varrho} P^{-1}}(A).$$

Hierin kann F nur dann von der Nullmatrix des Grades f verschieden sein, wenn $Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}$ zur Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ gehört; daher können wir setzen:

$$F = F(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}),$$

wobei $F(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) = 0$ gilt, wenn $Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}$ nicht der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ angehört. Damit nimmt $T(E; P)$ die Form an:

$$T(E; P) = (M(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1})) \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, r),$$

worin die Matrizen M vom Grade $f \cdot q$ sind, und $M(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) = 0$ zu setzen ist, falls $Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}$ nicht Element von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ ist.

¹⁴⁾ Siehe Lit. 6, S. 46 und Lit. 4, S. 216.

Die genauere Gestalt dieser Matrizen ergibt sich aber aus den Beziehungen:

$$(E_q \times D_{Q_q}(A)) M(Q_q P Q_q^{-1}) = M(Q_q P Q_q^{-1}) (E_q \times D_{Q_q P^{-1}}(A));$$

von Interesse ist natürlich nur der Fall, daß $Q_q P Q_q^{-1}$ in $\mathfrak{P}_D$ ist. Hier hat man

$$D(A_{Q_q}) D(E; Q_q P Q_q^{-1}) = D(E; Q_q P Q_q^{-1}) D(A_{Q_q P^{-1}})$$

mit der früheren Bedeutung von $D(A; P)$; da $|D(E; Q_q P Q_q^{-1})| \neq 0$ ist, folgt weiter

$$D(A_{Q_q P^{-1}}) = D^{-1}(E; Q_q P Q_q^{-1}) D(A_{Q_q}) D(E; Q_q P Q_q^{-1})$$

und

$$\begin{aligned} & (E_q \times D_{Q_q}(A)) M(Q_q P Q_q^{-1}) (E_q \times D^{-1}(E; Q_q P Q_q^{-1})) \\ &= M(Q_q P Q_q^{-1}) (E_q \times D^{-1}(E; Q_q P Q_q^{-1}) (E_q \times D_{Q_q}(A))), \end{aligned}$$

also mit Hilfe des Verkettungssatzes

$$M(Q_q P Q_q^{-1}) (E_q \times D^{-1}(E; Q_q P Q_q^{-1})) = C(Q_q P Q_q^{-1}) \times E_f$$

oder

$$M(Q_q P Q_q^{-1}) = C(Q_q P Q_q^{-1}) \times D(E; Q_q P Q_q^{-1}).$$

Damit haben wir für die Matrix $T(A; P)$ folgende Form erhalten:

$$T(A; P) = (C(Q_q P Q_q^{-1}) \times D(A_{Q_q}; Q_q P Q_q^{-1})) \quad (q, \sigma = 1, 2, \dots, r)$$

oder auch

$$T^*(A; P) = (D(A_{Q_q}; Q_q P Q_q^{-1}) \times C(Q_q P Q_q^{-1})) \quad (q, \sigma = 1, 2, \dots, r).$$

Da dieses für alle Permutationen P der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ gilt, so erkennt man leicht, daß die Matrizen $C(R)$, wenn R die Gruppe $\mathfrak{P}_D$ durchläuft, eine Darstellung der Gruppe bilden, die als Darstellung einer endlichen Gruppe vollständig zerfällt werden kann:

$$L^{-1} C(R) L = \begin{pmatrix} C_1(R) & & & \\ & C_2(R) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m(R) \end{pmatrix},$$

worin die Matrizen $C_\mu(R)$ irreduzible Darstellungen $\mathfrak{T}_\mu(\mathfrak{P}_D)$ der Gruppe $\mathfrak{P}_D$ bilden. Man kann allgemeiner setzen:

$$L^{-1} C(Q_q P Q_q^{-1}) L = \begin{pmatrix} C_1(Q_q P Q_q^{-1}) & & & \\ & C_2(Q_q P Q_q^{-1}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_m(Q_q P Q_q^{-1}) \end{pmatrix},$$

wobei man für ein $Q_q P Q_q^{-1}$, das nicht zu $\mathfrak{P}_D$ gehört, $C_\mu(Q_q P Q_q^{-1}) = 0$ zu schreiben hat. Damit erhält man schließlich:

$$(E_f \times L^{-1}) T^*(A; P) (E_f \times L) = (D(A_{Q_q}; Q_q P Q_q^{-1}) \times L^{-1} C(Q_q P Q_q^{-1}) L)$$

und durch eine weitere Vertauschung von Zeilen und Spalten:

$$M^{-1} T^*(A; P) M = \begin{pmatrix} (D(A_{Q_0}; Q_0 P Q_0^{-1}) \times C_1(Q_0 P Q_0^{-1})) \\ (D(A_{Q_0}; Q_0 P Q_0^{-1}) \times C_2(Q_0 P Q_0^{-1})) \\ \vdots \\ (D(A_{Q_0}; Q_0 P Q_0^{-1}) \times C_m(Q_0 P Q_0^{-1})) \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen Bestandteile dieser Matrizen bilden irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ von der Gestalt, wie sie in Satz IV gewonnen wurden. Damit ist Satz V vollkommen bewiesen.

Die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{T}^*$ der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, die wir auf Grund des Satzes IV aufstellen können, sind aber nicht sämtlich voneinander wesentlich verschieden, wie man an Beispielen leicht erkennen kann¹⁵⁾. Wir haben deshalb noch die Aufgabe vor uns, ein Kriterium für die Ähnlichkeit zweier solcher Darstellungen aufzustellen; dazu verhilft uns die bekannte Tatsache, daß zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe dann und nur dann einander ähnlich sind, wenn ihre Charakteristiken übereinstimmen¹⁶⁾. Wir haben also zunächst die Charakteristiken der Darstellungen zu bestimmen.

Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1(A_1) \times \mathfrak{D}_2(A_2) \times \dots \times \mathfrak{D}_n(A_n)$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$, die aus den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ gewonnen wird, und sind deren Charakteristiken $\chi_1(A_1)$, $\chi_2(A_2)$, ..., $\chi_n(A_n)$, so ist die Charakteristik von $\mathfrak{D}$

$$(27) \quad \chi(A) = \chi_1(A_1) \chi_2(A_2) \dots \chi_n(A_n).$$

Entsprechend ist die Charakteristik der Darstellung $\mathfrak{D}_R$

$$(28) \quad \chi_R(A) = \chi(A_R).$$

Weiter sei die Charakteristik der Darstellung $\mathfrak{T}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} \varphi(P)$. Daraus haben wir zunächst die Charakteristik $\sigma(H)$ der Gruppe $\mathfrak{T}(\mathfrak{D}) \times \mathfrak{T}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ zu bestimmen.

Man zerlege deshalb die Permutation P des Elements $(A; P)$ aus $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ in ziffernfremde Zykeln, wobei die kleinste, in einem Zyklus auftretende Ziffer an erster Stelle stehen soll. Ist $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)$ ein Zyklus von P , so ist ihm eindeutig das Zyklusprodukt $A_{\xi_1} A_{\xi_2} \dots A_{\xi_\nu}$ aus A zugeordnet¹⁷⁾. Sind die Zykeln von P genauer

$$Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_{r_1}, Z''_1, Z''_2, \dots, Z''_{r_2}, \dots, Z^{(k)}_1, Z^{(k)}_2, \dots, Z^{(k)}_{r_k},$$

¹⁵⁾ Man vgl. etwa die Resultate von Lit. 12.

¹⁶⁾ Vgl. Lit. 4, Satz II.

¹⁷⁾ Siehe Lit. 12, I.

wobei die Zykeln

Z'_q nur von den Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}$,

Z''_q „ „ „ „ „ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}$,

.....

$Z^{(k)}_q$ nur von den Elementen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n_k}$

gebildet werden, mit der in (8) angegebenen Bedeutung der Indizesreihen $(\alpha), (\beta), \dots, (\kappa)$, so seien diesen die Zykelnprodukte

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_{r_1}, C''_1, C''_2, \dots, C''_{r_2}, \dots, C^{(k)}_1, C^{(k)}_2, \dots, C^{(k)}_{r_k}$$

zugeordnet. Ferner seien die Charakteristiken der k wesentlich verschiedenen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ unter den $\mathfrak{D}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$. Man erhält dann aus

$$\sigma(\mathfrak{I}(\mathfrak{D})) = \sum_{\alpha} d_{\alpha} \alpha_P(A)$$

ohne weiteres¹⁸⁾

$$\sigma(\mathfrak{I}(\mathfrak{D})) = \chi_1(C'_1) \chi_1(C'_2) \dots \chi_k(C^{(k)}_{r_k}),$$

wofür wir kurz schreiben wollen

$$(29) \quad \sigma(\mathfrak{I}(\mathfrak{D})) = \chi(A; P).$$

Ebenso findet man

$$(30) \quad \sigma(\mathfrak{I}(\mathfrak{D}_R)) = \chi(A_R; R P R^{-1}), \quad (P < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}_R})$$

was zu bilden gestattet ist, da $R P R^{-1}$ ein Element von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ ist. Ist $P = E'$, so erhält man $\chi(A; E') = \chi(A)$ in der vorher angegebenen Bedeutung des Symbols auf der rechten Seite.

Daraus findet man sogleich die Charakteristik von $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) \times \mathfrak{I}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$

$$\sigma(H) = \sigma(\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) \times \mathfrak{I}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})) = \chi(A; P) \varphi(P)$$

und weiter die Charakteristik $\sigma^*(H)$ von $\mathfrak{I}^*$

$$(31) \quad \sigma^* = \sum_{q=1}^r \sigma(J_q H J_q^{-1}) = \sum_{q=1}^r \chi(A_{Q_q}; Q_q P Q_q^{-1}) \varphi(Q_q P Q_q^{-1}),$$

wobei nur zu summieren ist über die $Q_q P Q_q^{-1}$, die zu $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ gehören.

Das Ähnlichkeitskriterium hat nun folgenden Wortlaut:

Satz VI. *Zwei Darstellungen $\mathfrak{I}^*$ und $\mathfrak{U}^*$ von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$, gewonnen aus $\mathfrak{I}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{I}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ bzw. $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}})$ sind dann und nur dann einander ähnlich, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ gehören der gleichen Darstellungs-klasse von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{P}_n$ an.

Da dann mit einer Permutation S aus $\mathfrak{P}_n$ die Beziehung $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} = S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S$ gilt, ist $\mathfrak{U}(S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S)$ eine Darstellung von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$, wenn man die $S^{-1} P S$ von $S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S$ entsprechende Matrix dem Element P von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ zuordnet.

2. Die beiden Darstellungen $\mathfrak{I}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ und $\mathfrak{U}(S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S)$ von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ sind einander ähnlich.

¹⁸⁾ Siehe Lit. 12, III (41).

Zum Beweise des Satzes nehmen wir die beiden Bedingungen als erfüllt an. Dann ist nach 2.

$$\varphi_{\mathfrak{D}}(P) = \varphi_{\mathfrak{F}}(S^{-1}PS)$$

und infolgedessen

$$\sigma^*(\mathfrak{T}^*) = \sum_{\varrho=1}^r \chi(A_{Q_{\varrho}}; Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) \varphi_{\mathfrak{D}}(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1})$$

$$Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}},$$

$$\bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*) = \sum_{\varrho=1}^r \chi(A_{S Q_{\varrho}}; S Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} S^{-1}) \varphi_{\mathfrak{F}}(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1})$$

$$Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} < S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S,$$

also $\sigma^*(\mathfrak{T}^*) = \bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*)$.

Für die Umkehrung nehmen wir an, es seien $\mathfrak{T}^*$ und $\mathfrak{U}^*$ zwei aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{T}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ bzw. $\mathfrak{U}(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}})$ gewonnene Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ mit den Charakteristiken

$$\sigma^*(\mathfrak{T}^*) = \sum_{\varrho=1}^r \chi(A_{Q_{\varrho}}; Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) \varphi_{\mathfrak{D}}(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1})$$

$$Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}},$$

$$\bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*) = \sum_{\sigma=1}^s \bar{\chi}(A_{R_{\sigma}}; R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1}) \varphi_{\mathfrak{F}}(R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1})$$

$$R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{F}},$$

wobei Q_{ϱ} ($\varrho = 1, 2, \dots, r$) und R_{σ} ($\sigma = 1, 2, \dots, s$) je ein rechtsseitiges Restsystem von $\mathfrak{P}_n$ nach den Moduln $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}}$ sein sollen. Ist dann $\sigma^*(\mathfrak{T}^*) = \bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*)$, so ist insbesondere für $P = E$

$$(32) \quad \sum_{\varrho=1}^r \chi(A_{Q_{\varrho}}) t_{\mathfrak{D}} = \sum_{\sigma=1}^s \bar{\chi}(A_{R_{\sigma}}) t_{\mathfrak{F}},$$

worin $t_{\mathfrak{D}}$, $t_{\mathfrak{F}}$ die Grade der Darstellungen $\mathfrak{T}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ bzw. $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}})$ bedeuten. Die $\chi(A_{Q_{\varrho}})$, $\bar{\chi}(A_{R_{\sigma}})$ sind dabei die Charakteristiken der Darstellungen $\mathfrak{D}_{Q_{\varrho}}$, $\mathfrak{F}_{R_{\sigma}}$ der Gruppe $\mathfrak{A}$, die auf Grund der Beziehung (32) nicht sämtlich wesentlich verschieden sind¹⁹⁾. Daher muß für ein gewisses Paar ϱ, σ $\mathfrak{D}_{Q_{\varrho}}$ zu $\mathfrak{F}_{R_{\sigma}}$ ähnlich sein. Infolgedessen sind die Klassen $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$ und $\mathfrak{K}(\mathfrak{F})$ identisch, weshalb mit einem S aus $\mathfrak{P}_n$ $\mathfrak{P}_{\mathfrak{F}} = S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S$ wird. Damit entsteht:

$$\bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*) = \sum_{\sigma=1}^s \chi(A_{S R_{\sigma}}; S R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1} S^{-1}) \varphi_{\mathfrak{F}}(R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1})$$

$$R_{\sigma} P R_{\sigma}^{-1} < S^{-1} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} S,$$

also

$$\sigma^*(\mathfrak{T}^*) - \bar{\sigma}^*(\mathfrak{U}^*) = \sum_{\varrho=1}^r \chi(A_{Q_{\varrho}}; Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) [\varphi_{\mathfrak{D}}(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1})$$

$$- \varphi_{\mathfrak{F}}(S^{-1} Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} S)] = 0,$$

$$Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} < \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}.$$

¹⁹⁾ Auf Grund des verallgemeinerten Burnsidischen Kriteriums.

Da dies für alle $(A; P)$ aus $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ gelten soll, so ist

$$\varphi_{\mathfrak{D}}(Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}) = \varphi_{\mathfrak{E}}(S^{-1} Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1} S)$$

für jedes $Q_{\varrho} P Q_{\varrho}^{-1}$ aus $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$, also

$$\varphi_{\mathfrak{D}}(P) = \varphi_{\mathfrak{E}}(S^{-1} P S)$$

für jedes P aus $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$, womit Satz VI bewiesen ist.

Dieser Satz vereinfacht die Aufstellung der irreduziblen Darstellungen nach Satz IV ganz bedeutend. Denn man hat dazu, wenn die Klassen $\mathfrak{K}(\mathfrak{D})$ der Darstellungen von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{P}_n$ gebildet sind, aus jeder Klasse nur einen Repräsentanten zu nehmen und mit diesem und den irreduziblen Darstellungen der zu ihm gehörenden Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$ die Darstellungen $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}) \times \mathfrak{I}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}})$ der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{G})$ zu bilden. Geht man dann mit dem Frobeniusschen Verfahren zu Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ über, so erhält man schon sämtliche wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen der Gruppe, die auf diesem Wege überhaupt gewonnen werden können. Im Falle einer vollständig reduziblen Gruppe $\mathfrak{G}$ hat man damit, wie der Satz V lehrt, die Gesamtheit aller Darstellungen der Gruppe aufgestellt.

III.

Bevor ich an die Untersuchung einiger Spezialfälle gehe, möchte ich an einem einfachen Beispiel die in II geschilderte Methode ein wenig genauer erläutern.

Es sei $\mathfrak{P}_3$ die aus den Elementen

$$E' = (1); \quad P = (1\ 2\ 3); \quad P^2 = (1\ 3\ 2)$$

bestehende Permutationsgruppe dritten Grades; mit einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden wir daraus die Gruppe $\mathfrak{P}_3(\mathfrak{G})$, deren Elemente durch $H = (A_1, A_2, A_3; P^v)$ ($v = 1, 2, 3$) dargestellt werden können. Sind dann $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist

$$\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}_1(A_1) \times \mathfrak{D}_2(A_2) \times \mathfrak{D}_3(A_3)$$

eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{A}$. Sind die drei Darstellungen $\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{G}$ nicht sämtlich einander ähnlich, so ist die zu der Gruppe $\mathfrak{D}$ gehörende Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} = E'$, sind sie aber sämtlich einander ähnlich, so haben wir $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{P}_3$.

Im ersten Falle existiert daher eine einzige irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}}$, nämlich die Hauptdarstellung. Ist

$$D(A) = D_1(A_1) \times D_2(A_2) \times D_3(A_3)$$

die dem Element $(A_1, A_2, A_3; E')$ zugeordnete Matrix von $\mathfrak{D}$, so wird die aus der Gruppe $\mathfrak{D}$ zu gewinnende irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ folgende Gestalt annehmen:

$$T^*(A; P^r) = \begin{pmatrix} D(A; P^r) & D(A; P^{r+2}) & D(A; P^{r+1}) \\ D(A_P; P^{r+1}) & D(A_P; P^r) & D(A_P; P^{r+2}) \\ D(A_{P^2}; P^{r+2}) & D(A_{P^2}; P^{r+1}) & D(A_{P^2}; P^r) \end{pmatrix},$$

wobei man zu setzen hat:

$$D(A; P^r) = 0 \quad \text{für } r \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$D(A; E') = D_1(A_1) \times D_2(A_2) \times D_3(A_3).$$

Infolgedessen erhalten wir genauer:

$$T^*(A; E') = \begin{pmatrix} D_1(A_1) \times D_2(A_2) \times D_3(A_3) & 0 & 0 \\ 0 & D_1(A_2) \times D_2(A_3) \times D_3(A_1) & 0 \\ 0 & 0 & D_1(A_3) \times D_2(A_1) \times D_3(A_2) \end{pmatrix},$$

$$T^*(A; P) = \begin{pmatrix} 0 & D_1(A_1) \times D_2(A_2) \times D_3(A_3) & 0 \\ 0 & 0 & D_1(A_2) \times D_2(A_3) \times D_3(A_1) \\ D_1(A_3) \times D_2(A_1) \times D_3(A_2) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^*(A; P^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D_1(A_1) \times D_2(A_2) \times D_3(A_3) \\ D_1(A_2) \times D_2(A_3) \times D_3(A_1) & 0 & 0 \\ 0 & D_1(A_3) \times D_2(A_1) \times D_3(A_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Falle haben wir drei irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_3$, die durch das Schema

$$\begin{array}{ccccc} E' & P & P^2 & & \\ 1 & \varepsilon^\mu & \varepsilon^{2\mu} & & (\varepsilon^3 = 1, \quad \varepsilon \neq 1, \quad \mu = 1, 2, 3) \end{array}$$

angegeben werden. Die drei Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_3(\mathfrak{G})$, die aus $\mathfrak{D}(A)$ erhalten werden, sind demnach:

$$T_1^*(A; P^r) = D(A; P^r) \cdot \varepsilon^r,$$

$$T_2^*(A; P^r) = D(A; P^r) \cdot \varepsilon^{2r},$$

$$T_3^*(A; P^r) = D(A; P^r) \cdot \varepsilon^{3r}.$$

Eine endliche eigentliche Gruppe $\mathfrak{G}$ mit k wesentlich verschiedenen irreduziblen Darstellungen führt daher auf eine Gruppe $\mathfrak{P}_3(\mathfrak{G})$, die $l = \frac{k^3 - k}{3} + 3k$ wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen besitzt, deren Gestalt das Vorangehende angibt.

Ist $\mathfrak{P}_n$ eine beliebige Permutationsgruppe in n Symbolen, $\mathfrak{G}$ eine eigentliche endliche Gruppe mit k irreduziblen Darstellungen, so hat die Gruppe $\mathfrak{U}$ genau k^n irreduzible Darstellungen, die sich unter der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ etwa auf s Klassen verteilen. Aus jeder Klasse wählen wir einen beliebigen

Repräsentanten, zu dem eine gewisse Untergruppe $\mathfrak{P}_\sigma$ von $\mathfrak{P}_n$ gehört. Hat diese Gruppe k_σ Ähnlichkeitsklassen, so ist die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ genau $l = \sum_{\sigma=1}^g k_\sigma$.

Für eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ erhalten wir in $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ eine endliche *monomiale* Gruppe, entsprechend für eine unendliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$. Man kann demnach die irreduziblen Darstellungen gewisser „vollständiger“ *monomialer* Gruppen nach der geschilderten Methode gewinnen.

Dasselbe gilt für endliche Gruppen, die durch das Symbol $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{P}_m)$ bezeichnet werden, in dem $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{P}_m$ beliebige Permutationsgruppen des im Index angegebenen Grades bedeuten. Offensichtlich sind diese Gruppen, wenn $\mathfrak{P}_m$ und $\mathfrak{P}_n$ transitiv sind, *imprimitive Permutationsgruppen* vom Grade $m \cdot n$, deren irreduzible Darstellungen demnach durch Darstellungen von Permutationsgruppen niedrigeren Grades sämtlich gewonnen werden können.

Von größerem Interesse sind wohl die Spezialfälle, in denen $\mathfrak{G}$ eine der folgenden Gruppen ist:

1. Die Gruppe $\mathfrak{R}_r$ aller Matrizen des Grades r mit komplexen Koeffizienten und nichtverschwindender Determinante.
2. Die Untergruppe $\mathfrak{L}_r$ von $\mathfrak{R}_r$ aller Matrizen mit reellen Koeffizienten.
3. Die Gruppe $\mathfrak{U}_r$ aller unimodularen Matrizen vom Grade r mit komplexen Koeffizienten.
4. Die Untergruppe $\mathfrak{B}_r$ von $\mathfrak{U}_r$ mit reellen Matrizen.
5. Die Gruppe $\mathfrak{W}_r$ aller reellen Matrizen des Grades r mit der Determinante ± 1 ²⁰⁾.

Ist $\mathfrak{G}$ eine dieser Gruppen, so verstehe ich unter einer *rationalen Darstellung* der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ eine Darstellung, deren Matrizen rationale Funktionen der Koeffizienten der in dem Element $(A_1, A_2, \dots, A_n; P)$ von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{G})$ auftretenden Matrizen $A_1, A_2, \dots, A_n$ als Koeffizienten haben; entsprechend sind die Ausdrücke *semi-rationale* und *stetige* Darstellung zu verstehen²⁰⁾.

1. $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{R}_r)$. Sind $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_n$ beliebige irreduzible rationale Darstellungen von $\mathfrak{R}_r$, so ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \dots \times \mathfrak{D}_n$ eine irreduzible rationale Darstellung von $\mathfrak{U}$, und jede rationale Darstellung von $\mathfrak{U}$ ist vollständig reduzibel in Bestandteile dieser Gestalt²¹⁾. Geht man dann von $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \times \dots \times \mathfrak{D}_n$ mit den irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n$ zu den Darstellungen $\mathfrak{T}^*(H)$ über, so sind diese sämtlich irreduzible ratio-

²⁰⁾ Die Bezeichnungen sind sämtlich in Übereinstimmung mit Lit. 11 gewählt worden, wo auch die nötigen Erklärungen zu finden sind.

²¹⁾ Dieser Satz ist schon bewiesen in Lit. 8, Satz 15, 15a.

nale Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{R}_r)$. Jede rationale Darstellung von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{R}_r)$ ist vollständig reduzibel in Bestandteile, die sich in der Gestalt $\mathfrak{Z}^*(H)$ schreiben lassen.

Genau das Gleiche gilt für die semi-rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{R}_r)$.

Wie man die rationalen und semi-rationalen Darstellungen von $\mathfrak{R}_r$ aufstellen kann, ist in Lit. 8 und Lit. 10 bzw. in Lit. 11, § 2 von Herrn I. Schur geschildert worden.

2. Das über die rationalen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{R}_r)$ Gesagte gilt in vollem Umfange auch für die rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{Q}_r)$.

3. Ganz ähnliche Resultate erhält man für die Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{U}_r)$. Durch den Satz XIV in der Arbeit Lit. 11 erhalten wir aber noch weitergehend den Satz:

Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{U}_r)$ ist semi-rational und daher vollständig reduzibel.

Die Gesamtheit der semi-rationalen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{U}_r)$ erhält man durch die Methode der vorliegenden Arbeit aus den semi-rationalen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{U}_r$, diese aber durch den Satz V von Lit. 11.

4. Für die Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{B}_r)$ findet man das Resultat: Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{B}_r)$ ist rational und demnach vollständig reduzibel. Die irreduziblen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{B}_r)$ findet man sämtlich aus den irreduziblen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{B}_r$ ²²⁾.

5. Jede stetige Darstellung der Gruppe $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{W}_r)$ ist rational und vollständig reduzibel. Die irreduziblen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{P}_n(\mathfrak{W}_r)$ werden sämtlich aus den irreduziblen rationalen Darstellungen von $\mathfrak{W}_r$ gewonnen ²³⁾.

Berlin-Halensee, den 13. November 1931.

²²⁾ Nach dem Weyl-v. Neumannschen Satze: siehe Lit. 11. Satz XIII.

²³⁾ Hierbei ist der Satz XV von Lit. 11 zu verwenden.

(Eingegangen am 15. November 1931.)

Das arithmetische Geschlecht.

Von

Heinrich W. E. Jung in Halle-Saale.

Einleitung.

Es sei K ein algebraischer Körper zweier unabhängigen Veränderlichen. Er sei vom Grade n über dem Körper (xy) der rationalen Funktionen von x, y . Die Funktionen aus K sind eindeutig auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M , die die komplexe xy -Ebene n -fach überdeckt. Sind P_1 und P_2 die beiden ersten Bettischen Zahlen von M , so besteht zwischen diesen und der Zeuthen-Segreschen Invarianten Z nach Herrn J. W. Alexander¹⁾ die Gleichung

$$(1) \quad Z = P_2 - 2 P_1 - 1.$$

In einer Arbeit in Bd. 31 dieser Zeitschrift hat Herr Kähler²⁾ auf topologischem Wege die Zahl $P_2 - 2 P_1$ berechnet. Es liegt nahe, unter Verwendung des von Herrn Kähler zur Triangulierung von M benutzten Kurvenbüschels die Zeuthen-Segresche Invariante zu berechnen. Man erhält auf diese Art auch einen neuen Beweis für die Formel (1), jedoch nur, wenn man das Ergebnis von Herrn Kähler etwas ergänzt. Es müssen nämlich die isolierten singulären Punkte — Verzweigungsstellen zweiter Art — eingehender berücksichtigt werden. Es sei H ein derartiger Punkt. In ihm sind i. a. Kurven — ich nenne sie Punktprimteiler — kondensiert, etwa $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_i$. Um für $P_2 - 2 P_1$ denselben Wert zu erhalten wie für $Z + 1$, muß man in der Mannigfaltigkeit M den Punkt H durch den Divisor $\mathfrak{B}_H = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_i$ ersetzen oder durch die ihnen entsprechenden

¹⁾ James W. Alexander, Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre. Atti della Reale Accademia dei Lincei (5) 23, 2^o semestre (1914), S. 55—62.

²⁾ E. Kähler, Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen. I. Mathem. Zeitschr. 31 (1930), S. 258—269.

Riemannschen Flächen. Man vergleiche dazu auch in der unter ³⁾ angegebenen Schrift von Herrn Lefschetz, S. 13 unten. Dort handelt es sich zwar nicht um Punktprimteiler, sondern um ausgezeichnete Primteiler erster Art, aber die Verhältnisse sind ähnlich. Es geht dann von der Netzeinteilung, wie sie Herr Kähler ausgeführt hat, ein Eckpunkt verloren, wodurch $P_2 - 2P_1$ um 1 kleiner wird. Dafür kommt der Beitrag hinzu, den die Netzeinteilung von $\mathfrak{B}_H$ liefert. Dieser müßte folgenden Wert haben

$$- \{2\pi(\mathfrak{B}_H) - 2 + \mu(\mathfrak{B}_H)\}.$$

Hierin bedeutet $\pi(\mathfrak{B}_H)$ das Geschlecht von $\mathfrak{B}_H$ (vgl. I, Nr. 2), während $\mu(\mathfrak{B}_H)$ in der Bezeichnung von Herrn Kähler die *Durchdringungszahl* von $\mathfrak{B}_H$ ist. Ist also ϑ die Zahl derjenigen isolierten singulären Punkte, in denen Punktprimteiler liegen und ist $\mathfrak{B}'$ das Produkt dieser Primteiler, so ist zu dem Wert, den Herr Kähler für $P_2 - 2P_1$ angibt, hinzuzufügen

$$(2) \quad - \{2\pi(\mathfrak{B}') - 2 + \mu(\mathfrak{B}') + \vartheta\}.$$

Der in dieser Arbeit gefundene Wert von Z wird zur Herleitung einer Formel für das arithmetische Geschlecht p_a von K benutzt, und zum Schluß wird ein Beispiel gegeben.

I. Die Zeuthen-Segresche Invariante Z .

1. Vorläufige Definition von Z .

Es sei $\langle \mathfrak{G} \rangle$ ein lineares Kurvenbüschel aus K . Das Geschlecht einer allgemeinen Kurve von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ sei π , die Zahl der festen Punkte sei N und es bedeute δ die Zahl derjenigen Kurven, die einen Doppelpunkt haben. Dann ist die Zahl

$$(3) \quad Z = \delta - 4\pi - N$$

unabhängig von der Wahl des Büschels $\langle \mathfrak{G} \rangle$. Sie heißt die *Zeuthen-Segresche Invariante*. Es sei z. B. K der Körper (xy) der rationalen Funktionen von x, y . Als Kurvenschar wählen wir die Kurven $x = \text{konst.}$, so daß $\delta = \pi = N = 0$ und also auch $Z = 0$ wird.

Es ist Z keine absolute Invariante, da sie sich bei birationaler Transformation ändert. Ist aber $(\mathfrak{R})$ die kanonische Klasse von K und $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ der Grad von $(\mathfrak{R})$, so ist $Z + (\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ absolut invariant, und zwar ist

$$(4) \quad Z + (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = 12p_a + 8,$$

wenn p_a das arithmetische Geschlecht von K ist.

³⁾ S. Lefschetz, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*. *Mémoires des sciences mathématiques* publié sous le patronage de l'académie des sciences de Paris, Heft 40, 1929.

Die hier gegebene Definition von Z gilt nur für einfache Fälle und bedarf einer Ergänzung. Zunächst aber führen wir einige Bezeichnungen ein.

2. Bezeichnungen.

Es bedeute $\pi(\mathfrak{P})$ das Geschlecht eines Primteilers $\mathfrak{P}$. Ist ferner

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_\rho^{\lambda_\rho}$$

ein aus den Primteilern $\mathfrak{P}_k$ zusammengesetzter Divisor, so wollen wir hier das Geschlecht $\pi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ durch die Gleichung

$$(5) \quad \pi(\mathfrak{G}) - 1 = \sum_{k=1}^{\rho} \lambda_k \{ \pi(\mathfrak{P}_k) - 1 \}$$

definieren.

Ist $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ohne mehrfache Primteiler, so bezeichnen wir die Differenz zwischen der Zahl der durch die mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ gehenden Zweige von $\mathfrak{G}$ und der Zahl dieser Stellen mit $\mu(\mathfrak{G})$ und nennen sie, wie Herr Kähler, die *Durchdringungszahl* von $\mathfrak{G}$. Wir setzen noch

$$(6) \quad \lambda(\mathfrak{G}) = 2\pi(\mathfrak{G}) - 2 + \mu(\mathfrak{G}).$$

Ist $\mathfrak{G}$ irgendein Divisor, so wollen wir unter $\mathfrak{G}'$ den Divisor verstehen, der dieselben Primteiler wie $\mathfrak{G}$ enthält, aber jeden nur in der ersten Potenz.

3. Endgültige Definition von Z^4 .

Es sei $\mathfrak{G}_a$ eine allgemeine Kurve des linearen Büschels $\langle \mathfrak{G} \rangle$. Da ein lineares Büschel keine beweglichen mehrfachen Stellen haben kann, so können höchstens die festen Stellen mehrfach sein. Ist $\mathfrak{G}$ irgendeine Kurve von $\langle \mathfrak{G} \rangle$, so setzen wir

$$(7) \quad \delta(\mathfrak{G}) = \lambda(\mathfrak{G}_a) - \lambda(\mathfrak{G}'),$$

$$(8) \quad \delta = \sum \delta(\mathfrak{G}),$$

wo die Summe über alle Kurven von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ zu erstrecken ist.

Die Zahl der festen Stellen von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ sei jetzt mit f bezeichnet. Wir setzen

$$(9) \quad N = 2\mu(\mathfrak{G}_a) + f.$$

Mit den durch (7) bis (9) gegebenen Werten von δ und N liefert uns (3) eine in allen Fällen gültige Definition von Z .

4. Die Aufgabe.

Es sei $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsdivisor von K in bezug auf x, y und $W(x, y)$ sei seine Idealnorm. Ferner sei $Q(x, y)$ das Polynom, das dieselben unzerlegbaren Faktoren enthält wie W , aber jeden nur in der

⁴⁾ H. W. E. Jung, Über die Zeuthen-Segresche Invariante. Rendiconti del circolo matematico di Palermo 34 (1912), S. 225—277.

ersten Potenz. Der Grad von Q sei (λ, μ) . Der Zähler von $Q(x, y)$ sei im Körper (xy) mit Q und im Körper K mit Ω bezeichnet. Ferner seien die Nenner von x und y in (xy) gleich L und M und in K gleich $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$, so daß

$$(10) \quad Q(x, y) = \frac{Q}{L^\lambda M^\mu} = \frac{\Omega}{\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu}.$$

Wir wollen die Zeuthen-Segresche Invariante Z von K unter Benutzung der Kurvenschar

$$(11) \quad \Omega - \xi \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu = \mathfrak{G}(\xi), \quad \langle \mathfrak{G} \rangle$$

berechnen. Dabei wollen wir annehmen, daß $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ keine Verzweigungskurven enthalten und daß die Schnittpunkte von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ mit Ω alle voneinander verschieden sind. Sollte das nicht von vornherein der Fall sein, so kann man es durch je eine lineare Transformation von x und von y erreichen.

5. Noch einige Bezeichnungen.

Es sei Q_i einer der unzerlegbaren Faktoren von Q . Die Kurven, deren Projektion Q_i ist, seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_q$ und es sei $\mathfrak{B}_k$ Verzweigungskurve der Ordnung $\alpha_k - 1$, wobei $\alpha_k = 1$ nicht ausgeschlossen ist. Es sei also, wenn wir von den Punktprimteilern absehen,

$$(12) \quad Q_i = \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \mathfrak{B}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{B}_q^{\alpha_q}.$$

Ferner überdecke die Kurve $\mathfrak{B}_k$ ihre Projektion Q_i τ_i -mal. Dann setzen wir

$$(13) \quad w(Q_i) = \sum_{k=1}^q (\alpha_k - 1) \tau_k$$

und nennen $w(Q_i)$ die *Verzweigungszahl* von Q_i .

Die mehrfachen Punkte von Q heißen *Verzweigungspunkte zweiter Art*. Ihre Anzahl sei h . Es sei B_i einer dieser Punkte. Die Punkte von K , deren Projektion B_i ist, seien $H_1, H_2, \dots, H_\sigma$. Es ist σ sicher kleiner als n , da mindestens einer der Punkte H_k ein isolierter mehrfacher Punkt von K ist. Die Ordnung von H_k sei β_k , so daß H_k ein β_k -facher Punkt von K ist. Es ist dann

$$(14) \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\sigma = n.$$

Wir setzen

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{\sigma} (\beta_k - 1) = w_i = n - \sigma$$

und nennen w_i die *Verzweigungszahl* von B_i . Schließlich sei noch

$$(16) \quad w = \sum_{i=1}^h w_i.$$

II. Berechnung von Z .

1. Berechnung der Zeuthen-Segreschen Invariante Z_0 für den Körper (xy) .

Wir bestimmen Z_0 mit Hilfe des Büschels

$$(17) \quad Q - \xi L^\lambda M^\mu = G(\xi), \quad \langle G \rangle.$$

Die festen Punkte von $\langle G \rangle$ liegen da, wo L und M die Kurve Q schneiden. Ihre Zahl ist $(LM, Q) = (LM, L^\lambda M^\mu) = \lambda + \mu$. Sie sei mit g bezeichnet. Da durch jede dieser Stellen nur ein Zweig von $G(\xi)$ geht, so ist $N = g$.

Zu der Zahl δ liefern nur eine endliche Zahl von Kurven von $\langle G \rangle$ einen Beitrag. Es sind das erstens $G(0) = G_0 = Q$, zweitens $G(\infty) = G_\infty = L^\lambda M^\mu$ und dann die übrigen Kurven, die mehrfache Punkte haben. Es seien die r Kurven $G_i = G(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Da eine allgemeine Kurve G_a von $\langle G \rangle$ keine mehrfachen Punkte hat, so ist $\mu(G_a) = 0$ und der Beitrag irgendeiner Kurve G zu δ ist nach (6), (7), (8)

$$(18) \quad \delta(G) = 2\pi(G_a) - 2 - \{2\pi(G') - 2 + \mu(G')\}.$$

Es ist $G_\infty = L^\lambda M^\mu$, also $G'_\infty = LM$. Die Kurven L und M haben das Geschlecht 0, so daß nach (5) $\pi(G_\infty) = -1$ ist. Ferner haben L und M einen Schnittpunkt, der ein Doppelpunkt mit getrennten Tangenten von G'_∞ ist. Da weitere mehrfache Punkte nicht vorhanden sind, so ist $\mu(G'_\infty) = 1$ und es wird

$$(19) \quad \delta(G_\infty) = 2\pi(G_a) + 1.$$

Die Kurven G_i können zerfallen, können aber keine Primkurve mehrfach enthalten. Denn jeder Schnittpunkt einer solchen mit L oder M würde ein mehrfacher Schnittpunkt von L oder M mit Q sein, was bei unserer Wahl von x und y ausgeschlossen ist. Es sei

$$(20) \quad G_i = P_1 P_2 \dots P_i = G'_i,$$

wo die P_k voneinander verschiedene Primkurven sein sollen. Es wird nach (5), (6), (7)

$$(21) \quad \delta(G_i) = 2\pi(G_a) - 2 - \left\{ 2 \sum_{k=1}^i [\pi(P_k) - 1] + \mu(G'_i) \right\},$$

eine Formel, die wir erst später verwenden.

Es ist $G_0 = Q = G'_0$ und daher

$$(22) \quad \delta(G_0) = 2\pi(G_a) - 2 - \lambda(Q).$$

Da nach Definition

$$Z_0 = \delta(G_0) + \delta(G_\infty) + \sum_{k=1}^r \delta(G_k) - 4\pi(G_a) - g,$$

und da nach I, Nr. 1 $Z_0 = 0$ ist, so folgt wegen (19), (22)

$$(23) \quad \sum_{k=1}^r \delta(G_k) = \lambda(Q) + g + 1.$$

2. Die festen Stellen von $\langle \mathfrak{G} \rangle$.

Die festen Stellen des Büschels $\langle \mathfrak{G} \rangle$ liegen da, wo $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Kurve $\mathfrak{Q}$ schneiden. Es sei Q_i einer der Faktoren von Q und es sei S eine der Stellen, wo L und Q_i einander treffen. Bei den von uns über x und y gemachten Annahmen geht durch S weder M noch einer der anderen Faktoren von Q . Auch hat dort Q_i keine mehrfache Stelle. Es sei $\mathfrak{M}_1$ eine der Kurven, deren Projektion Q_i ist. Sie überdecke diese τ_1 -mal und sei Verzweigungskurve der Ordnung $\alpha_1 - 1$, so daß sie in Q_i in der α_1 -ten Potenz enthalten ist. Es gibt dann τ_1 Stellen in K , deren Projektion S ist und durch die $\mathfrak{M}_1$ geht. Eine von diesen sei S_1 . Da keine weiteren Besonderheiten vorhanden sind, so können wir die Ortsuniformisierenden u, v so wählen, daß in der Umgebung von S_1

$$\mathfrak{L} = u, \mathfrak{M}_1 = v.$$

Ferner wird

$$Q_i = v^{\alpha_1} E(u, v),$$

wo E eine Einheit ist. Da M und Q/Q_i in der Umgebung von S , also auch in der Umgebung von S_1 , Einheiten sind, so ist nach (11)

$$\mathfrak{G}(\xi) = v^{\alpha_1} E E_1 + \xi u^{\lambda} E_2.$$

Da es aber weder bei u noch bei v auf eine Einheit als Faktor ankommt, so können wir durch Abändern der Hilfsgrößen u, v erreichen, daß in der Umgebung von S_1

$$\mathfrak{G}(\xi) = v^{\alpha_1} + \xi u^{\lambda}.$$

Da für die anderen festen Stellen von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ Entsprechendes gilt, so haben wir das wichtige Ergebnis: Alle Kurven von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ mit alleiniger Ausnahme von $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{G}_\infty = \mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^n$ verhalten sich in einem der festen Punkte gleich.

3. Berechnung von $\delta(\mathfrak{G}_\infty)$.

Es ist $\mathfrak{G}_\infty = \mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^n$, also $\mathfrak{G}'_\infty = \mathfrak{L} \mathfrak{M}$. Sind p und q die Geschlechter von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$, so ist nach (5) $\pi(\mathfrak{G}'_\infty) = p + q - 1$. Die mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}'_\infty$ sind die n Schnittpunkte von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$. In jedem dieser Punkte hat $\mathfrak{L} \mathfrak{M}$ einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten, so daß $\mu(\mathfrak{G}'_\infty) = n$ wird. Es ist also

$$(24) \quad \delta(\mathfrak{G}_\infty) = 2\pi(\mathfrak{G}_\infty) - 2 + \mu(\mathfrak{G}_\infty) - (2p + 2q + n - 4).$$

4. Berechnung von $\sum \delta(\mathfrak{G}_i)$.

Es sei $\mathfrak{G}_i$ die Kurve, deren Projektion G_i ist. G_i habe die Form (20). Die Kurve, deren Projektion P_k ist, sei $\mathfrak{P}_k$. Es kann sein, daß $\mathfrak{P}_k$ zerfällt, aber jedenfalls nur in einfache Faktoren, da P_i nicht Teiler von Q sein kann. Es ist daher $\mathfrak{G}'_i = \mathfrak{G}_i$. Die Kurve $\mathfrak{G}_i$ hat mehrfache Stellen in den festen Stellen von $\langle \mathfrak{G} \rangle$ und vielleicht außerdem im Endlichen.

Der Beitrag der ersten zu $\mu(\mathfrak{G}_i)$ ist derselbe wie zu $\mu(\mathfrak{G}_a)$, da sich alle $\mathfrak{G}$ außer $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_\infty$ an diesen Stellen gleich verhalten. Wir setzen daher

$$(25) \quad \mu(\mathfrak{G}_i) = \mu_i + \mu(\mathfrak{G}_a),$$

wo sich dann μ_i nur auf die endlichen Stellen von $\mathfrak{G}_i$ bezieht. Es sei S_1 eine solche mehrfache Stelle von $\mathfrak{G}_i$. Ihre Projektion sei S . Die anderen Stellen, deren Projektion S ist, seien $S_2, \dots, S_n$. Da die Kurve Q nicht durch S geht, so sind die n Stellen S_k voneinander verschieden. In der Umgebung von S entsprechen daher jeder Stelle von (xy) n verschiedene Stellen von K und jedem durch S gehenden Zweige von G_i entsprechen n durch die Stellen S_k gehende Zweige von $\mathfrak{G}_i$, so daß

$$(26) \quad \mu_i = n \mu(G_i),$$

wenn wir noch beachten, daß G_i im Unendlichen keine mehrfachen Stellen hat.

Eine allgemeine Kurve $\mathfrak{G}_a$ überdeckt ihre Projektion G_a n -mal. Daher ist

$$(27) \quad \pi(\mathfrak{G}_a) - 1 = n \{ \pi(G_a) - 1 \} + \frac{w}{2},$$

wo w die Relativverzweigungszahl von $\mathfrak{G}_a$ in bezug auf G_a ist. Jede der Kurven $\mathfrak{P}_k$ überdeckt auch n -mal ihre Projektion P_k , so daß

$$\pi(\mathfrak{P}_k) - 1 = n \{ \pi(P_k) - 1 \} + \frac{1}{2} w_k,$$

wo w_k die Verzweigungszahl von $\mathfrak{P}_k$ in bezug auf P_k ist. Es wird also

$$\pi(\mathfrak{G}_i) - 1 = \sum_{k=1}^i \{ \pi(\mathfrak{P}_k) - 1 \} = n \sum_{k=1}^i \{ \pi(P_k) - 1 \} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i w_k.$$

Eine Relativverzweigung kann aber nur auftreten, wo die Verzweigungskurve $\mathfrak{Z}$ geschnitten wird. Das tritt bei $\mathfrak{G}_a$ und $\mathfrak{G}_i$ nur in den unendlich fernen Stellen ein. Da sich aber dort $\mathfrak{G}_a$ und $\mathfrak{G}_i$ gleich verhalten, so folgt, daß $\Sigma w_k = w$ sein muß. Es ist daher

$$2\pi(\mathfrak{G}_a) - 2 - \{ 2\pi(\mathfrak{G}_i) - 2 \} = n [2\pi(G_a) - 2 - \{ 2\pi(G_i) - 2 \}].$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (25), (26) unter Beachtung der Abkürzung (6)

$$\lambda(\mathfrak{G}_a) - \lambda(\mathfrak{G}_i) = n \{ \lambda(G_a) - \lambda(G_i) \}$$

oder

$$(28) \quad \delta(\mathfrak{G}_i) = n \delta(G_i).$$

Wegen (23) wird also

$$(29) \quad \sum_{i=1}^r \delta(\mathfrak{G}_i) = n \{ \lambda(Q) + g + 1 \}.$$

5. Vorläufige Formel für Z .

Da

$$\delta(\mathfrak{Q}) = \delta(\mathfrak{G}_0) = 2\pi(\mathfrak{G}_a) - 2 + \mu(\mathfrak{G}_a) - \lambda(\mathfrak{Q}'),$$

so ergibt sich in Verbindung mit (24), (29)

$$(30) \quad \delta = \delta(\mathfrak{G}_0) + \delta(\mathfrak{G}_\infty) + \sum_{i=1}^r \delta(\mathfrak{G}_i) \\ = n\lambda(Q) - \lambda(\mathfrak{Q}') + ng - (2p + 2q) + 4\pi(\mathfrak{G}_a) + 2\mu(\mathfrak{G}_a).$$

Hieraus und aus (3) und (9) folgt

$$(31) \quad Z = n\lambda(Q) - \lambda(\mathfrak{Q}') + ng - 2(p + q) - f.$$

6. Umformung von (31).

Es sei S eine der Stellen, wo LM und Q einander treffen. Durch S gehe der Faktor Q_i von Q . Es habe Q_i wieder die Form (12) und es mögen die dort eingeführten Bezeichnungen verwandt werden. Von den n Stellen von K , deren Projektion S ist, fallen je α_k in den τ_k Stellen zusammen, durch die $\mathfrak{M}_k$ geht. Daher ist die Zahl der verschiedenen Stellen

$$(32) \quad \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\varrho$$

und es ist

$$(33) \quad n = \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \dots + \tau_\varrho \alpha_\varrho.$$

Der Beitrag von S zu g ist 1, zu ng also n und der zu f ist durch (32) gegeben. Daher ist der Beitrag von S zu $ng - f$ gleich

$$\tau_1(\alpha_1 - 1) + \tau_2(\alpha_2 - 1) + \dots + \tau_\varrho(\alpha_\varrho - 1) = w(Q_i),$$

wo $w(Q_i)$ die in I, Nr. 5 eingeführte Verzweigungszahl von Q_i ist. Hat LM mit Q_i im ganzen s_i Schnittpunkte, so ist danach der Beitrag von Q_i zu $ng - f$ gleich $s_i w(Q_i)$. Da aber $\mathfrak{M}_k$ genau in der Potenz $\alpha_k - 1$ in $\mathfrak{Z}$ enthalten ist und da bei unseren Voraussetzungen $\mathfrak{ZM}$ die Kurven $\mathfrak{M}_k$ überall einfach schneidet und die Punktprimteiler überhaupt nicht trifft, so ist $s_i w(Q_i)$ auch der Beitrag von Q_i zu der Zahl $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{ZM})$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{ZM}$. Daher ist

$$ng - f = (\mathfrak{Z}, \mathfrak{ZM}) = w^{(1)} + w^{(2)},$$

wenn wir setzen

$$(34) \quad (\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}) = w^{(1)}, \quad (\mathfrak{Z}, \mathfrak{M}) = w^{(2)}.$$

Da

$$2p - 2 = 2\pi(\mathfrak{Z}) - 2 = (\mathfrak{Z}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}) = w^{(1)} - 2n,$$

$$2q - 2 = 2\pi(\mathfrak{M}) - 2 = (\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}) = w^{(2)} - 2n,$$

so sind $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Verzweigungszahlen von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{M}$ in bezug auf y und x . Außerdem ergibt sich

$$(35) \quad ng - 2(p + q) - f = 4n - 4.$$

Da der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$ jeden Punktprimteiler enthält, so gilt dasselbe von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$. Wir setzen

$$(36) \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{B}' \mathfrak{B},$$

wo $\mathfrak{B}'$ das Produkt aller Punktprimteiler bedeuten soll, so daß $\mathfrak{B}$ keinen solchen enthält. Es ist

$$(37) \quad 2\pi(\mathfrak{Q}') - 2 = 2\pi(\mathfrak{B}') - 2 + 2\pi(\mathfrak{B}) - 2.$$

Da $\mathfrak{B}_k$ vom Grade τ_k über Q_i ist, so ist

$$2\pi(\mathfrak{B}_k) - 2 = \tau_k \{2\pi(Q_i) - 2\} + v_k,$$

wenn v_k die Verzweigungszahl von $\mathfrak{B}_k$ in bezug auf Q_i ist. Hieraus folgt unter Benutzung von (33)

$$n \{2\pi(Q_i) - 2\} - \sum_{k=1}^g \{2\pi(\mathfrak{B}_k) - 2\} = w(Q_i) \{2\pi(Q_i) - 2\} - v^{(i)},$$

wo $v^{(i)} = \sum v_k$. Summieren wir über alle in Q enthaltenen Q_i und beachten (37), so folgt, wenn die Zahl der Q_i gleich m ist,

$$(38) \quad n \{2\pi(Q) - 2\} - \{2\pi(\mathfrak{Q}') - 2\} = \sum_{i=1}^m w(Q_i) \{2\pi(Q_i) - 2\} - \{2\pi(\mathfrak{B}') - 2\} - v,$$

wo $v = \sum v^{(i)}$.

Wir wollen in $\mu(\mathfrak{Q}')$ den Teil, der von den Punktprimteilern herrührt, besonders hervorheben und setzen wegen (36)

$$(39) \quad \mu(\mathfrak{Q}') = \mu(\mathfrak{B}') + \nu(\mathfrak{B}) - \gamma.$$

Dabei soll γ die Zahl derjenigen mehrfachen Stellen von $\mathfrak{Q}'$ bedeuten, durch die kein Punktprimteiler geht. Die Bedeutung von $\nu(\mathfrak{B})$ ist leicht festzustellen. Es sei nämlich S eine der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{Q}'$. Die Anzahl der durch S gehenden Zweige von $\mathfrak{B}'$ und von $\mathfrak{B}$ sei a und b , also der von $\mathfrak{Q}'$ gleich $a + b$. Nach der Definition der Durchdringungszahl μ ist der Beitrag von S zu $\mu(\mathfrak{Q}'): a + b - 1$, zu $\mu(\mathfrak{B}')$ und $\gamma: a - 1$ und 0, wenn $\mathfrak{B}'$ durch S geht, und 0 und 1, wenn $\mathfrak{B}'$ nicht durch S geht. Daher ist der Beitrag von S zu $\nu(\mathfrak{B})$ immer b und es ist $\nu(\mathfrak{B})$ die Zahl der durch die mehrfachen Stellen von $\mathfrak{Q}'$ gehenden Zweige von $\mathfrak{B}$.

Es sei B eine der h mehrfachen Stellen von Q . Durch B gehe z. B. die Kurve Q_i . Es ist nicht ausgeschlossen, daß auch noch andere Faktoren von Q durch B gehen. Ferner sei q ein durch B gehender Zweig von Q_i und $\mathfrak{q}$ sei im Körper Q_i der Primteiler dieses Zweiges, der zur Stelle B gehört. Im Körper $\mathfrak{B}_k$, der ein Körper vom Relativgrade τ_k über Q_i ist, zerfalle $\mathfrak{q}$ in

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{\delta_1} \mathfrak{p}_2^{\delta_2} \dots \mathfrak{p}_\sigma^{\delta_\sigma}.$$

Dann ist

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_v = \tau_k$$

und es liefert q zu der Verzweigungszahl v_k von $\mathfrak{B}_k$ in bezug auf Q_i den Beitrag

$$v_k(q) = (\delta_1 - 1) + (\delta_2 - 1) + \dots + (\delta_v - 1) = \tau_k - \sigma$$

oder es ist

$$(40) \quad \sigma = \tau_k - v_k(q).$$

Hier ist σ die Zahl derjenigen Zweige von $\mathfrak{B}_k$, deren Projektion q ist, und die durch die mehrfachen Stellen von $\mathfrak{Q}'$ gehen, deren Projektion B ist. Summieren wir also (40) über die Q Kurven $\mathfrak{B}_k$, deren Projektion Q_i ist, und über alle durch B gehenden Zweige von Q_i , deren Zahl mit $v_B(Q_i)$ bezeichnet sei, so erhalten wir

$$(41) \quad \sigma(Q_i, B) = v_B(Q_i) \sum_{k=1}^v \tau_k - \sum_{k=1}^v v_k(B).$$

Darin ist $\sigma(Q_i, B)$ der Beitrag von Q_i zu $v(\mathfrak{B})$, soweit der Punkt B in Frage kommt, und $v_k(B)$ ist der Beitrag von B zu v_k .

Die Durchdringungszahl $\mu(Q)$ schreiben wir in der Form

$$(42) \quad \mu(Q) = v(Q) - h,$$

wo dann $v(Q)$ die Zahl der durch die h mehrfachen Punkte von Q gehenden Zweige von Q ist. Der Beitrag von B zu $v(Q)$ ist, soweit Q_i beteiligt ist, gleich $v_B(Q_i)$. Daher liefert B zu

$$n v(Q) - v(\mathfrak{B}),$$

soweit Q_i in Frage kommt, den Beitrag

$$n v_B(Q_i) - v_B(Q_i) \sum_{k=1}^v \tau_k + \sum_{k=1}^v v_k(B)$$

oder wegen (33) den Beitrag

$$w(Q_i) v_B(Q_i) + \sum_{k=1}^v v_k(B).$$

Summieren wir über die h Punkte B und die m Kurven Q_i , so folgt

$$(43) \quad n v(Q) - v(\mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^m w(Q_i) v(Q_i) + v,$$

wo dann $v(Q_i)$ die Zahl der durch die mehrfachen Punkte von Q gehenden Zweige von Q_i ist, und wo v dieselbe Bedeutung hat wie in (38). Ist g_i die Zahl derjenigen Punkte B , durch die Q_i geht, so ist

$$(44) \quad v(Q_i) - g_i = \mu(Q_i)$$

die Durchdringungszahl von Q_i .

Aus (39), (42), (43), (44) folgt

$$n \mu(Q) - \mu(\Omega') = n \nu(Q) - \nu(\mathfrak{B}) - n h - \mu(\mathfrak{B}') + \gamma$$

$$\sum_{i=1}^m w(Q_i) \{ \mu(Q_i) + g_i \} + v - \mu(\mathfrak{B}') - n h + \gamma.$$

In Verbindung mit (38) ergibt sich hieraus unter Verwendung der Abkürzung (6)

$$(45) \quad n \lambda(Q) - \lambda(\Omega') = \sum_{i=1}^m w(Q_i) \{ \lambda(Q_i) + g_i \} - \lambda(\mathfrak{B}') - n h + \gamma.$$

Wir wollen noch $n h - \gamma$ umformen. Die h mehrfachen Punkte von Q seien $B_1, B_2, \dots, B_h$. Die Gesamtzahl der Punkte von K , deren Projektion einer der Punkte B_i ist, sei $\gamma + \vartheta$, so daß ϑ die Zahl derjenigen dieser Punkte ist, durch die $\mathfrak{B}'$ geht. Es seien etwa $H_1, H_2, \dots, H_\sigma$ die Punkte von K , deren Projektion B_i ist, und es sei H_k von der Ordnung β_k (vgl. I, Nr. 5). Der Beitrag von B_i zu $n h$ und $\gamma + \vartheta$ ist n und σ . Zu $n h - (\gamma + \vartheta)$ ist er also wegen (14), (15)

$$n h - \sigma = \sum_{k=1}^{\sigma} (\beta_k - 1) = w_i.$$

Daher ist

$$n h - (\gamma + \vartheta) = \sum_{i=1}^h w_i = w.$$

In Verbindung mit (31), (35), (45) ergibt sich als endgültige Formel für Z

$$(46) \quad Z = \sum_{i=1}^m w(Q_i) \{ \lambda(Q_i) + g_i \} - \{ \lambda(\mathfrak{B}') + \vartheta \} - w + 4 n - 4.$$

Durch Vergleich mit der von Herrn Kähler für $P_2 - 2 P_1$ hergeleiteten Formel folgt

$$(47) \quad Z = P_2 - 2 P_1 - 1,$$

wenn man die Kählersche Formel durch Hinzufügen des Gliedes

$$- \{ \lambda(\mathfrak{B}') + \vartheta \},$$

das den Einfluß der isolierten singulären Punkte von K angibt, ergänzt (vgl. die Einleitung).

7. Das arithmetische Geschlecht p_a .

Ist $(\mathfrak{R}) = (3/\mathfrak{L}^2 \mathfrak{M})$ die kanonische Klasse von K , so ist

$$(48) \quad 12 p_a + 8 = (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + Z.$$

Unter Verwendung der Bezeichnung (34) wird

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = (3, 3) - 4(w^{(1)} + w^{(2)}) + 8n,$$

so daß aus (46) und (48) folgt

$$(49) \quad 12(p_a - n + 1) = (3, 3) + \sum_{i=1}^m w(Q_i) \{ \lambda(Q_i) + g_i \} - \{ \lambda(\mathfrak{B}') + \vartheta \} \\ - w - 4(w^{(1)} + w^{(2)}).$$

Im wesentlichen dieselbe Formel ist in einer kürzlich in Halle erschienenen Dissertation von Herrn Kämmerer auf ganz anderem Wege hergeleitet.

III. Ein Beispiel.

Es seien Q_1 und Q_2 zwei Polynome vom Grade (2, 2) und (3, 3) in x, y . In der Umgebung von $x = y = 0$ sei

$$Q_1 = x^2 + y^2 + (3), \quad Q_2 = x^3 + y^3 + (4),$$

während Q_1 und Q_2 sonst keine Besonderheiten haben sollen. Der Körper $K = (x, y, z)$ sei definiert durch

$$z = z_1 + z_2, \quad \text{wo } z_1 = \sqrt[4]{Q_1}, \quad z_2 = \sqrt[8]{Q_2}.$$

Es ist $n = 6$, $Q = Q_1 Q_2$. Es sei $\mathfrak{M}_i$ die Kurve, deren Projektion Q_i ist. Es ist $\alpha_1 = 2$, $\tau_1 = 3$, $\alpha_2 = 3$, $\tau_2 = 2$, also $w(Q_1) = 3$, $w(Q_2) = 4$. Ferner ist $\pi(Q_1) = 0$, $\pi(Q_2) = 1$, $\mu(Q_1) = 1$, $\mu(Q_2) = 2$, also $\lambda(Q_1) = -1$, $\lambda(Q_2) = 2$.

Die Verzweigungsstellen zweiter Art B_i sind erstens der Punkt $x = y = 0$, der mit B_0 bezeichnet sei, und die übrigen Schnittpunkte von Q_1 und Q_2 . Von den 12 Schnittpunkten, die Q_1 und Q_2 im ganzen haben, fallen 6 in den Nullpunkt B_0 , so daß noch 6 andere vorhanden sind, die mit B_1 bis B_6 bezeichnet seien. Es ist also $h = 7$, und da sowohl Q_1 wie Q_2 durch alle diese Punkte geht, so ist $g_1 = g_2 = 7$. Es wird danach

$$(50) \quad \sum_{i=1}^2 w(Q_i) \{ \lambda(Q_i) + g_i \} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 = 54.$$

Um in der Umgebung von B_0 zu uniformisieren, setzen wir I. $x = u$, $y = uv$. II. $x = uv$, $y = u$. Setzen wir fest, daß in I $|v| \leq 2$ und in II $|v| < \frac{1}{2}$, so erhalten wir die ganze Umgebung von B_0 , und zwar jede Stelle von K einmal. Für unseren Zweck genügt es, I genauer zu betrachten. Es wird

$$(51) \quad z = u \{ \sqrt[3]{\mathfrak{B}_1} + \sqrt[3]{\mathfrak{B}_2} \}, \quad \text{wo } \mathfrak{B}_1 = 1 + v^2 + u P_1, \quad \mathfrak{B}_2 = 1 + v^3 + u P_2.$$

Hierin sind P_1 und P_2 Polynome in u, v . Für kleine Werte von u und endliche Werte von v , die nicht Nullstellen von $1 + v^2$ oder $1 + v^3$ sind definiert (51) wegen der Mehrdeutigkeit der Wurzeln je 6 Stellen von K mit ihren Umgebungen. Alle diese Stellen bilden *einen* isolierten singulären Punkt H_0 von K , dessen Projektion B_0 ist. Daher ist $\beta_0 = 6$.

Da für $u = 0$ x und y beide verschwinden, so wird durch $u = 0$ ein Punktprimteiler $\mathfrak{B}_1$ definiert, und zwar der einzige, der in diesem Beispiel vorhanden ist. Für $\mathfrak{B}_1 = u = 0$ geht K in einen Körper über, der aus den rationalen Funktionen von

$$v \text{ und } \zeta = \sqrt[3]{1+v^3} + \sqrt[3]{1+v^3}$$

besteht, so daß $\pi(\mathfrak{B}_1) = 4$ wird. Da hier $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_1$, so ist auch $\pi(\mathfrak{B}') = 4$. Da die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}'$ überall gleich u ist, so hat $\mathfrak{B}'$ keine mehrfache Stelle und es ist $\mu(\mathfrak{B}') = 0$, also $\lambda(\mathfrak{B}') = 6$.

Aus $y = uv$ folgt, daß der Zähler $\mathfrak{M}_0$ von y durch $\mathfrak{B}_1$ teilbar ist. Setzen wir $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}'_0$, so ist $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}'_0 \sim \mathfrak{M}$. Da $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{M}) = 0$, so folgt $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = -(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{M}'_0)$. Es haben aber $\mathfrak{B}_1 = u$ und $\mathfrak{M}'_0 = v$ an den durch (51) definierten 6 Stellen $u = v = 0$ je einen Schnittpunkt, so daß $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{M}'_0) = 6$ und $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = -6$ ist.

Da die Funktionaldeterminante von x, y nach u, v gleich u ist, so ist der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$ durch die erste Potenz von $\mathfrak{B}_1$ teilbar. Da außerdem $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Verzweigungskurven der Ordnungen 1 und 2 sind, so ist

$$(52) \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2^3.$$

Es sei B_i einer der von B_0 verschiedenen 6 mehrfachen Punkte von Q . In B_i haben bei unseren Annahmen Q_1 und Q_2 nur einen Schnittpunkt. Um zu uniformisieren, können wir daher setzen

$$Q_1 = u^3, \quad Q_2 = v^3, \quad z = u + v,$$

woraus sich x und y als gewöhnliche Potenzreihen von u^2 und v^3 ergeben. Wir erhalten also einen Punkt, sogar nur eine Stelle H_i von K , deren Projektion B_i ist. Es ist also $\beta_i = 6$. Da auch $\beta_0 = 6$ war, so ist

$$(53) \quad w = \sum_{i=0}^6 (\beta_i - 1) = 35.$$

Da ferner nur durch den Punkt H_0 ein Punktprimteiler geht, so ist $\vartheta = 1$.

Wir erhalten mit den gefundenen Werten aus (46)

$$(54) \quad \mathfrak{Z} = 54 - 7 - 35 + 24 - 4 = 32.$$

Die Funktionen z_1 und z_2 gehören dem Körper K an. Da

$$z_1 = \sqrt[3]{Q_1} = \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}_1}{\mathfrak{L} \mathfrak{M}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{Q_2} = \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}_2}{\mathfrak{L} \mathfrak{M}},$$

so ist $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{B}_2 \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{L} \mathfrak{M}$ und also

$$\mathfrak{K} \sim \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^2} = \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2^3}{\mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^2} \sim \frac{\mathfrak{L} \mathfrak{M}}{\mathfrak{B}_1^3}.$$

Da $(\mathfrak{L}, \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{B}_1) = 0$, $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$, $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n = 6$ und $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = -6$, so wird

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{L} \mathfrak{M}, \mathfrak{L} \mathfrak{M}) + 4(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = -12.$$

Aus (48) und (54) folgt daher

$$12 p_a + 8 = 32 - 12 \text{ oder } p_a = 1.$$

Dies Ergebnis können wir bestätigen. Da nämlich in unserm Beispiel der Körper K kein totales Differential erster Gattung besitzt, so ist $p_g = p_a = 1$ und es muß genau ein Doppelintegral erster Gattung vorhanden sein. Das ist der Fall. Es ist die Funktion $xy/z_1 z_2^2$.

Halle-Saale, im März 1932.

(Eingegangen am 8. März 1932.)

Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen.

Von

Erich Strohhäcker in Eislingen.

Einleitung.

In der Theorie der schlichten Funktionen sind besonders zwei Funktionsklassen genauer untersucht worden, in denen die Funktionen

$$(1) \quad w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

zusammengefaßt sind, die $|z| < 1$ schlicht-regulär

a) auf Sterngebiete mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt (Klasse $\mathfrak{S}t$),

b) auf konvexe Gebiete (Klasse $\mathfrak{R}$)

abbilden. Über die Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$ bewies Herr Löwner die beiden Ungleichungen¹⁾:

$$\text{I) } \frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \quad \text{mit } |z| = r < 1,$$

$$\text{II) } \frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \quad \text{mit } |z| \leq r < 1,$$

zu denen Herr Bieberbach²⁾ als dritte hinzufügte:

$$\text{III) } |\arccos f'(z)| \leq 2 \arccos r \quad \text{mit } |z| \leq r < 1.$$

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist in einem ersten Teil eine Verschärfung dieser drei Ungleichungen in dem Sinne, daß nun nach Schrankenätzen der drei Funktionen

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + \dots; \quad z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + \dots; \quad f'(z) = 1 + \dots$$

unter der Voraussetzung gefragt wird, daß $f(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{R}$ ist. Durch eine wiederholte Anwendung des Schwarzschen Lemmas ge-

¹⁾ K. Löwner, Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, Ber. über d. Verh. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 69 (1917), S. 89–106.

²⁾ L. Bieberbach, Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte, konforme Abbildungen, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 295–305.

langte ich zu dem Satze, daß dann die Realteile von $\frac{f(z)}{z}$ und $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ in $|z| < 1$ größer als $\frac{1}{3}$ sind³⁾.

Aus diesem Satze folgen die Sätze von Löwner und Bieberbach mit Leichtigkeit. Während jedoch aus I) nur geschlossen werden kann, daß für $|z| < r < 1$ $\frac{f(z)}{z}$ im Innern eines konzentrischen Kreisringes liegen muß, dessen Halbmesser $\frac{1}{1+r}$ und $\frac{1}{1-r}$ sind, folgt nun, daß $\frac{f(z)}{z}$ sogar im Innern eines Kreises liegt, der die Randkreise dieses Ringes berührt. Hieraus ergibt sich auch die folgende, scharfe Abschätzung:

$$\text{IV) } \left| \operatorname{arc} \frac{f(z)}{z} \right| \leq \operatorname{arc} \sin r \quad \text{mit } |z| \leq r < 1,$$

gültig für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$.

Über die Ableitungen der Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$ gelangte ich zu dem folgenden Ergebnis:

Für $|z| < r \leq 1$ liegt $f'(z)$ in dem schlichten Gebiet, das aus $|z| < r$ durch die Abbildung $s = \frac{1}{(1-z)^2}$ entsteht.

Dieser Satz ist eine Verschärfung der Ungleichungen II) und III) und enthält eine Folgerung für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$, da $f(z)$ dann und nur dann zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört, falls $F(z) = z \cdot f'(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{St}$ ist.

Als Anwendungen dieser Sätze werden noch die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{St}$ untersucht. Hier ergeben sich Verschärfungen von Sätzen von J. Privalov⁴⁾.

In einem zweiten Teile befaßte ich mich mit Verschärfungen eines Satzes von Szegö⁵⁾. Man betrachtet das Bildgebiet G , das von $|z| < 1$ durch die in $|z| < 1$ schlichte und reguläre Funktion (1) vermittelt wird. Herr Szegö fand, daß von zwei Randpunkten von G , die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten von 0 liegen, mindestens einer von 0 um mindestens $\frac{1}{3}$ entfernt ist. Das eine Ergebnis dieses Teils ist, daß die Konstante $\frac{1}{3}$ durch $\pi/4$ ersetzt werden kann, wenn der Satz für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$ ausgesprochen wird.

Endlich enthält dieser Teil eine Verallgemeinerung für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$ in der Richtung, daß statt einer Nullgeraden n gleich-

³⁾ Wie ich nachträglich erfuhr, ist dieser Satz und Satz V auch in einer kürzlich erschienenen Arbeit von A. Marx enthalten. A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Annalen 107 (1932), S. 40—67. Die Beweise sind aber dort andere als hier.

⁴⁾ J. Privalov, Sur les fonctions qui donnent la représentation conforme bi-univoque, Recueil Math. d. l. Soc. Math. d. Moscou 31 (1924), S. 350—365.

⁵⁾ G. Szegö, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 31 (1922), S. 42. und 32 (1923), S. 45.

winklig verteilte Nullstrahlen gelegt werden, und schließlich einen Satz über schlichte Funktionen, der besagt, daß im Bildgebiet G eine Strecke Platz findet, deren einer Endpunkt der Nullpunkt ist, und deren Länge 0,73 übertrifft.

I. Teil.

Über Verschärfungen des Verzerrungs- und Drehungssatzes der Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$.

§ 1.

Der Realteil von $\frac{f(z)}{z}$ und $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{A}$.

Hilfssatz 1. Die Funktion $w = g(z)$ sei in $|z| < 1$ regulär, es sei $g(0) = 1$ und $\Re g(z) \geq 0$ in $|z| < 1$. Ist dann $|z_0| \leq r < 1$, so liegt $g(z_0)$ sogar auf der abgeschlossenen Kreisscheibe der w -Ebene, deren Durchmesser die Strecke $\frac{1-r}{1+r} \dots \frac{1+r}{1-r}$ der reellen Achse ist.

Beweis. Wir bilden die Funktion

$$w_1 = g_1(z) = \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1},$$

deren absoluter Betrag in $|z| < 1$

$$|g_1(z)| \leq 1$$

ist. Da $g_1(0) = 0$ ist, erfüllt $g_1(z)$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas. Nach diesem liegt $g_1(z_0)$ sogar in $|w_1| \leq r$. Durch die Funktion

$$w = \frac{1 + w_1}{1 - w_1}, \quad (w_1 = \frac{w - 1}{w + 1})$$

wird $|w_1| \leq r$ schlicht auf die in dem Hilfssatz genannte Kreisscheibe abgebildet. Gehen wir mit dieser Funktion zurück in die w -Ebene, so ergibt sich der Satz.

Hilfssatz 2. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{A}$. Dann gehört auch die Funktion

$$(2) \quad w = h(z) = \frac{f(z_0) - f\left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\right)}{f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)}$$

zur Klasse $\mathfrak{A}$. Dabei ist z_0 ein beliebiger, fester Punkt von $|z| < 1$.

Beweis. Die lineare Funktion

$$\mathfrak{z} = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}$$

führt $|z| < 1$ so in $|\mathfrak{z}| < 1$ über, daß $z = z_0$ in $\mathfrak{z} = 0$ übergeht. $z = 0$ geht dabei über in $\mathfrak{z} = z_0$. Die Funktion

$$w_1 = f(\mathfrak{z}) = f\left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\right)$$

bildet $|z| < 1$ auf dasselbe Bildgebiet G ab, das aus $|z| < 1$ durch die Abbildung $w = f(z)$ entsteht. Dabei geht nun $z = 0$ über in $w_1 = f(z_0)$. Für die Funktion $w = h(z)$ ist also $h(0) = 0$. Ihre Ableitung ist

$$(3) \quad h'(z) = \frac{f' \left(\frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z} \right)}{f'(z_0) \cdot (1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

Es ist also $h'(0) = 1$. Endlich geht das Bildgebiet von $|z| < 1$, das durch die Abbildung $w = h(z)$ entsteht, aus G durch eine Translation und Drehstreckung hervor, ist also mit G schlicht und konvex. Folglich gehört $h(z)$ zur Klasse $\mathfrak{R}$.

Hilfssatz 3. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Dann ist in $|z| < 1$

$$\Re \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0.$$

Beweis. Nach einem Satze von Study⁶⁾ ist in $|z| < 1$

$$(4) \quad \Re \left(z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right) \geq 0.$$

Die Bildkurve C , die aus $|z| = r < 1$ durch die Abbildung $w = f(z)$ entsteht, hat nach diesem Satze die Eigenschaft, daß ihre Tangente sich dauernd im gleichen Sinne dreht. Das Innere von C ist also konvex, in bezug auf den Nullpunkt sternförmig. Darum ist notwendig auf $|z| = r > 0$ $\arg f(z)$ eine monoton wachsende Funktion von $\varphi = \arg z$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \arg f(r) < 2\pi$, $\arg f(r) \leq \arg f(z) < \arg f(r) + 2\pi$). Da diese Funktion differenzierbar ist, ist also

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \arg f(z) \geq 0,$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\partial \arg f(z)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \Im (\log f(z)) = \Im \left(\frac{\partial \log f(z)}{\partial \varphi} \right) \\ &= \Im \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \cdot i z \right) = \Re \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 4. Es sei für alle Funktionen $w = f(z) = z + \dots$ der Klasse $\mathfrak{R}$ bewiesen:

$$\Re \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq a \text{ in } |z| < 1, \quad (0 \leq a \leq \tfrac{1}{2}).$$

Dann ist in $|z| < 1$ für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$ sogar

$$1) \quad \Re \left(\frac{f(z)}{z} \right) \geq \frac{1}{4 \cdot (1-a)} \geq a, \quad 2) \quad \Re \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \frac{1}{4 \cdot (1-a)}.$$

⁶⁾ E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Heft II, 1913, § 13. Ein hübscher und kurzer Beweis dieses Satzes findet sich bei T. Radò, Bemerkungen über die konformen Abbildungen konvexer Gebiete. Math. Annalen 102 (1929), S. 428–429.

Beweis. 1. $f(z)$ sei eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{R}$, z_0 ein beliebiger, aber fester Punkt von $|z| < 1$, es sei $|z_0| = r < 1$. Neben $f(z)$ betrachten wir die Funktion $h(z)$ von (2). Für $z = z_0$ erhalten wir aus (2) und (3)

$$(5) \quad h(z_0) = \frac{f(z_0)}{f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)},$$

$$(6) \quad h'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)^2}.$$

Da $h(z)$ nach Hilfssatz 2 eine Funktion der Klasse $\mathfrak{R}$ ist, ist nach Voraussetzung in $|z| < 1$

$$(7) \quad \Re \left(z \cdot \frac{h'(z)}{h(z)} \right) \geq a.$$

Folglich erfüllt die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \left(z \cdot \frac{h'(z)}{h(z)} - a \right)$$

die Voraussetzungen von Hilfssatz 1, da $g(0) = 1$ und $\Re g(z) \geq 0$ in $|z| < 1$ ist. Nach diesem Satze liegt $g(z_0)$ sogar auf der Kreisscheibe, die über der Strecke

$$\frac{1-r}{1+r} \cdots \frac{1+r}{1-r}$$

der reellen Achse als Durchmesser steht. Daher liegt $z_0 \cdot \frac{h'(z_0)}{h(z_0)}$ auf der Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke

$$(1-a) \frac{1-r}{1+r} + a \cdots (1-a) \frac{1+r}{1-r} + a$$

der reellen Achse ist. Daraus folgt

$$(8) \quad \Re \left(\frac{1}{z_0 \cdot \frac{h'(z_0)}{h(z_0)}} \right) \geq \frac{1}{(1-a) \frac{1+r}{1-r} + a}$$

Nun ergibt sich aber aus (5) und (6)

$$(9) \quad \frac{f(z_0)}{z_0} = \frac{1}{1 - |z_0|^2} \cdot \frac{1}{z_0 \cdot \frac{h'(z_0)}{h(z_0)}}$$

und also aus (8) und (9)

$$\begin{aligned} \Re \left(\frac{f(z_0)}{z_0} \right) &= \frac{1}{1-r^2} \Re \left(\frac{1}{z_0 \cdot \frac{h'(z_0)}{h(z_0)}} \right) \\ &\geq \frac{1}{1-r^2} \cdot \frac{1}{(1-a) \frac{1+r}{1-r} + a} = \frac{1}{(1-a)(1+r)^2 + a \cdot (1-r^2)}, \end{aligned}$$

$$(10) \quad \Re \left(\frac{f(z_0)}{z_0} \right) \geq \frac{1}{1+r \cdot (2-2a) + r^2 \cdot (1-2a)}.$$

Setzen wir

$$F(r) = 1 + r \cdot (2-2a) + r^2 \cdot (1-2a),$$

so wird

$$F'(r) = (2 - 2a) + 2r \cdot (1 - 2a) > 0$$

für $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Daher ist

$$F(r) \leq F(1) \quad \text{in} \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Also folgt aus (10)

$$\Re\left(\frac{f(z_0)}{z_0}\right) > \frac{1}{1 + (2 - 2a) + (1 - 2a)} = \frac{1}{4 \cdot (1 - a)} \geq a.$$

Die letzte Abschätzung ist identisch mit der Ungleichung

$$4a(1 - a) \leq 1,$$

die bekanntlich für jedes reelle a gültig ist. Da z_0 ein beliebiger Punkt von $|z| < 1$ ist, ist damit die erste Behauptung bewiesen.

2. Es sei wieder z_0 ein beliebiger, fester Punkt von $|z| < 1$, es sei $|z_0| = r < 1$. Neben der beliebigen Funktion $f(z)$ der Klasse $\mathfrak{R}$ betrachten wir die Funktion $w = h(z)$ von (2). Da diese mit $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört, folgt nun nach Behauptung 1

$$\Re \frac{h(z)}{z} \geq a \quad \text{in} \quad |z| < 1.$$

Bilden wir die Funktion

$$g_1(z) = \frac{1}{1-a} \left(\frac{h(z)}{z} - a \right),$$

so ist also $\Re g_1(z) \geq 0$ in $|z| < 1$ und $g_1(0) = 1$; $g_1(z)$ erfüllt somit die Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem schließen wir — ganz analog wie bei 1. —, daß $\frac{h(z_0)}{z_0}$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe liegt, die über der Strecke

$$(1-a) \frac{1-r}{1+r} + a \dots (1-a) \frac{1+r}{1-r} + a$$

der reellen Achse als Durchmesser steht. Folglich ist

$$(11) \quad \Re \left(\frac{1}{\frac{h(z_0)}{z_0}} \right) \geq \frac{1}{(1-a) \frac{1+r}{1-r} + a}.$$

Nun folgt aber aus (5) und (6)

$$(12) \quad z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{1}{1 - |z_0|^2} \cdot \frac{1}{\frac{h(z_0)}{z_0}}.$$

Aus (11) und (12) ergibt sich dann

$$\Re \left(z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right) \geq \frac{1}{1-r^2} \cdot \frac{1}{(1-a) \frac{1+r}{1-r} + a} \geq \frac{1}{4 \cdot (1-a)},$$

wie bei 1. schon bewiesen ist. Da z_0 ein beliebiger Punkt von $|z| < 1$ ist, ist damit auch die zweite Behauptung bewiesen.

I. Satz (Hauptsatz). Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Dann ist in $|z| < 1$

$$1) \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geq \frac{1}{2}, \quad 2) \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Dabei kann in beiden Behauptungen die Schranke $\frac{1}{2}$ nicht durch eine höhere ersetzt werden.

Beweis. Wir bilden die Zahlenfolge:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = \frac{1}{4(1-a_1)} = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{4(1-a_2)} = \frac{1}{3}; \quad \dots,$$

in welcher das n -te aus dem $(n-1)$ -ten Glied berechnet wird vermittels der Rekursionsformel

$$(13) \quad a_n = \frac{1}{4(1-a_{n-1})}.$$

Nach Hilfssatz 4 ist unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes

$$1) \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) \geq a_n, \quad 2) \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq a_n \text{ in } |z| < 1,$$

falls bewiesen ist:

$$\text{I) } 0 \leq a_{n-1} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{II) } \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq a_{n-1} \text{ in } |z| < 1.$$

I) und II) ist bewiesen für $n = 2$ in Hilfssatz 3:

$$\text{I) } 0 \leq a_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \text{II) } \Re\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq a_1 \text{ in } |z| < 1.$$

Der Hauptsatz ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

$$\text{A. } 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2} \text{ für } n = 2, 3, \dots, \quad \text{B. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Beide Behauptungen sind bewiesen, wenn wir zeigen:

$$(14) \quad a_k = \frac{k-1}{2k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dies ist bewiesen für $k = 1$. Es sei bewiesen für $k = n$:

$$a_n = \frac{n-1}{2n}.$$

Dann ist nach (13)

$$a_{n+1} = \frac{1}{4 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{2n}\right)} = \frac{(n+1)-1}{2 \cdot (n+1)}.$$

Damit ist (14) allgemein, und damit der Hauptsatz bewiesen.

Bemerkungen. 1. Die Schranke $\frac{1}{2}$ ist scharf und wird erreicht bei der Funktion

$$(15) \quad w = f(z) \equiv \frac{z}{1+z} = z + \dots$$

die $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re(w) < \frac{1}{2}$ abbildet. Für diese Funktion ist

$$w_1 = \frac{f(z)}{z} \equiv z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{1+z},$$

und durch $w_1 = \frac{1}{1+z}$ wird gerade $|z| < 1$ auf $\Re(w_1) > \frac{1}{2}$ abgebildet.

2. Die Bedingungen 1) und 2) des Hauptsatzes sind nicht hinreichend dafür, daß die Funktion $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört, auch wenn man weiter voraussetzt, daß $f(z) = z + \dots$ in $|z| < 1$ schlicht-regulär ist. Dies lehrt die Funktion

$$w = f(z) \equiv z + \frac{z^2}{3}.$$

Diese Funktion ist in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Denn die Annahme $f(z_1) = f(z_2)$ mit $z_1 \neq z_2$ führt auf die Bedingung $z_1 + z_2 = -3$, die für $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$ nicht erfüllt werden kann. Außerdem ist

$$\text{a) } \frac{f(z)}{z} \equiv 1 + \frac{z}{3}, \quad \text{also } \Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \text{ in } |z| < 1.$$

$$\text{b) } z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1 + \frac{2}{3}z}{1 + \frac{1}{3}z},$$

d. h. $z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ liegt für $|z| < 1$ im Innern eines Kreises, der über der Strecke $\frac{1}{2} \dots \frac{5}{4}$ der reellen Achse als Durchmesser steht, es ist also auch die Bedingung 2) des Hauptsatzes erfüllt. Trotzdem gehört die Funktion $f(z)$ nicht zur Klasse $\mathfrak{R}$. Denn dafür ist notwendig, daß in $|z| < 1$ die Ungleichung (4) erfüllt ist. Nun ist aber in diesem Beispiel

$$z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \equiv \frac{1 + \frac{4}{3}z}{1 + \frac{2}{3}z}.$$

Für $z = -1$ wird

$$z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 = -1,$$

d. h. (4) ist in $|z| < 1$ nicht überall erfüllt.

§ 2.

Folgerungen.

II. Satz. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Ist $|z_0| \leq r < 1$, so liegen $\frac{f(z_0)}{z_0}$ und $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ sogar auf der abgeschlossenen Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke $\frac{1}{1+r} \dots \frac{1}{1-r}$ der reellen Achse ist.

Beweis. 1. Wir bilden die Funktion

$$g(z) = 2 \cdot \left(\frac{f(z)}{z} - \frac{1}{2} \right).$$

Es ist $g(0) = 1$, und in $|z| < 1$ nach dem Hauptsatze:

$$\Re g(z) \geq 0.$$

$g(z)$ erfüllt also die Voraussetzungen von Hilfssatz 1. Nach diesem liegt $g(z_0)$ auf der Kreisscheibe, die über der Strecke $\frac{1-r}{1+r} \dots \frac{1+r}{1-r}$ der reellen Achse als Durchmesser steht. Also liegt $\frac{f(z_0)}{z_0}$ auf der Kreisscheibe, deren Durchmesser die Strecke

$$\frac{1}{2} \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} \frac{1+r}{1-r} + \frac{1}{2}$$

der reellen Achse ist. Das ist die in dem Satz genannte Kreisscheibe.

2. Ganz analog verläuft der Beweis für $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$, wenn man die Behauptung 2) des Hauptsatzes benutzt.

Bemerkungen. 1. Aus Satz II ergeben sich die Löwnerschen Ungleichungen I) und II) als leichte Folgerungen. Ist $|z_0| = r_0 < 1$, so folgen aus Satz II die beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{1+r_0} &\leq \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq \frac{1}{1-r_0}, \\ \text{b) } \frac{1}{1+r_0} &\leq \left| z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \frac{1}{1-r_0}. \end{aligned}$$

Aus a) folgt durch Multiplikation mit r_0 die Ungleichung I), durch Multiplikation von a) und b) die Ungleichung II).

2. Das Schrankengebiet für $\frac{f(z_0)}{z_0}$ und $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ kann allgemein nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion (15), die zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört, ist

$$w_1 = \frac{f(z)}{z} \equiv z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \frac{1}{1+z},$$

und durch $w_1 = \frac{1}{1+z}$ wird $|z| \leq r < 1$ gerade auf die in dem Satze genannte Kreisscheibe abgebildet.

III. Satz. Unter den Voraussetzungen von Satz II gilt

$$\text{A. } \left| \operatorname{arc} \frac{f(z)}{z} \right| \leq \operatorname{arc} \sin r \quad \text{mit } |z| \leq r < 1,$$

$$\text{B. } \left| \operatorname{arc} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \operatorname{arc} \sin r \quad \text{mit } |z| \leq r < 1.$$

Beide Abschätzungen sind scharf.

Beweis. 1. Nach Satz II ist, wenn ϱ der Radius des in diesem Satze genannten Kreises, σ die Entfernung seines Mittelpunkts vom Nullpunkt ist,

$$\left| \operatorname{arc} \frac{f(z)}{z} \right| \leq \operatorname{arc} \sin \frac{\varrho}{\sigma} = \operatorname{arc} \sin \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1+r} \right)}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-r} + \frac{1}{1+r} \right)}$$

$$= \operatorname{arc} \sin \frac{r}{\frac{1-r^2}{1-r^2}} = \operatorname{arc} \sin r.$$

2. Analog ergibt sich die zweite Behauptung.

Bemerkungen. 1. Die Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion (15).

2. Durch Addition von A. und B. folgt die Bieberbachsche Ungleichung III).

IV. Satz. Unter den Voraussetzungen von Satz II gilt

$$|f(z) - f(-z)| \geq \frac{2 \cdot |z|}{1 + |z|}.$$

Beweis. Nach Satz II ist

$$1) \Re \left(\frac{f(z)}{z} \right) \geq \frac{1}{1 + |z|}, \quad 2) \Re \left(\frac{f(-z)}{-z} \right) \geq \frac{1}{1 + |z|},$$

und daher:

$$|f(z) - f(-z)| = |z| \cdot \left| \frac{f(z)}{z} + \frac{f(-z)}{-z} \right| \geq |z| \Re \left(\frac{f(z)}{z} + \frac{f(-z)}{-z} \right)$$

$$\geq |z| \left(\frac{1}{1 + |z|} + \frac{1}{1 + |z|} \right) = \frac{2|z|}{1 + |z|},$$

w. z. b. w. Die Funktion (15) erreicht die Schranke nicht. Will man jedoch durch ein Vielfaches von $\frac{|z|}{1 + |z|}$ abschätzen, so kann 2 durch keine höhere Zahl ersetzt werden. Denn die Schranke des Satzes strebt gegen 1, wenn $|z| \rightarrow 1$ strebt. Es ist aber auch

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z) - f(-z)| = 1,$$

wenn $f(z)$ die Funktion (15) ist und $z \rightarrow i$ auf der imaginären Achse strebt.

§ 3.

Ein Satz über die Ableitungen der Funktionen der Klasse $\mathfrak{R}$.

V. Satz. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$, es sei ferner $|z_0| \leq r < 1$. Dann liegt $f'(z_0)$ in dem abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung

$$(16) \quad s = \frac{1}{(1-z)^2}$$

entsteht.

Beweis. Wir stellen $\frac{f(z_0)}{z_0}$, $z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ und $f'(z_0)$ als Punkte der s -Ebene dar und setzen zur Abkürzung

$$s_1 = \frac{f(z_0)}{z_0}, \quad s_2 = z_0 \cdot \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}, \quad s_3 = s_1 \cdot s_2 = f'(z_0).$$

Nach Satz II liegen s_1 und s_2 auf der Kreisscheibe, die aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung

$$(17) \quad s = \frac{1}{1-z}$$

entsteht. Diese Kreisscheibe bilden wir durch die Funktion

$$(18) \quad \eta = \text{Log } s$$

schlicht-regulär auf das Gebiet B ab, wobei $\text{Log } s$ den Hauptwert des Logarithmus bedeutet. Dabei folgt:

1. B ist convex. Denn die Funktion

$$\eta = \text{Log } s = \text{Log } \frac{1}{1-z} = h(z)$$

führt $|z| \leq r < 1$ schlicht-regulär in B über. Hinreichend dafür, daß B convex ist, ist, daß die Ungleichung (4) in $|z| \leq r$ für die Funktion $h(z)$ erfüllt ist. Da

$$z \cdot \frac{h''(z)}{h'(z)} + 1 = \frac{1}{1-z}$$

ist, ist diese Bedingung für $r < 1$ erfüllt.

2. Es sei $\eta_1 = \text{Log } s_1$, $\eta_2 = \text{Log } s_2$. Dann liegt der Punkt

$$\eta_4 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = \frac{1}{2} \text{Log } (s_1 \cdot s_2) = \frac{1}{2} \text{Log } s_3$$

auf der Strecke $\eta_1 \dots \eta_2$, also auch, da B convex ist, in B .

Gehen wir vermittle der Funktion (18) zurück zur s -Ebene, so folgt aus 2., daß $s_4 = e^{\eta_4}$ auch auf der Kreisscheibe liegen muß, die aus $|z| \leq r$ vermöge der Abbildung (17) entsteht. Da

$$s_3 = f'(z_0) = s_4^2$$

ist, liegt folglich $f'(z_0)$ in dem abgeschlossenen Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung (16) entsteht, w. z. b. w.

Bemerkungen. 1. Das Gebiet, auf das $f'(z_0)$ durch diesen Satz eingeschränkt ist, kann für die Klasse $\mathfrak{R}$ nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion (15), die zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehört, ist

$$f'(z) \equiv \frac{1}{(1+z)^3}.$$

2. Der V. Satz bedeutet eine Verschärfung der Ungleichungen II) und III), die unmittelbar aus ihm abgelesen werden können.

3. Es möge hier noch ein zweiter Beweis von Satz V für die Funktionen mitgeteilt werden, die $|z| < 1$ auf schlichte, konvexe Polygone abbilden. Bekanntlich kann man diese Funktionen mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen Formel explizit darstellen, es ist also möglich, sie direkt abzuschätzen⁷⁾.

Wir beginnen mit einer Definition. Gegeben seien die n komplexen Zahlen

$$z_1, z_2, \dots, z_n,$$

über die wir voraussetzen:

$$\Re(z_k) > 0, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Ferner seien gegeben die n reellen, positiven Zahlen

$$k_1, k_2, \dots, k_n.$$

Unter dem allgemeinen, geometrischen Mittel der n Zahlen $z_1 \dots z_n$ verstehen wir:

$$\begin{aligned} M &= (z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \cdot z_3^{k_3} \dots z_n^{k_n})^{\frac{1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}} \\ &= \frac{1}{e^{k_1 + \dots + k_n}} \cdot (k_1 \operatorname{Log} z_1 + \dots + k_n \cdot \operatorname{Log} z_n), \end{aligned}$$

wobei unter $\operatorname{Log} z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) der Hauptwert des Logarithmus verstanden ist.

Über das allgemeine, geometrische Mittel beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. Die n Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n$ seien gelegen auf der Kreisscheibe

$$|z - a| \leq q \cdot a,$$

wo a reell, positiv, $0 \leq q < 1$. Dann liegt das allgemeine, geometrische Mittel dieser Zahlen ebenfalls auf der Kreisscheibe: $|z - a| \leq q \cdot a$, wie auch die Zahlen $k_1, k_2, \dots, k_n$ gewählt werden.

Beweis. Wir bilden $|z - a| \leq q \cdot a$ durch die Funktion

$$w = \operatorname{Log} z$$

schlicht-regulär auf das Gebiet B ab, wobei $\operatorname{Log} z$ den Hauptwert des Logarithmus bedeutet. Der Hilfssatz ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $w_0 = \operatorname{Log} M$ in B liegt. Es ist

$$w_0 = \operatorname{Log} M = \frac{\sum_{\lambda=1}^n k_\lambda \cdot \operatorname{Log} z_\lambda}{\sum_{\lambda=1}^n k_\lambda}.$$

⁷⁾ Auf diese Weise hat Herr Bieberbach die Ungleichung III) bewiesen.

a) Nach einem bekannten Satz über den allgemeinen Schwerpunkt von n Punkten ⁸⁾ liegt w_0 in dem kleinsten konvexen Polygon, das die Punkte $\text{Log } z_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) enthält.

b) B ist konvex. Denn die Funktion

$$z = c \cdot \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}}, \quad c > 0,$$

führt einen Kreis $|\bar{z}| \leq r < 1$ in $|z - a| \leq q \cdot a$ über, so daß

$$w = h(\bar{z}) = \text{Log} \left(c \cdot \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}} \right)$$

$|\bar{z}| \leq r$ schlicht-regulär auf B abbildet. B ist konvex, wenn für $h(\bar{z})$ die Ungleichung (4) in $|\bar{z}| \leq r$ erfüllt ist. Da $r < 1$ und

$$\bar{z} \cdot \frac{h''(\bar{z})}{h'(\bar{z})} + 1 = \frac{1 + \bar{z}^2}{1 - \bar{z}^2}$$

ist, ist dies der Fall.

Aus a) und b) folgt, daß $w_0 = \text{Log } M$ in B liegt, w. z. b. w.

Beweis des Satzes V für die konvexen Polygone.

Die Funktionen, die $|z| < 1$ auf konvexe Polygone schlicht-regulär abbilden, lauten

$$w = f(z) = \int_0^z (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z)^{u_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} \cdot z)^{u_2} \dots (1 - e^{i\alpha_n} \cdot z)^{u_n} \cdot dz;$$

wobei die α_k und μ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reelle Zahlen sind, die den beiden Bedingungen genügen:

$$1) \mu_k \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$2) \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k = -2.$$

Es ist

$$s = f'(z) = (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z)^{u_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} \cdot z)^{u_2} \dots (1 - e^{i\alpha_n} \cdot z)^{u_n}.$$

Ist nun $|z_0| \leq r < 1$, so lautet der zu beweisende Satz:

Unter den Voraussetzungen 1) und 2) liegt

$$s_3 = f'(z_0) = (1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0)^{u_1} \dots (1 - e^{i\alpha_n} \cdot z_0)^{u_n}$$

im abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung (16) entsteht.

⁸⁾ Siehe z. B. K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie, 2. Bd. (Samml. Götschen, 1928), § 1, Aufg. 1.

Zum Beweis setzen wir

$$\nu_k = -\mu_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$M = \{(1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0)^{\nu_1} \cdot (1 - e^{i\alpha_2} \cdot z_0)^{\nu_2} \dots (1 - e^{i\alpha_n} z_0)^{\nu_n}\}^{\frac{1}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}}.$$

Da die Punkte

$$(1 - e^{i\alpha_1} \cdot z_0), (1 - e^{i\alpha_2} z_0), \dots, (1 - e^{i\alpha_n} z_0)$$

in $|1 - s| \leq r$ liegen, liegt nach dem Hilfssatze auch M auf dieser Kreisscheibe, da $\nu_k \geq 0$ nach 1) ($k = 1, \dots, n$). Diese Scheibe entsteht aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung $s = 1 - z$. Folglich liegt M^2 in dem abgeschlossenen, schlichten Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung $s = (1 - z)^2$ entsteht. Da $\mu_k = -\nu_k$ ($k = 1, \dots, n$) ist, folgt wegen 2)

$$f'(z_0) = \frac{1}{M^2}.$$

Also liegt $f'(z_0)$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung (16) entsteht, w. z. b. w.

§ 4.

Ein Satz über die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$.

VI. Satz. Die Funktion $w = F(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. Ist $|z_0| \leq r < 1$, so liegt $\frac{F(z_0)}{z_0}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung

$$s = \frac{1}{(1 - z)^2}$$

entsteht.

Beweis. Es sei

$$F(z) = z \cdot f'(z)$$

gesetzt. Nach einer Bemerkung von I. W. Alexander⁹⁾ gehört $f(z)$ zur Klasse $\mathfrak{R}$. Da nun

$$\frac{F(z_0)}{z_0} = f'(z_0)$$

ist, so ist die Behauptung bewiesen, da nach Satz V $f'(z_0)$ in dem Gebiet liegt, das aus $|z| \leq r$ durch die Abbildung (16) entsteht.

Das Schrankengebiet für $\frac{F(z_0)}{z}$ kann für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$ nicht weiter verkleinert werden. Denn für die Funktion

$$w = F(z) \equiv \frac{z}{(1 - z)^2} = z + \dots,$$

die $|z| < 1$ auf das Schlitzgebiet abbildet, das entsteht, wenn die w -Ebene

⁹⁾ I. W. Alexander in Ann. of mat. (2) 17 (1915), S. 12—22. Man vergleiche L. Bieberbach, a. a. O., S. 303.

längs der negativ-reellen Achse vom Punkte $-\frac{1}{4}$ bis zum unendlich fernen Punkte aufgeschnitten wird, ist gerade

$$\frac{F(z)}{z} \equiv \frac{1}{(1-z)^2}.$$

§ 5.

Ein Koeffizientensatz.

Aus Satz I folgen notwendige Bedingungen für die Koeffizienten der Funktionen (1), die zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehören, indem man einen Satz von Carathéodory¹⁰⁾ auf die Funktionen

$$\frac{f(z)}{z}, \quad z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

anwendet.

1. Die Funktion

$$\frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_n z^{n-1} + \dots$$

erfüllt nach Satz I die Voraussetzungen des Satzes von Carathéodory. Nach diesem ist

$$|a_n| \leq 1 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

eine notwendige Bedingung, die bereits in der Löwnerschen Arbeit bewiesen wurde, indem unter Benutzung von (4) derselbe Satz auf die Funktion $(z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1)$ angewandt wurde.

2. Analog ergibt sich aus dem zweiten Ergebnis von Satz I der

VII. Satz. Die Funktion (1) gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Die in $|z| < 1$ konvergente Potenzreihenentwicklung von $\text{Log } \frac{f(z)}{z}$ laute

$$\text{Log } \frac{f(z)}{z} = b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n \cdot z^n + \dots$$

Dann ist

$$|b_n| \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in $|z| \leq r < 1$ darf gliedweise differenziert werden:

$$\frac{z \cdot f'(z) - f(z)}{z \cdot f(z)} = b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot z + \dots + n \cdot b_n \cdot z^{n-1} + \dots,$$

$$z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + b_1 \cdot z + 2 b_2 \cdot z^2 + \dots + n \cdot b_n \cdot z^n + \dots$$

¹⁰⁾ C. Carathéodory in Rend. di Palermo 32 (1911), S. 193—217. Der Satz lautet: Die Funktion $w = g(z) = 1 + c_1 \cdot z + \dots + c_n \cdot z^n + \dots$ sei in $|z| < 1$ regulär und es sei dort: $\Re g(z) \geq \frac{1}{2}$. Dann ist

$$|c_n| \leq 1 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Nach dem I. Satze ist in $|z| < 1$

$$\Re \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Also, lehrt der Satz von Carathéodory, ist

$$|n \cdot b_n| \leq 1, \quad \text{d. h.} \quad |b_n| \leq \frac{1}{n},$$

w. z. b. w.

Die Schranke des Satzes ist scharf und wird erreicht von der Funktion (15).

Für sie ist

$$\operatorname{Log} \frac{f(z)}{z} \equiv \operatorname{Log} \frac{1}{1+z} = -z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n} z^n + \dots$$

§ 6.

Die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{St}$.

Die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{St}$ bilden $|z| < 1$ schlicht-regulär auf konvexe bzw. sternförmige Gebiete mit 0 als Mittelpunkt ab, die zum Nullpunkt symmetrisch sind. Wir beweisen über sie zunächst den folgenden

Hilfssatz. Die ungerade Funktion

$$w = \Phi(z) = z + a_3 \cdot z^3 + \dots + a_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \dots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. Dann gehört auch die Funktion

$$(19) \quad w = F(z) = \Phi^2(\sqrt{z}) = z + \dots$$

zur Klasse $\mathfrak{St}$.

Beweis. a) Die Funktion (19) ist in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Denn wäre $F(z_1^3) = F(z_2^3)$ mit $z_1^3 \neq z_2^3$, so wäre $\Phi^2(z_1) = \Phi^2(z_2)$ und $\Phi(z_1) = \pm \Phi(z_2)$ mit $z_1 \neq \pm z_2$. Da $\Phi(z)$ in $|z| < 1$ schlicht ist, ist $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$. Also müßte $\Phi(z_1) = -\Phi(z_2)$ sein. Da aber $\Phi(z)$ ungerade ist, ist dies unmöglich, wenn $z_1 \neq -z_2$ ist. Also ist $F(z)$ in $|z| < 1$ schlicht.

b) Die Funktion (19) bildet $|z| < 1$ auf ein Sterngebiet mit 0 als Mittelpunkt ab, wenn in $|z| < 1$

$$(20) \quad \Re \left(z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} \right) \geq 0$$

ist¹¹⁾. Nun ist

$$F'(z) = \Phi'(\sqrt{z}) \cdot \Phi(\sqrt{z}) \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

¹¹⁾ Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $w = F(z) = z + \dots$ $|z| < 1$ auf ein Sterngebiet mit 0 als Mittelpunkt abbildet, ist, daß in $|z| < 1$ die Ungleichung (20) erfüllt ist. [R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, Oeversikt av Finska Vet. S. Förh. 63 (1920–21)].

Man vergleiche Hilfssatz 3 von § 1.

und also

$$(21) \quad z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)} = \sqrt{z} \cdot \frac{\Phi'(\sqrt{z})}{\Phi(\sqrt{z})}.$$

Mit $|z| < 1$ ist auch $|\sqrt{z}| < 1$. Da $\Phi(z)$ zur Klasse $\mathfrak{St}$ gehört, ist ¹¹⁾

$$\Re\left(\sqrt{z} \cdot \frac{\Phi'(\sqrt{z})}{\Phi(\sqrt{z})}\right) \geq 0.$$

Also ist wegen (21) auch (20) in $|z| < 1$ erfüllt.

VIII. Satz ¹²⁾. Die ungerade Funktion

$$w = \Phi(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \dots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. Dann ist

$$1) \quad \Re\left(\frac{\Phi(z)}{z}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \text{in } |z| < 1,$$

$$2) \quad |a_{2n+1}| \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Beweis. Mit $\Phi(z)$ gehört nach dem Hilfssatz auch die Funktion

$$F(z) = \Phi^2(\sqrt{z})$$

zur Klasse $\mathfrak{St}$. Ist $|z_0| \leq r < 1$, so liegt nach Satz VI $\frac{F(z_0^2)}{z_0^2}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leq r^2 < 1$ durch die Abbildung (16) entsteht. Da

$$\left(\frac{\Phi(z_0)}{z_0}\right)^2 = \frac{\Phi^2(z_0)}{z_0^2} = \frac{F(z_0^2)}{z_0^2}$$

ist, liegt $\frac{\Phi(z_0)}{z_0}$ in dem Gebiet, das aus $|z| \leq r^2$ durch die Abbildung (17) entsteht. Für $r \rightarrow 1$ folgt hieraus die erste Behauptung.

Die zweite folgt aus der ersten, da die Funktion

$$\frac{\Phi(z)}{z} = 1 + a_3 z^2 + \dots + a_{2n+1} \cdot z^{2n} + \dots$$

die Voraussetzungen des Carathéodoryschen Koeffizientensatzes ¹⁰⁾ erfüllt. Nach diesem ist $|a_{2n+1}| \leq 1$.

Bemerkungen. 1. Beide Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion

$$w = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + \dots + z^{2n+1} + \dots,$$

die $|z| < 1$ auf das Schlitzgebiet abbildet, das entsteht, wenn die w -Ebene längs der imaginären Achse von $-\frac{i}{2}$ bis $-\infty$, und von $+\frac{i}{2}$ bis $+\infty$ aufgeschnitten wird.

¹²⁾ Die Koeffizientenabschätzungen und die scharfen Abschätzungen von $|f(z)|$ und $|f'(z)|$ für die ungeraden Funktionen der Klassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{St}$ finden sich bei J. Privalov a. a. O.

2. Wie aus dem Beweise hervorgeht, liegt $\frac{\Phi(z)}{z}$ für $|z| = r < 1$ auf der Kreisscheibe, die über der Strecke $\frac{1}{1+r^2} \cdots \frac{1}{1-r^2}$ der reellen Achse als Durchmesser steht. Daraus folgt

$$\frac{1}{1+r^2} \leq \left| \frac{\Phi(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{1-r^2}.$$

und durch Multiplikation mit r

$$\frac{r}{1+r^2} \leq |\Phi(z)| \leq \frac{r}{1-r^2} \quad (\text{J. Privalov}).$$

IX. Satz. Die ungerade Funktion

$$w = \varphi(z) = z + b_3 z^3 + \dots + b_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \dots$$

gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Dann gilt

$$1) \quad \Re \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right) \geq \frac{\pi}{4} \quad \text{in} \quad |z| < 1,$$

$$2) \quad |b_{2n+1}| \leq \frac{1}{2n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Beweis. 1. Nach I. W. Alexander⁹⁾ gehört die Funktion

$$\Phi(z) = z \cdot \varphi'(z)$$

zur Klasse $\mathfrak{G}t$, und ist mit $\varphi(z)$ ungerade. Nach Bemerkung 2 zu Satz VIII ist also

$$(22) \quad \Re \left(\frac{\Phi(z)}{z} \right) \geq \frac{1}{1+r^2},$$

wo $|z| \leq r < 1$ ist. Zum Beweis dürfen wir uns auf positiv-reelle z beschränken. Es sei $z_0 = r_0 < 1$. Dann ist

$$(23) \quad \varphi(z_0) = \int_0^{z_0} \frac{\Phi(z)}{z} \cdot dz.$$

Wir wählen als Integrationsweg die positiv-reelle Achse und erhalten, wenn

wir $z = x + i \cdot y$, $\frac{\Phi(z)}{z} = g(x, y) + i \cdot h(x, y)$ setzen

$$\varphi(z_0) = \int_0^{r_0} \{g(x, 0) + i h(x, 0)\} dx,$$

$$(24) \quad \Re \varphi(z_0) = \int_0^{r_0} g(x, 0) dx.$$

Aus (22) und (24) folgt

$$\Re \varphi(z_0) \geq \int_0^{r_0} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg r_0,$$

wobei der Zweig zu nehmen ist, der für $r_0 = 0$ verschwindet. Folglich ist

$$(25) \quad \Re \left(\frac{\varphi(z_0)}{z_0} \right) \geq \frac{\arctg r_0}{r_0}.$$

Diese Gleichung ist auch für komplexe $|z_0| = r_0$ richtig. Da die Funktion $\frac{1}{r_0} \cdot \arctan r_0$ mit wachsendem r_0 monoton abnimmt, folgt aus (25)

$$\Re \left(\frac{\varphi(z_0)}{z_0} \right) \geq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Die Funktion

$\Phi(z) = z \cdot \varphi'(z) = z + 3b_3 z^3 + \dots + (2n+1) \cdot b_{2n+1} \cdot z^{2n+1} + \dots$
ist ungerade und gehört zur Klasse $\mathfrak{S}$. Nach Satz VIII ist

$$|(2n+1) \cdot b_{2n+1}| \leq 1, \text{ d. h. } |b_{2n+1}| \leq \frac{1}{2n+1},$$

w. z. b. w.

Beide Schranken sind scharf und werden erreicht von der Funktion

$$w = \varphi(z) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

die $|z| < 1$ schlicht-regulär auf den Parallelstreifen

$$-\frac{\pi}{4} < \Im(w) < +\frac{\pi}{4}$$

abbildet.

II. Teil.

Über Verschärfungen eines Satzes von Szegő.

§ 1.

Der Szegö'sche Satz der Klasse $\mathfrak{R}$.

X. Satz. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{R}$. Von zwei Randpunkten des Bildgebietes G von $|z| < 1$, die auf derselben Nullgeraden, aber auf verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen, ist mindestens einer vom Nullpunkt um mindestens $\frac{\pi}{4}$ entfernt.

Beweis. 1. Es genügt, den Satz für die Abbildungen auf Winkelräume bzw. Parallelstreifen zu beweisen. Es sei $C_1 O C_2$ eine beliebige Nullgerade, C_1 und C_2 die Randpunkte von G auf ihr. Wir zeichnen in C_1 und C_2 die Stützgeraden von G , die einen Winkelraum G_1 einschließen, der G im Innern enthält. Die Funktion $w = g(z) = r \cdot z + \dots$, wo $r > 0$, bilde $|z| < 1$ auf G_1 ab. Wir können schließen¹³⁾:

$$r \geq 1.$$

¹³⁾ Denn die Funktion $w_1 = g^{-1}(f(z)) = \frac{1}{r}z + \dots$, wo $w_1 = g^{-1}(w)$ die Umkehrfunktion von $w = g(w_1)$ ist, bildet $|z| < 1$ auf ein Gebiet ab, das im Innern von $|w_1| < 1$ liegt. Nach dem Schwarz'schen Lemma ist $\frac{1}{r} \leq 1$, wobei das Gleichheitszeichen nur eintritt, wenn $w_1 = g^{-1}(f(z))$ die Identität ist.

Die Funktion $w = h(z) = \frac{1}{r} \cdot g(z) = z + \dots$ bildet $|z| < 1$ auf ein Gebiet G_2 ab, das aus C_1 durch Streckung entsteht. Die Randgeraden von G_2 schneiden wir mit $C_1 \dots C_2$ in A_1 und A_2 . Es ist $|A_k| \leq |C_k|$ ($k = 1, 2$), d. h. der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, das für mindestens ein k , ($k = 1, 2$), $|A_k| \geq \frac{\pi}{4}$ ist.

2. Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien nicht parallel. Der Scheitelpunkt von G_2 sei S , es sei $OS = a$ und $\alpha \cdot \pi$ ($0 < \alpha < 1$) sei der Winkel, den die Randstrahlen von G_2 bilden. Endlich sei φ der Winkel, den SO mit einem dieser Randstrahlen bildet und der bestimmt ist durch die Festsetzung

$$0 < \varphi \leq \frac{\alpha \pi}{2}.$$

B_1 und B_2 seien dann zwei Randpunkte von G_2 , die auf demselben Nullstrahl, aber auf verschiedenen Seiten von O liegen, und für die $|B_1| = |B_2|$ ist. $|B_1|$ ist eine Funktion von φ und α :

$$|B_1| = F(\varphi; \alpha).$$

Der Satz ist nun für den Fall 2 bewiesen, wenn wir zeigen:

$$F(\varphi; \alpha) \geq \frac{\pi}{4} \quad \text{für } 0 < \alpha < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi \leq \frac{\alpha \cdot \pi}{2}.$$

Ist nämlich $|A_1| \geq |A_2|$, so tragen wir auf OA_2 die Strecke $OA_3 = |A_1|$ ab. Die Strahlen $S \dots A_1$ und $S \dots A_3$ schließen einen Winkelraum G_3 ein, der G_2 im Innern enthält. Die Funktion $w = g_1(z) = r_1 \cdot z + \dots$, wo $r_1 > 0$, bilde $|z| < 1$ auf G_3 ab. Wir schließen wieder¹³⁾

$$r_1 \geq 1.$$

Die Funktion $w = h_1(z) = \frac{1}{r_1} \cdot g_1(z) = z + \dots$ bildet $|z| < 1$ auf G_4

ab, das aus G_3 durch Streckung entsteht. Schneidet man die Randstrahlen von G_4 mit $A_1 A_3$ in b_1 und b_2 , so ist

- 1) $|b_1| = |b_2|$,
- 2) $|A_1| \geq |b_1|$.

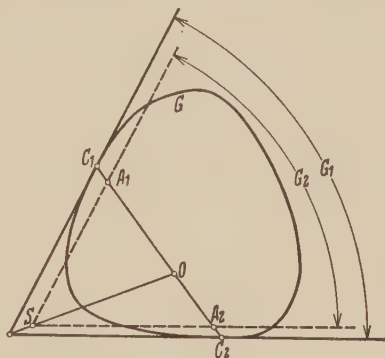


Fig. 1.

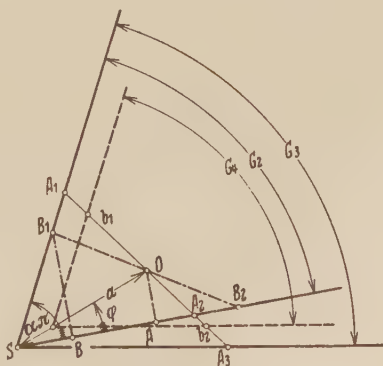


Fig. 2.

Es genügt also, daß wir nachweisen: $|b_1| \geq \frac{\pi}{4}$. Dies geschieht durch eine Untersuchung von $F(\varphi; \alpha)$.

Die Funktion $F(\varphi; \alpha)$. Die Funktion

$$w_1 = \left(i \frac{1+z}{1-z} + b \right)^\alpha$$

bildet $|z| < 1$ auf $0 < \arg w_1 < \alpha\pi$ ab, wenn $b > 0$ reell ist. Es ist

$$w_1(0) = (i+b)^\alpha; \quad w_1'(0) = 2\alpha i \cdot (i+b)^{\alpha-1}.$$

Also bildet

$$(26) \quad w = h(z) = e^{ik} \cdot \frac{\left(i \frac{1+z}{1-z} + b \right)^\alpha - (i+b)^\alpha}{2\alpha \cdot i \cdot (i+b)^{\alpha-1}} = e^{ik} z + \dots,$$

wo k reell, $|z| < 1$ auf G_2 ab. Aus (26) folgt

$$\varphi = \arg w_1(0) = \alpha \cdot \arg b,$$

$$a = \frac{|w_1(0)|}{|w_1'(0)|} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{2\alpha};$$

oder, a als Funktion von α und φ ausgedrückt,

$$(27) \quad a = \frac{1}{2\alpha \cdot \sin \frac{\varphi}{\alpha}}$$

Sind nun φ der Winkel zwischen SB_2 und SO , SB und SA die Projektionen von SB_1 und SO auf SB_2 , so ist

$$BA = AB_2$$

und

$$|B_1|^2 = OA^2 + BA^2 = OA^2 + (SA - SB)^2,$$

d. h.

$$|B_1|^2 = \Phi(\varphi; \alpha) = \alpha^2 \cdot \left\{ \sin^2 \varphi + \left(\cos \varphi - \frac{2 \sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha \pi} \right)^2 \right\}$$

$$(28) \quad \Phi(\varphi; \alpha) = F^2(\varphi; \alpha) = \frac{1}{4\alpha^2 \sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{ 1 - \frac{2 \cdot \sin 2\varphi}{\operatorname{tg} \alpha \pi} + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha \pi} (1 - \cos 2\varphi) \right\}.$$

Nach leichten Umformungen erhält man aus (28)

$$(29) \quad \Phi(\varphi; \alpha) = \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha \pi} - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha \pi} \cdot \frac{\cos(\alpha\pi - 2\varphi)}{\cos \alpha \pi} \right\}.$$

a) Es sei $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Wächst φ von 0 bis $\frac{\alpha\pi}{2}$, so wächst $\cos(\alpha\pi - 2\varphi)$ monoton, d. h. der Wert der Klammer in (29) wird kleiner. Also ist, da auch mit wachsendem φ $\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}}$ kleiner wird,

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi; \alpha) &\geq \Phi\left(\frac{\alpha\pi}{2}; \alpha\right) = \frac{1}{4\alpha^2} \cdot \left\{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi} - \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi} \cdot \frac{1}{\cos \alpha\pi}\right\} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \cdot \left\{1 - \frac{4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot \cos \alpha\pi}\right\},\end{aligned}$$

$$\Phi(\varphi; \alpha) \geq \frac{1}{4\alpha^2} \cdot \left\{1 - \frac{\cos \alpha\pi}{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}\right\} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{4\alpha^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{4\alpha^2} > \frac{\frac{\alpha^2 \pi^2}{4}}{4\alpha^2} = \frac{\pi^2}{16},$$

d. h. $F(\varphi; \alpha) > \frac{\pi}{4}$, w. z. b. w.

b) Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. In diesem Intervall ist

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi; \alpha) &= \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot \cos \alpha\pi} \cdot [\cos \alpha\pi - \cos(\alpha\pi - 2\varphi)]\right\} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}} \cdot \left\{1 + \frac{4 \sin(\alpha\pi - \varphi) \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot |\cos \alpha\pi|}\right\} \\ &\geq \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{\sin(\alpha\pi - \varphi)}{\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot |\cos \alpha\pi| \cdot \sin \frac{\varphi}{\alpha}},\end{aligned}$$

da $\frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{\alpha}} \geq \alpha$ ist. Also ist

$$\Phi(\varphi; \alpha) \geq \frac{1}{4 \cdot \alpha^2} + \frac{\sin \alpha\pi \cdot \cos \varphi}{\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot |\cos \alpha\pi| \sin \frac{\varphi}{\alpha}} + \frac{|\cos \alpha\pi| \cdot \sin \varphi}{\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\pi \cdot |\cos \alpha\pi| \cdot \sin \frac{\varphi}{\alpha}};$$

und, da der zweite Bruch jedenfalls positiv ist,

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi; \alpha) &\geq \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{\sin \varphi}{\alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\pi \sin \frac{\varphi}{\alpha}} \\ &> \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha\pi} = \frac{\sin^2 \alpha\pi + \cos^2 \alpha\pi + (4\alpha^2 - 1) \cdot \cos^2 \alpha\pi}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \alpha\pi} \\ &> \frac{1}{4\alpha^2 \cdot \sin^2 \alpha\pi}.\end{aligned}$$

Folglich ist hier

$$F(\varphi; \alpha) > \frac{1}{2\alpha \sin \alpha\pi}.$$

Diese Funktion hat in dem betrachteten Intervall ein Minimum an der Stelle α_0 , die bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \pi = -\alpha_0 \pi.$$

Wir schließen α_0 zwischen die Grenzen

$$\frac{11}{18} < \alpha_0 < \frac{2}{3}$$

ein und erhalten somit

$$F(\varphi; \alpha) > \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{11}{18} \pi} > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0,94} > \frac{\pi}{4},$$

w. z. b. w.

3. Die Stützgeraden in C_1 und C_2 seien parallel. G_1 und G_2 sind Parallelstreifen. Für mindestens ein k ($k = 1, 2$) ist

$$|A_k| \geq a_1 \geq a_2,$$

wo a_1 und a_2 die Abstände des Punktes 0 von den Randgeraden von G_2 sind. G_2 liegt im Innern eines Streifens G_3 von derselben Richtung und der Breite $2 \cdot a_1$, auf dessen Mittellinie 0 liegt. Durch die Funktion

$$w = \frac{r_2 \cdot e^{ik}}{2} \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z} = r_2 \cdot e^{ik} \cdot z + \dots,$$

wo k und $r_2 > 0$ reell sind, wird $z < 1$ auf G_3 abgebildet. Es ist $r_2 \geq 1^{13}$). Da die Breite von G_3 gleich $r_2 \cdot \frac{\pi}{2}$ ist, folgt

$$2 \cdot a_1 = r_2 \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$a_1 \geq \frac{\pi}{4}.$$

w. z. b. w.

§ 2.

Eine Verallgemeinerung für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{St}$.

XI. Satz¹⁴). Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ gehöre zur Klasse $\mathfrak{St}$. Legen wir durch den Nullpunkt der w -Ebene n gleichwinklig verteilte Strahlen, so möge jeder von ihnen den Rand des Bildgebietes G von $|z| < 1$ in einem Punkte a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) treffen, der von den Randpunkten auf diesem Strahl die kleinste Entfernung von 0 hat. Für mindestens ein k ist dann

$$|a_k| \geq \frac{1}{n \sqrt{4}}.$$

¹⁴) Dieser Satz findet sich, wie ich nachträglich erfuhr, bereits in einer Note von M. Lavrentieff in den C. R. 191 (1930), S. 827.

Beweis. Bilden wir $|z| < 1$ durch die Funktion $w = s(z) = z + \dots$ auf das Gebiet G_1 ab, das entsteht, wenn wir die w -Ebene längs der n gleichwinklig verteilten Nullstrahlen vom Punkte A_k bis zum unendlich fernen Punkte aufschneiden, wo $|A_k| = \text{const.}$ für $k = 1, \dots, n$, so ist

$$(30) \quad |A_k| = \frac{1}{\sqrt[n]{4}}.$$

Zum Beweis darf angenommen werden, daß einer der n Strahlen die positiv-reelle Achse ist. Es sei $A_1 > 0$. Ist nun

$$w = k(z) \equiv \frac{z}{(1+z)^2} = z + \dots,$$

so bildet die Funktion $w_1 = k(z^n) = z^n + \dots$ den Sektor des Einheitskreises $|z| < 1$, $(k-1) \cdot \frac{2\pi}{n} < \arg z < k \cdot \frac{2\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) auf die w_1 -Ebene ab, die längs der positiv-reellen Achse von 0 bis ∞ aufgeschnitten ist. Dabei wird der Radius $|z| < 1$, $\arg z = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ ($k = 1, \dots, n$) auf die Strecke $0 \dots \frac{1}{4}$ abgebildet. Durch $w_1 = k(z^n)$ wird also $|z| < 1$ auf eine n -blättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten in 0 und dem unendlich fernen Punkte abgebildet, deren einzelne Blätter von $\frac{1}{4}$ bis ∞ längs der reellen Achse aufgeschnitten sind. Durch $w = s(z) = \sqrt[n]{k(z^n)}^* = z + \dots$ wird somit $|z| < 1$ auf ein Gebiet G_2 abgebildet, das aus G_1 durch Drehung um 0 entsteht. Hieraus folgt (30).

Wir schneiden nun die w -Ebene längs der n Nullstrahlen von den Punkten A_k bis zum unendlich fernen Punkte auf. Dadurch entsteht das Gebiet G_1 . Wäre für alle k ($k = 1, 2, \dots, n$) $|a_k| < \frac{1}{\sqrt[n]{4}}$, so wäre G ein

Teilgebiet von G_1 , da es in Bezug auf 0 sternförmig ist. Dann würde die Funktion $\eta = s^{-1}(f(z)) = z + \dots$ $|z| < 1$ auf ein Teilgebiet von $|\eta| < 1$ abbilden. Dies ist aber unmöglich.

Wie aus dem Beweis hervorgeht, kann die Schranke nur im Falle der Identität $f(z) \equiv s(z)$ angenommen werden.

§ 3.

Ein Satz über schlichte Funktionen.

XII. Satz. Die Funktion $w = f(z) = z + \dots$ bilde $|z| < 1$ schlicht-regulär auf das Gebiet G ab. Dann enthält G im Innern eine Strecke, deren einer Endpunkt der Nullpunkt ist und deren Länge größer als 0,73 ist.

Beweis. C sei die Bildkurve von $|z| = 0,64$, vermittelt von $w = f(z)$. Nach einem Satze von A. Marx¹⁵⁾ wird C von jedem Nullstrahl in nur einem Punkte geschnitten. Da

$$\max_{|z|=r < 1} |f(z)| \geq r$$

ist, gibt es auf C einen Punkt a , für den $|a| \geq 0,64$ ist. Wir fragen nach den Randpunkten von G , die auf dem Nullstrahl nach a liegen. c sei derjenige, der von 0 die kleinste Entfernung hat. c kann nicht im Innern von C liegen. Nach dem Marxschen Satz ist also $|c| > |a|$. Die Funktion

$$(31) \quad w = h(z) = \frac{c \cdot f(z)}{c - f(z)} = z + \dots$$

ist in $|z| < 1$ schlicht-regulär. Nach dem Koebeschen Verzerrungssatz ist also

$$(32) \quad \left| \frac{c \cdot f(z)}{c - f(z)} \right| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}.$$

Aus (32) folgt

$$\begin{aligned} \frac{|c \cdot a|}{|c - a|} &\leq \frac{0,64}{0,36^2} \\ |c - a| &= |c| - |a| \geq |c| \cdot |a| \cdot \frac{0,36^2}{0,64}, \\ (33) \quad |c| &\geq \frac{|a|}{1 - |a| \cdot \frac{0,36^2}{0,64}}. \end{aligned}$$

Da $|a| \geq 0,64$ ist, folgt

$$|c| \geq \frac{0,64}{1 - 0,64 \cdot \frac{0,36^2}{0,64}} > 0,73,$$

w. z. b. w.

¹⁵⁾ A. Marx, Zwei Sätze über schlichte Funktionen. (Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1929, S. 96—100.)

Ein singuläres bewegungsinvariantes Variationsproblem.

Von

Robert Irrgang in Wahlstatt.

Inhaltsübersicht.

- I. Teil. Herleitung der Differentialgleichungen der Extremalen und ihre Integration.
Von den Lagrangeschen Gleichungen zu den Differentialgleichungen für κ und τ .
Untersuchung und Integration der Differentialgleichungen.
- II. Teil. Hinreichende Bedingungen für ein Extremum.
Die Ableitung des Extremalenintegrals nach Parametern.
Die Jacobische Bedingung.
Die Weierstraßsche Konstruktion und $\mathcal{E}$ -Funktion.
- III. Teil. Beispiele.
Das Variationsproblem der Affinlänge im Raum.
 f als Funktion von $\frac{\kappa}{\tau}$.
Vollständige Aufstellung der Extremalen für $f = \tau^{1/2}$.

Einleitung.

Das bewegungsinvariante Variationsproblem $\int_{s_0}^{s_1} f(\kappa) ds = \text{extrem.}$ mit κ als Krümmung und s als Bogenlänge einer Raumkurve ist in Band I der Differentialgeometrie¹⁾ von W. Blaschke mit seiner vollständigen Lösung dargestellt. J. Radon hat bei dem allgemeineren Problem für ebene Kurven²⁾

$$\int_{s_0}^{s_1} f\left(x, y, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \Theta, \kappa\right) ds = \text{extrem.} \quad \left(\frac{d\Theta}{ds} = \kappa\right)$$

hinreichende Bedingungen für ein Extrem angegeben.

¹⁾ 3. Aufl., Berlin 1930. 2. Kap. § 26/27.

²⁾ Sitzungsberichte Wien, Math.-nat. Klasse 119 (1910), S. 1257 f.

Hier soll die nächste sich bietende Aufgabe, das bewegungsinvariante Variationsproblem $\int_{s_0}^{s_1} f(\kappa, \tau) ds = \text{extrem.}$ mit κ als 1. und τ als 2. Krümmung einer Raumkurve behandelt werden. Da der Integrand in τ die Ableitungen der Koordinaten nach s bis zur dritten Ordnung enthält, ist als allgemeine Lösung eine Schar von ∞^{12} Raumkurven zu erwarten. Es wird sich jedoch zeigen: Die Aufgabe ist ein singuläres Problem, dessen allgemeine Extremalen eine ∞^{10} -fache Raumkurvenschar bilden. Dabei wird nur die Lösung eines Systems zweier Differentialgleichungen 1. Ordnung und von Quadraturen nötig sein. Trotz der Singularität des Problems werden sich hinreichende Bedingungen für ein Extrem nach der Weierstraßschen Theorie aufstellen lassen.

I. Teil.

Herleitung der Differentialgleichungen der Extremalen und ihre Integration.

Von den Lagrangeschen Gleichungen zu den Differentialgleichungen für κ und τ .

Zwei Punkte im Raum mit vorgegebenen begleitenden Dreibeinen sollen durch eine Raumkurve verbunden werden, so daß längs der Kurve das Integral

$$\int_{s_0}^{s_1} f(\kappa, \tau) ds$$

einen extremalen Wert erhält. Die Aufgabe nimmt die Form eines Lagrangeschen Problems an, wenn κ und τ neben den Koordinaten x und den Komponenten der Grundvektoren (Tangente, Haupt- und Binormale: t, n, b) als selbständige Veränderliche betrachtet werden:

$$y_\varrho, \varrho = 1, 2, \dots, 14, \text{ also } y_1 = x_1, \dots, y_4 = t_1 \text{ usw. } y_{13} = \kappa, y_{14} = \tau.$$

Dazu werden als Nebenbedingungen gestellt die Definition des Tangentenvektors und die Frenetschen Formeln:

$$\begin{aligned} x' - t &= 0 \\ t' - \kappa n &= 0 \\ n' + \kappa t - \tau b &= 0 \\ b' + \tau n &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder kurz } \varphi_h = 0, \quad h = 1, 2, \dots, 12$$

(Striche bedeuten stets Ableitungen nach der Bogenlänge s).

Die zwölf Lagrangeschen Multiplikatoren, die zu je drei zu den vier Gruppen der vektoriell zusammengefaßten Nebenbedingungen gehören, seien durch

$$\lambda_h(s), h = 1, 2, \dots, 12 \quad \text{oder} \quad \lambda_i^x, \lambda_i^t, \lambda_i^n, \lambda_i^b, i = 1, 2, 3.$$

bezeichnet oder auch vektoriell zusammengefaßt in

$$A^x, A^t, A^n, A^b.$$

Damit wird die Funktion

$$F(y_4 \dots y_{14}, y'_1 \dots y'_{12}, \lambda_1 \dots \lambda_{12}) = f + \lambda_h \varphi_h, \quad h = 1, 2, \dots, 12$$

definiert. (Nach doppelt auftretenden Stellenzeigern ist zu summieren.)

Nun zeigt das Verschwinden der Determinante³⁾

$$R = \begin{vmatrix} F_{y'_1 y'_1} & \dots & F_{y'_1 y'_{14}} & \varphi_1 y'_1 & \cdot & \varphi_{12} y'_1 \\ F_{y'_{14} y'_1} & \dots & F_{y'_{14} y'_{14}} & \varphi_{14} y'_{14} & \cdot & \varphi_{12} y'_{14} \\ \varphi_1 y'_1 & \dots & \varphi_1 y'_{14} & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ \varphi_{12} y'_1 & \dots & \varphi_{12} y'_{14} & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix},$$

daß hier ein singuläres Problem vorliegt. Trotzdem können die Lagrangeschen Gleichungen aufgestellt, die Multiplikatoren bestimmt und Extremalendifferentialgleichungen für $\kappa(s)$ und $\tau(s)$ bestimmt werden.

Die erste Variation des Integrals über F ist

$$\delta \int_{s_0}^{s_1} F ds = [(F - y'_q F_{y'_q}) \delta s + F_{y'_q} \delta y_q]_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} \left(F_{y_q} - \frac{d}{ds} F_{y'_q} \right) (\delta y_q - y'_q \delta s) ds.$$

Ihr Verschwinden ist die erste Bedingung des Extremums und gibt die Lagrangeschen Gleichungen:

$$F_{y_q} - \frac{d}{ds} (F_{y'_q}) = 0 \quad q = 1, 2, \dots, 14.$$

Sie haben, da F die Unabhängige s nicht direkt enthält, ein Integral⁴⁾

$$F - y'_q F_{y'_q} = \text{const.}$$

Diese Konstante muß gleich Null gewählt werden, damit in der Variationsgleichung alle vor das Integral getretenen Glieder verschwinden, $\delta s|_{s_0}^{s_1}$ aber beliebig bleibt; denn in den Endpunkten sind alle Größen $y_1 \dots y_{12}$ vorgegeben, es ist $F_{y'_{13}} = F_{y'_{14}} = 0$, die Bogenlänge der Extremalen zwischen den Endpunkten dagegen soll keinen vorgeschriebenen Wert haben.

³⁾ J. Radon, Das Problem von Lagrange, Hamburg. Abh. 6 (1928), S. 282.

⁴⁾ O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 583.

Die Lagrangeschen Gleichungen und ihr Integral sind

$$(1, 2, 3) \quad -A^x = 0$$

$$(4, 5, 6) \quad -A^x + \kappa A^n - A^y = 0$$

$$(7, 8, 9) \quad -\kappa A^t + \tau A^b - A^y = 0$$

$$(10, 11, 12) \quad -\tau A^n - A^b = 0$$

$$(13) \quad f_x - A^t n + A^n t = 0$$

$$(14) \quad f_x - A^n b + A^b n = 0$$

$$(15) \quad f - A^x t - \kappa (A^t n - A^n t) - \tau (A^n b - A^b n) = 0.$$

Nach den drei ersten Gleichungen sind $A^x = A$ oder $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ reine Konstante. Nur wenn $f = \kappa f_x + \tau f_x$ ist, müssen wegen des Integrals (15), in das (13) und (14) einzusetzen sind, alle drei Konstanten verschwinden.

Die Gleichungen (4) bis (12) bilden drei lineare Differentialgleichungssysteme von der Form

$$\lambda^t = * + \kappa \lambda^n + * - \lambda$$

$$\lambda^{n'} = -\kappa \lambda^t + * + \tau \lambda^b$$

$$\lambda^{b'} = * - \tau \lambda^n + *.$$

Der Lösungsweg ist: Übergang zum homogenen System und danach Variation der Konstanten.

Jedes homogene Differentialgleichungssystem

$$\lambda^t = * + \kappa \lambda^n + *$$

$$\lambda^{n'} = -\kappa \lambda^t + * + \tau \lambda^b$$

$$\lambda^{b'} = * - \tau \lambda^n + *$$

hat drei in s stetige Lösungssysteme

$$\lambda_k^t, \lambda_k^n, \lambda_k^b. \quad k = 1, 2, 3.$$

Der Vergleich mit den Frenetschen Formeln zeigt, daß die allgemeinste Lösung der homogenen Systeme sich mit neun Konstanten ω_{ij} so schreibt:

$$\lambda_i^t = \omega_{ij} t_j, \quad \lambda_i^n = \omega_{ij} n_j, \quad \lambda_i^b = \omega_{ij} b_j \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Für $f = \kappa f_x + \tau f_x$ ist dies schon die Lösung der Gleichungen (4) bis (12).

Für die inhomogenen Systeme ist bei Variation der bisherigen Konstanten

$$\omega'_{ij} t_j = -\lambda_i, \quad \omega'_{ij} n_j = 0, \quad \omega'_{ij} b_j = 0.$$

Die lineare Kombination dieser drei Gleichungen mit den Komponenten der drei Grundvektoren gibt

$$\omega'_{ij} = -\lambda_i t_j = -\lambda_i x'_j$$

und nach Integration mit neun neuen Konstanten μ_{ij} :

$$\omega_{ij} = \mu_{ij} - \lambda_i x_j.$$

Nunmehr sind die zwölf Multiplikatoren völlig bestimmt zu

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i^x &= \lambda_i \\ \lambda_i^t &= (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) t_j \\ \lambda_i^n &= (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) n_j \\ \lambda_i^b &= (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) b_j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, 3; \\ \text{über } j = 1, 2, 3 \\ \text{zu summieren.} \end{array}$$

Wenn von den Lagrangeschen Gleichungen (13) mit κ und (14) mit τ multipliziert und von (15) abgezogen werden, entsteht

$$(A) \quad f - \kappa f_\kappa - \tau f_\tau = \Lambda t.$$

Da diese Gleichung nur κ , τ , Λ und einen der Grundvektoren enthält, liegt es nahe, ähnliche Gleichungen aus (13) und (14) zu gewinnen. Die Werte der Multiplikatoren in sie eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} f_\kappa &= (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) (t_j n_i - n_j t_i) & i = 1, 2, 3. \\ f_\tau &= (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) (n_j b_i - b_j n_i) & j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist stets eine Komponente des Vektorprodukts zweier Grundvektoren, und es ist nur auf das voneinander unabhängige Auftreten der beiden Summationszeiger i und j zu achten. Die drei voneinander und von Null verschiedenen μ -Differenzen werden in einem „Konstantenvektor“ N zusammengefaßt und es wird

$$\begin{aligned} f_\kappa &= N b + (\Lambda x b) \\ f_\tau &= N t + (\Lambda x t). \end{aligned}$$

(Die Klammern bedeuten dreireihige Determinanten.) Eine Differentiation nach s gibt

$$\begin{aligned} f'_\kappa &= -\tau [N n + (\Lambda x n)] - \Lambda n \\ f'_\tau &= \kappa [N n + (\Lambda x n)], \end{aligned}$$

und durch Zusammenfassung entsteht eine ähnliche Gleichung wie (A):

$$(B) \quad -f_\kappa - \frac{\tau}{\kappa} f'_\tau = \Lambda n.$$

Um auch einen Ausdruck für Λb zu erhalten, wird man die Gleichung für f'_τ wegen ihrer Homogenität in κ bevorzugen. Multiplikation mit dem Wert $1/\kappa$, der ebenso wie κ als nirgends verschwindend vorausgesetzt werden muß, und Differentiation nach s führt auf

$$\left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)' = N n' + (\Lambda x n') + \Lambda b.$$

Nach der Nebenbedingung (Frenetschen Formel) $n' = -\kappa t + \tau b$ und mit Benutzung der Gleichungen für f_κ und f_τ erhält man

$$(C) \quad \left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)' + \kappa f_\tau - \tau f_\kappa = \Lambda b.$$

Es sind mit (A), (B), (C) drei Funktionen gefunden worden, die nur von κ , τ und deren Ableitungen nach s abhängen und die gleich sind linearen Kombinationen mit gleichen konstanten Koeffizienten der Komponenten der drei Grundvektoren. Wie bei diesen gilt also auch für die drei Funktionen, die direkt gleich A , B , C gesetzt werden sollen, das Frenetsche Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} A &= f - \kappa f_{\kappa} - \tau f_{\tau} & \frac{d}{ds} A &= * + \kappa B + * \\ B &= -f'_{\kappa} - \frac{\tau}{\kappa} f'_{\tau} & \frac{d}{ds} B &= -\kappa A + * + \tau C \\ C &= \left(\frac{1}{\kappa} f'_{\tau}\right)' + \kappa f_{\tau} - \tau f_{\kappa} & \frac{d}{ds} C &= * - \tau B + *. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung erweist sich als Identität. Die zweite und dritte sind zwei Differentialgleichungen für κ und τ , an die wir die weitere Bestimmung der Extremalen anknüpfen.

Für $f = \kappa f_{\kappa} + \tau f_{\tau}$, also $A = 0$ sind f_{τ} , $\frac{1}{\kappa} f'_{\tau}$, f_{κ} drei Funktionen mit denselben Eigenschaften wie sonst A , B , C .

Untersuchung und Integration der Differentialgleichungen.

Um zu prüfen, bis zu welcher Ableitungshöhe die beiden Krümmungen durch die Differentialgleichungen

$$(E_1) \quad B' + \kappa A - \tau C = 0$$

$$(E_2) \quad C' + \tau B = 0$$

verknüpft sind, werden diese in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung verwandelt:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{ds} &= \lambda & \frac{d\tau}{ds} &= \sigma \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \mu & \frac{d\sigma}{ds} &= \varrho \end{aligned}$$

$$\left(f_{\kappa\kappa} + 2\frac{\tau}{\kappa} f_{\kappa\tau}\right)\mu + \left(f_{\kappa\tau} + 2\frac{\tau}{\kappa} f_{\tau\tau}\right)\varrho + [\kappa, \tau, \lambda, \sigma] = 0$$

$$\frac{1}{\kappa} f_{\kappa\tau} \frac{d\mu}{ds} + \frac{1}{\kappa} f_{\tau\tau} \frac{d\varrho}{ds} + [\kappa, \tau, \lambda, \sigma, \mu, \varrho] = 0,$$

[...] bedeuten Summen von Aggregaten der in ihnen enthaltenen Größen.

Eine der beiden Ableitungen $\frac{d\mu}{ds}$ oder $\frac{d\varrho}{ds}$ läßt sich nach Differentiation der vorletzten Gleichung aus dieser und der letzten eliminieren, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{\kappa\kappa} & f_{\kappa\tau} \\ f_{\kappa\tau} & f_{\tau\tau} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Dies ist also die Bedingung dafür, daß die Extremalen Lösungen eines Systems 5. Ordnung sind, und daß sie somit fünf, oder da s nicht direkt auftritt, vier wesentliche Integrationskonstante enthalten. Sie haben die Form der natürlichen Gleichungen

$$\kappa = \kappa(s - s_0, a, b, c, d), \quad \tau = \tau(s - s_0, a, b, c, d).$$

Die Ordnung des Differentialgleichungssystems erniedrigt sich, wenn f eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$f_{\kappa\kappa} f_{\tau\tau} - f_{\kappa\tau}^2 = 0$$

ist. Diese Gleichung charakterisiert in einem Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten κ, τ, f die abwickelbaren Flächen.

Von den Flächen dieser Art seien als einfachste Fälle nur Zylinder und Kegel herausgegriffen. Das Variationsproblem ist also insbesondere dann im höheren Grade singular, wenn

1. f eine Funktion von τ allein ist,
2. f in κ und τ positiv homogen erster Stufe ist.

1) Für $f(\tau)$ heißen die beiden letzten Gleichungen des Systems

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\tau}{\kappa} f_{\tau\tau} \rho - 2 \frac{\tau}{\kappa^2} f_{\tau\tau} \lambda \sigma + [\kappa, \tau, \sigma] &= 0 \\ f_{\tau\tau} \frac{d\rho}{ds} - \frac{1}{\kappa} f_{\tau\tau} \mu \sigma + [\kappa, \tau, \lambda, \sigma, \rho] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Voraussetzung } f_{\tau\tau} \neq 0.$$

Da $\frac{d\lambda}{ds} = \mu$ ist, fällt bei der Elimination von $\frac{d\rho}{ds}$ auch μ heraus und es bleibt nur ein Differentialgleichungssystem 3. Ordnung zu lösen:

$$\frac{d\kappa}{ds} = [\kappa, \tau, \sigma], \quad \frac{d\tau}{ds} = \sigma, \quad \frac{d\sigma}{ds} = [\kappa, \tau, \sigma].$$

Die natürlichen Gleichungen der Extremalen enthalten nur zwei wesentliche Konstante

$$\kappa = \kappa(s - s_0, a, b), \quad \tau = \tau(s - s_0, a, b).$$

2) Bei $f = \kappa f_{\kappa} + \tau f_{\tau}$ verschwinden die Funktionen A und B identisch, C dagegen nicht. Als einzige Differentialgleichung bleibt $C = 0$ bestehen. Eine der beiden Krümmungen ist nach Willkür als Funktion von s wählbar. Da C Ableitungen bis zur zweiten Ordnung enthält, haben die Extremalen die Form:

$$\kappa = \kappa(s, a, b), \quad \tau = \varphi(s).$$

Die Integration der Differentialgleichungen kann sehr gefördert werden, da sich allgemein zwei Integrale angeben lassen.

Die Ableitungsgleichungen der drei Funktionen A, B, C bilden ein schiefsymmetrisches Frenetsystem. Darum ist ein erstes Integral

$$(I_1) \quad A^2 + B^2 + C^2 = a^2.$$

Beachten wir nun die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} f_x &= * + \kappa \frac{1}{\kappa} f'_x + * \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} f'_x \right) &= -\kappa f_x + * + \tau f_x + C \\ \frac{d}{ds} f_x &= * - \tau \frac{1}{\kappa} f'_x + * - B,\end{aligned}$$

so ergibt sich leicht, daß

$$(I_2) \quad f_x A + \frac{1}{\kappa} f'_x B + f_x C = b$$

ein anderes Integral der Differentialgleichungen ist.

$$a) \quad f_{xx} f_{\tau\tau} - f_{x\tau}^2 \neq 0.$$

Wenn die Determinante der zweiten Ableitungen von f nicht verschwindet, bilden die Differentialgleichungen ein System 5. Ordnung. Da s nicht direkt auftritt und zwei Integrale bekannt sind, läßt sich die Ordnung um drei Einheiten erniedrigen, so daß nur ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen bleibt.

Die Elimination von C , d. h. der zweiten Ableitungen aus (I_1) und (I_2) gibt

$$G_0(\kappa, \tau, \kappa', \tau'; a, b) = 0.$$

Es ist möglich, aus (E_1) und (I_2) die zweiten Ableitungen der Krümmungen zu berechnen, da die Determinante der Koeffizienten wieder die der Voraussetzung ist. So wird etwa $\kappa'' = G_1(\kappa, \tau, \kappa', \tau'; b)$. Zusammen mit $G_0 = 0$ ergibt dies, wenn man κ als unabhängige Variable einführt, ein System von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung; man erhält schließlich nach seiner Integration die natürlichen Gleichungen der Extremalen in der Form:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(\kappa; a, b, c, d) \\ s - s_0 &= s(\kappa; a, b, c, d) - s_0.\end{aligned}$$

$$b) \quad f_{xx} f_{\tau\tau} - f_{x\tau}^2 = 0.$$

1. Für f als Funktion von τ allein läßt sich das Differentialgleichungssystem 3. Ordnung mit Hilfe der beiden Integrale auf eine einzige Quadratur zurückführen. Diese Rechnung soll ausführlich angegeben werden.

$$(E_1) \quad 2\tau \left(\frac{1}{\kappa} f'_x \right)' + \tau' \left(\frac{1}{\kappa} f'_x \right) + 2\kappa \tau f_x - \kappa f = 0$$

$$(I_1) \quad (f - \tau f_x)^2 + \left(\frac{\tau}{\kappa} f'_x \right)^2 + \left[\left(\frac{1}{\kappa} f'_x \right)' + \kappa f_x \right]^2 = a^2$$

$$(I_2) \quad f_x (f - \tau f_x) - \tau \left(\frac{1}{\kappa} f'_x \right)^2 = b.$$

Durch (I₁) und (I₂) können in (E₁) die Größe $\frac{1}{\kappa} f'_\tau$ und ihre Ableitung nach s eliminiert werden, wobei gleichzeitig κ herausfällt:

$$\left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)' + \kappa f_\tau = \frac{1}{2\tau} \left[\kappa f - \tau' \left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right) \right] = \frac{\tau'}{2\tau} \left[\frac{f f_{\tau\tau} - \left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)^2}{\frac{1}{\kappa} f'_\tau} \right],$$

$$\left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)' + \kappa f_\tau = \sqrt{a^2 - (f - \tau f_\tau)^2 - \left(\frac{\tau}{\kappa} f'_\tau\right)^2},$$

$$\frac{1}{\kappa} f'_\tau = \frac{1}{\kappa} f_{\tau\tau} \tau' = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sqrt{f_\tau (f - \tau f_\tau) - b}.$$

Also

$$\frac{\tau'}{2\tau} \left[\frac{\tau f f_{\tau\tau} - f_\tau (f - \tau f_\tau) + b}{\sqrt{\tau} \sqrt{f_\tau (f - \tau f_\tau) - b}} \right] = \sqrt{a^2 - (f - \tau f_\tau)^2 - \tau f_\tau (f - \tau f_\tau) + \tau b}.$$

Durch Elimination von τ' aus den beiden letzten Gleichungen und durch eine Quadratur entstehen die natürlichen Gleichungen:

$$\kappa = \frac{2\tau^2 f_{\tau\tau} \sqrt{a^2 - f(f - \tau f_\tau) + \tau b}}{\tau f f_{\tau\tau} - f_\tau (f - \tau f_\tau) + b},$$

$$s - s_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{[\tau f f_{\tau\tau} - f_\tau (f - \tau f_\tau) + b] d\tau}{2\tau \sqrt{\tau} \sqrt{f_\tau (f - \tau f_\tau) - b} \sqrt{a^2 - f(f - \tau f_\tau) + \tau b}}.$$

2. Wenn f in κ und τ positiv homogen erster Stufe ist und deshalb A und B identisch verschwinden, nur $C = 0$ als einzige Differentialgleichung übrigbleibt, verlieren auch die beiden ersten Integrale ihren Sinn. Da aber dann die Ableitungen von f_τ , $\frac{1}{\kappa} f'_\tau$, f_x ein Frenetsystem bilden (S. 388), ist ein erstes Integral

$$f_\tau^2 + \left(\frac{1}{\kappa} f'_\tau\right)^2 + f_x^2 = a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{f_{\kappa\tau}} \sqrt{a^2 - f_x^2 - f_\tau^2}.$$

Eine der beiden Krümmungen bleibt willkürlich, die andere ist aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung zu bestimmen:

$$\tau = \varphi(s), \text{ Umkehrfunktion } s = \sigma(\tau), \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{d\tau},$$

$$\frac{d\kappa}{d\tau} - \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\kappa \sigma'}{f_{\kappa\tau}} \sqrt{a^2 - f_x^2 - f_\tau^2}.$$

Der Übergang von den natürlichen Gleichungen der Extremalen zu den Koordinatengleichungen erfolgt auf dieselbe Weise, wie er für das

Problem $\int_{s_0}^{s_1} f(x) ds = \text{extrem. angegeben wurde (Anm. 1). Es wird darum}$

genügen, die Formeln zusammenzustellen, wobei anstelle A, B, C im Falle $f = \kappa f_\kappa + \tau f_\tau$ die Funktionen $f_\tau, \frac{1}{\kappa} f'_\tau, f_\kappa$ treten:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta &= \operatorname{tg} \left[\int_{s_0}^s \frac{a \kappa C \, ds}{a^2 - A^2} \right], \\ x &= \frac{1}{a} \int_{s_0}^s \sqrt{a^2 - A^2} \cdot \sin \Theta \cdot ds, \\ y &= \frac{1}{a} \int_{s_0}^s \sqrt{a^2 - A^2} \cdot \cos \Theta \cdot ds, \quad z = \frac{1}{a} \int_{s_0}^s A \, ds. \end{aligned}$$

Diese Lösung ohne weitere Integrationskonstante, als in κ und τ enthalten sind, ist eine ganz spezielle. Da die Raumkurve durch Angabe der natürlichen Gleichungen nur bis auf Drehung und Verschiebung im Raum festgelegt ist, entstehen die allgemeinen Extremalen durch Drehung und Verschiebung der speziellen, d. h. durch die allgemeinste lineare orthogonale Transformation ihrer Koordinaten. Damit werden den Konstanten in κ und τ weitere sechs hinzugefügt.

Wenn $f_{\kappa\kappa} f_{\tau\tau} - f_{\kappa\tau}^2 \neq 0$ vorausgesetzt wird, enthalten die allgemeinen Koordinatengleichungen der Extremalen *zehn Konstante*. Diese Festwerte kann man so zu bestimmen suchen, daß die gesuchte Extremale durch vorgegebene Endpunkte geht und das Dreibein der Grundvektoren in jedem Endpunkte eine vorgeschriebene Lage hat. Denn der Durchgang einer Raumkurve durch einen Punkt kann durch Wahl zweier Konstanten, die Richtung der Tangente durch zwei und die Richtung der Hauptnormalen danach durch eine Konstante festgelegt werden.

Wenn $f_{\kappa\kappa} f_{\tau\tau} - f_{\kappa\tau}^2 = 0$ ist, hängen die endlichen Extremalengleichungen von *acht Konstanten* ab. Bei dieser höheren Singularität des Problems läßt sich also in den vorgegebenen Endpunkten nur die Richtung eines Grundvektors, z. B. der Tangente vorschreiben.

II. Teil.

Hinreichende Bedingungen für ein Extremum.

Die Ableitung des Extremalenintegrals nach Parametern.

Die Lösungen der Extremalendifferentialgleichungen seien — für den gewöhnlichen Fall — eine zehnparametrische Schar

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s - s_0, a_1, \dots, a_{10}).$$

Wenn in das Grundintegral des Lagrangeschen Problems die aus diesen Extremalen errechneten Grundvektoren und Krümmungen eingesetzt werden, erhält man das Extremalenintegral:

$$J_{\text{extr.}} = \int_{s_0}^s F[\kappa(s - s_0, a_\nu), \tau(s - s_0, a_\nu), \dots] ds. \quad \nu = 1, \dots, 10.$$

Hier ist die obere Grenze s beweglich, im Anfangspunkt s_0 setzen wir bei der folgenden Rechnung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(0, a_\nu)$ und das begleitende Dreibein als fest voraus. Dadurch werden von den zehn Konstanten a_ν fünf festgelegt, so daß noch ebensoviele frei bleiben. Wenn hiervon die partielle Ableitung nach a_ν genommen wird, kann partiell integriert werden wie bei der Variationsbildung (S. 383). Es ergibt sich, da die Extremalen die Lagrangeschen Gleichungen und ihr Integral identisch erfüllen:

$$\frac{\partial J_{\text{extr.}}}{\partial a_\nu} = F_{\nu q}' \frac{\partial y_q}{\partial a_\nu} \Big|_s$$

ausführlich

$$\frac{\partial J_{\text{extr.}}}{\partial a_\nu} = A \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial a_\nu} + (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) \left(t_j \frac{\partial t_i}{\partial a_\nu} + n_j \frac{\partial n_i}{\partial a_\nu} + b_j \frac{\partial b_i}{\partial a_\nu} \right) \Big|_s, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Es bleibt die Aufgabe, die Ableitungen der Koordinaten und Grundvektoren nach a_ν auf eine einheitliche Form zu bringen.

Die Nebenbedingungen, das Frenetsystem, gebildet für die Grundvektoren der Extremalen wird nach a_ν differenziert und nach s integriert, und zwar (wie bei der Bestimmung der Multiplikatoren) zunächst das homogene System, darauf das inhomogene durch Variation der Konstanten. Der Index ν bei a wird vorläufig weggelassen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial t_i}{\partial a} \right) &= \kappa \frac{\partial n_i}{\partial a} + n_i \frac{\partial \kappa}{\partial a}, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial n_i}{\partial a} \right) &= -\kappa \frac{\partial t_i}{\partial a} + \tau \frac{\partial b_i}{\partial a} - t_i \frac{\partial \kappa}{\partial a} + b_i \frac{\partial \tau}{\partial a}, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial b_i}{\partial a} \right) &= -\tau \frac{\partial n_i}{\partial a} - n_i \frac{\partial \tau}{\partial a}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$\frac{\partial t_i}{\partial a} = c_{ij} t_j, \quad \frac{\partial n_i}{\partial a} = c_{ij} n_j, \quad \frac{\partial b_i}{\partial a} = c_{ij} b_j.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems müssen wir die $c_{ij}(s)$ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} c'_{ij} t_j &= * + n_i \frac{\partial \kappa}{\partial a} + *, \\ c'_{ij} n_j &= -t_i \frac{\partial \kappa}{\partial a} + * + b_i \frac{\partial \tau}{\partial a}, \\ c'_{ij} b_j &= * - n_i \frac{\partial \tau}{\partial a} + * \end{aligned}$$

und den Anfangsbedingungen $c_{ij}(s_0) = 0$ bestimmen. Das Produkt jeder der — bei festem i — drei Gleichungen mit je einer Komponente von gleichem Index der Grundvektoren ergibt summiert

$$c'_{ij} = - (t_i n_j - n_i t_j) \frac{\partial \kappa}{\partial a} - (n_i b_j - b_i n_j) \frac{\partial \tau}{\partial a}.$$

Integriert man von s_0 bis s , so kann man wegen $c_{ij} + c_{ji} = 0$ die c_{ij} durch folgenden Vektor darstellen:

$$\mathbf{v} = - \int_{s_0}^s \left(\mathbf{b} \frac{\partial \kappa}{\partial a} + \mathbf{t} \frac{\partial \tau}{\partial a} \right) ds; \quad v_1 = c_{23}, \quad v_2 = c_{31}, \quad v_3 = c_{12}.$$

Die gesuchten Ableitungen der Grundvektoren nach a sind damit bestimmt und werden noch umgeformt nach dem Muster

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_i}{\partial a} &= c_{12} t_2 + c_{13} t_3 = t_2 v_3 - v_2 t_3 = (\mathbf{t} \times \mathbf{v})_1 = [(\mathbf{n} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{v}]_1 \\ &= [\mathbf{b} (\mathbf{n} \mathbf{v}) - \mathbf{n} (\mathbf{b} \mathbf{v})]_1. \end{aligned}$$

Die skalaren Produkte werden abgekürzt durch

$$\mathbf{t} \mathbf{v} = u_1, \quad \mathbf{n} \mathbf{v} = u_2, \quad \mathbf{b} \mathbf{v} = u_3.$$

So wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial a} &= u_2 \mathbf{b} - u_3 \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a} &= u_3 \mathbf{t} - u_1 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a} &= u_1 \mathbf{n} - u_2 \mathbf{t}. \end{aligned}$$

Die Ableitung des Koordinatenvektors nach a wird auf die Grundvektoren bezogen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a} = w_1 \mathbf{t} + w_2 \mathbf{n} + w_3 \mathbf{b}.$$

Damit sind drei Funktionen von s definiert:

$$w_1 = \mathbf{t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a}, \quad w_2 = \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a}, \quad w_3 = \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a},$$

die ebenso wie u_1, u_2, u_3 von den Parametern a_ν abhängen. Jedem der freien a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, 5$) entspricht ein Funktionensystem $(u_{1\nu}, u_{2\nu}, u_{3\nu}, w_{1\nu}, w_{2\nu}, w_{3\nu})$.

Die Ableitung des Extremalenintegrals wird nun

$$\frac{\partial J_{\text{extr.}}}{\partial a_\nu} = A \mathbf{t} w_{1\nu} + A \mathbf{n} w_{2\nu} + A \mathbf{b} w_{3\nu}$$

$$+ (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) [(t_j b_i - b_j t_i) u_{2\nu} + (n_j t_i - t_j n_i) u_{3\nu} + (b_j n_i - n_j b_i) u_{1\nu}] |^s.$$

Wenn die Werte der beiden Funktionensysteme (S. 385—386)

$$A \mathbf{t} = A \text{ usw. und } (\mu_{ij} - \lambda_i x_j) (t_j n_i - n_j t_i) = f_x \text{ usw.}$$

eingesetzt werden und wieder geschrieben wird

$$-u_{3v} = n \frac{\partial t}{\partial a_v}, \quad u_{2v} = b \frac{\partial t}{\partial a_v}, \quad -u_{1v} = b \frac{\partial n}{\partial a_v},$$

ist die Ableitung des Extremalenintegrals nach einem Parameter endgültig umgeformt zu

$$\frac{\partial J_{\text{extr.}}}{\partial a_v} = (A t + B n + C b) \frac{\partial x}{\partial a_v} + \left(f_x n + \frac{1}{x} f'_x b \right) \frac{\partial t}{\partial a_v} + f_x b \frac{\partial n}{\partial a_v} \Big|_s.$$

Für spätere Verwendung sei noch der Zusammenhang zwischen den Größen u und w bestimmt. Durch Ableitung der Gleichung für $\frac{\partial x}{\partial a}$ nach s findet man

$$\begin{aligned} 0 &= w'_1 - x w_2, & -u_3 &= w'_3 + x w_1 - \tau w_3, \\ u_2 &= w'_3 + \tau w_2, & -u_1 &= \frac{1}{x} w'_3 + 2 \frac{\tau}{x} w'_2 + \tau w_1 + \frac{\tau'}{x} w_3 - \frac{\tau^2}{x} w_3. \end{aligned}$$

Die Jacobische Bedingung.

Voraussetzung für die folgenden Entwicklungen ist

$$f_{xx} f_{\tau\tau} - f_{x\tau}^2 \neq 0.$$

Dann enthalten die allgemeinen Extremalen zehn Parameter. Es werden Bedingungen gesucht, daß eine Extremale $\mathfrak{E}$ dieser Schar dem Integral

$\int_{s_0}^{s_1} f(x, \tau) ds$ einen extremalen Wert erteilt, wenn $\mathfrak{E}$ zwei vorgegebene Dreibeine im Raume verbindet, also die Punkte 1 und 2 mit bestimmten Grundvektorenrichtungen in ihnen.

Durch einen Punkt 0 auf $\mathfrak{E}$, derart, daß die Bogenlängenwerte $s_0 < s_1 < s_2$ sind, wird eine Extremalenschar gelegt, genauer: aus den ∞^{10} allgemeinen Extremalen wird durch die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} x_0 &= x(s - s_0, a_1, \dots, a_{10}), \\ t_{10} &= t_1(s - s_0, a_1, \dots, a_{10}), \\ t_{20} &= t_2(s - s_0, a_1, \dots, a_{10}), \\ n_{10} &= n_1(s - s_0, a_1, \dots, a_{10}), \end{aligned}$$

eine fünfparametrische Schar (S) ausgesondert, die im Punkt 0 das gleiche feste begleitende Dreibein wie $\mathfrak{E}$ hat. Dies ist möglich, da die hierzu nötige Funktionaldeterminante als nicht verschwindender Minor der Funktionaldeterminante nach $s - s_0, a_1, \dots, a_{10}$ der elf Funktionen $x, t_1, t_2, n_1, x', \tau, x''$ exi-

stiert, die ein Fundamentalsystem der Differentialgleichungen $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ bilden (S.6). Die fünfparametrische Schar wird dargestellt durch

$$(S) \quad \begin{aligned} x &= x(s, a_1, \dots, a_5), \\ t_1 &= t_1(s, a_1, \dots, a_5), \\ t_2 &= t_2(s, a_1, \dots, a_5), \\ n_1 &= n_1(s, a_1, \dots, a_5). \end{aligned}$$

Die Kurven der Schar (S) sollen ein Feld bilden. Es soll also möglich sein, zu einem beliebigen Dreieck in der Umgebung der Extremalen $\mathfrak{C}$ eindeutig eine Extremale der Schar (S) zu bestimmen, die dieses beliebige Dreieck mit dem Anfangsdreieck verbindet. Die Bedingung dafür ist die Auflösbarkeit nach a_ν und s der sechs Gleichungen, die ein solches beliebiges Dreieck aus der Schar (S) aussondern, es ist die *Jakobische Bedingung*

$$\Delta(s, a_1 \dots a_5) = \frac{\partial(x_1 x_2 x_3 t_1 t_2 n_1)}{\partial(s, a_1 \dots a_5)} \neq 0.$$

Die Determinante Δ läßt sich noch in eine übersichtlichere Form bringen. Mit den S. 12 eingeführten w -Größen werden die drei ersten Zeilen, wobei der Index ν fünf Spalten ersetzen soll,

$$\begin{vmatrix} t_1 & w_{1\nu} & t_1 - w_{2\nu} n_1 - w_{3\nu} b_1 \\ t_2 & w_{1\nu} t_2 - w_{2\nu} n_2 - w_{3\nu} b_2 \\ t_3 & w_{1\nu} t_3 - w_{2\nu} n_3 - w_{3\nu} b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & w_{1\nu} \\ 0 & w_{2\nu} \\ 0 & w_{3\nu} \end{vmatrix}.$$

Die restlichen drei Zeilen sind mit den u -Größen

$$\begin{vmatrix} x n_1 & u_{2\nu} b_1 - u_{3\nu} n_1 \\ x n_2 & u_{2\nu} b_2 - u_{3\nu} n_2 \\ -x t_1 + \tau b_1 & u_{3\nu} t_1 - u_{1\nu} b_1 \end{vmatrix} = b_1 t_3 \begin{vmatrix} x & -u_{3\nu} \\ 0 & u_{2\nu} \\ \tau & -u_{1\nu} \end{vmatrix}.$$

Schließlich kann die ganze Determinante vermöge des Zusammenhangs von u und w nach S. 13 als Funktion von $w_{2\nu}$ und $w_{3\nu}$ und ihren Ableitungen dargestellt werden:

$$\Delta = b_1 t_3 \begin{vmatrix} 1 & w_{1\nu} \\ 0 & w_{2\nu} \\ 0 & w_{3\nu} \\ x & -u_{3\nu} \\ 0 & u_{2\nu} \\ \tau & -u_{1\nu} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} b_1 t_3 \begin{vmatrix} w_{21} \dots w_{25} \\ w_{31} \dots w_{35} \\ w'_{21} \dots w'_{25} \\ w'_{31} \dots w'_{35} \\ w''_{31} \dots w''_{35} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} b_1 t_3 \cdot W.$$

Von den Grundvektorkomponenten der Extremalen sind willkürlich $t_1 t_2 n_1$ als unabhängige bevorzugt worden. Das ist keine Einschränkung,

solange sich aus den Einheits- und Orthogonalitätsrelationen die übrigen Komponenten berechnen lassen, z. B. aus

$$t^2 - 1 = 0, \quad n^2 - 1 = 0, \quad tn = 0, \quad (t \times n) - b = 0.$$

Deren Funktionaldeterminante nach den zu bestimmenden Komponenten $t_3 n_3 n_3 b_1 b_2 b_3$ ist gerade $\Delta_1 = -2 b_1 t_3$ und muß als von Null verschieden vorausgesetzt werden, andernfalls sind andere unabhängige Komponenten zu wählen. Solche sind stückweise immer zu finden, die w aber sind symmetrisch gebaut.

So bleibt als Jacobische Bedingung, da $1/\kappa$ schon S. 5 als nicht verschwindend vorausgesetzt war:

$$W \neq 0.$$

Die Wurzeln von $W(s) = 0$ definieren die zu 0 konjugierten Punkte.

Die Weierstraßsche Konstruktion und $\mathcal{E}$ -Funktion ⁵⁾.

Die Punkte 1, 2 der Extremalen $\mathcal{E}$ seien durch eine Vergleichskurve $\mathcal{Q}$ verbunden mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{Q}$ hat in den Punkten 1 und 2 mit $\mathcal{E}$ das begleitende Dreiein gemein.

2. Die Oskulationsinvarianten κ und $\bar{\tau}$ auf $\mathcal{Q}$ seien reguläre Funktionen des Bogenlängenparameters σ .

Werden die sechs Größen $x_1 x_2 x_3 t_1 t_2 n_1$ als Koordinaten in einem sechsstufigen Raume $\mathfrak{R}$ gedeutet, in dem dann den Kurven $\mathcal{E}$ und $\mathcal{Q}$ je eine einfache Mannigfaltigkeit $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{Q}'$ entspricht, so soll

3. $\mathcal{Q}'$ ganz in einer Umgebung $[\varepsilon]$ der Kurve $\mathcal{E}'$ liegen, d. h. die sechs Koordinaten von $\mathcal{Q}'$ und $\mathcal{E}'$ sollen sich zwischen 1 und 2 um weniger als ε unterscheiden und natürlich müssen die Komponenten kleiner gleich 1 bleiben.

Wenn die Jacobische Bedingung erfüllt ist und wenn man ε hinreichend klein wählt, wird das Gebiet $[\varepsilon]$ von einem Extremalenfeld bedeckt. Die Gleichungen der Schar (S) lassen sich dann nach s und den Parametern a , eindeutig durch stetige Funktionen, die sogenannten inversen Funktionen des Feldes, auflösen.

Das Gebiet $[\varepsilon]$ um $\mathcal{E}$ wird von den Extremalen der Schar (S) genau einfach überdeckt, durch jeden Punkt von $\mathcal{Q}$ läuft also nach Voraussetzung 3 genau ein Exemplar der Schar, anders gesagt: man kann stets eine der Schar (S) angehörige Extremale konstruieren, die in einem all-

⁵⁾ Besonders nach A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, 2. Auflage, Braunschweig 1925, § 37.

gemeinen Punkt 3 der Kurve $\mathfrak{Q}$ mit ihr das begleitende Dreieck gemein hat.

Dies ist der Inhalt der Weierstraßschen Konstruktion. Analytisch ist es so auszudrücken: Für jeden Punkt 3 auf $\mathfrak{Q}$ gilt

$$\bar{x} = \bar{x}, \bar{t} = \bar{t}, \bar{n} = \bar{n}, \bar{b} = \bar{b}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial \sigma} = \bar{t}, \frac{\partial \bar{t}}{\partial \sigma} = \bar{x} \bar{n}, \frac{\partial \bar{n}}{\partial \sigma} = -\bar{x} \bar{t} + \bar{\tau} \bar{b}.$$

(Überstrichene Buchstaben gehören zu $\mathfrak{Q}$, die andern zu der Extremalenschar (S) , σ ist die Bogenlänge auf $\mathfrak{Q}$).

Das Integral $\int_0^3 F ds$ längs dem Bogen 03 einer Extremale der Schar (S) soll mit dem Integral längs dem Bogen 13 der Vergleichskurve verglichen werden. Ihre Differenz nach σ abgeleitet ist die Weierstraßsche $\mathcal{G}$ -Funktion:

$$\frac{d}{d\sigma} (J_{13} - J_{03 \text{ extr.}}) = \mathcal{G}.$$

Die Ableitung des Extremalenintegrals kann aus den schon gegebenen partiellen Ableitungen nach a_v zusammengesetzt werden. Denn es existieren die inversen Funktionen des Feldes, s und a_v , im Punkt 3 sind stetige Funktionen der Koordinaten der Kurve $\mathfrak{Q}'$ in diesem Punkte, also sind diese Größen Funktionen von σ , es gilt für den Punkt 3

$$\frac{d}{d\sigma} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{d\sigma} + \frac{\partial}{\partial a_v} \frac{da_v}{d\sigma}.$$

So wird nach Ausführung der Weierstraßschen Konstruktion:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{03 \text{ extr.}}}{d\sigma} &= (At + Bn + Cb) \bar{t} + \left(f_x n + \frac{1}{x} f'_x b \right) \bar{x} \bar{n} + f_\tau b (-\bar{x} \bar{t} + \bar{\tau} \bar{b}) \\ &= f + (\bar{x} - x) f_x + (\bar{\tau} - \tau) f_\tau. \end{aligned}$$

Das Vergleichskurvenintegral nach σ abgeleitet ist, da σ von 1 an gemessen werden soll und auch hier die Nebenbedingungen (S. 2) erfüllt sein müssen:

$$\frac{dJ_{13}}{d\sigma} = f(\bar{x}, \bar{\tau}) = \bar{f}.$$

Damit ist die Form der $\mathcal{G}$ -Funktion gefunden

$$\frac{d(J_{13} - J_{03 \text{ extr.}})}{d\sigma} = \bar{f} - f - (\bar{x} - x) f_x - (\bar{\tau} - \tau) f_\tau = \mathcal{G}(x, \tau, \bar{x}, \bar{\tau}).$$

Diese Gleichung längs $\mathfrak{Q}$ von 1 bis 3 integriert gibt die Differenz

$$J_{12} - J_{12 \text{ extr.}} = \int_1^2 \mathcal{G}(x, \tau, \bar{x}, \bar{\tau}) d\sigma.$$

Wenn nun $\mathcal{G}$ für alle zum Vergleich herangezogenen Kurven $\mathfrak{Q}$ ein festes Vorzeichen hat, so hat die Integraldifferenz dasselbe feste Vorzeichen.

Unter dieser Voraussetzung gilt als

Weierstraßsche Bedingung:

Die Raumkurve $\mathfrak{C}$ liefert ein Minimum, wenn $\mathcal{E} > 0$, sie liefert ein Maximum, wenn $\mathcal{E} < 0$.

Es ist $\mathcal{E}$ der quadratische Rest der Taylorentwicklung von $f(\bar{\kappa}, \bar{\tau})$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\bar{\kappa} - \kappa)^2 f_{\kappa\kappa}(\tilde{\kappa}, \tilde{\tau}) + (\bar{\kappa} - \kappa)(\bar{\tau} - \tau) f_{\kappa\tau}(\tilde{\kappa}, \tilde{\tau}) + \frac{1}{2}(\bar{\tau} - \tau)^2 f_{\tau\tau}(\tilde{\kappa}, \tilde{\tau})$$

für $\tilde{\kappa} = \kappa + \vartheta(\bar{\kappa} - \kappa)$, $\tilde{\tau} = \tau + \vartheta(\bar{\tau} - \tau)$, $0 < \vartheta < 1$.

Die *Bedingung von Clebsch* gibt hinreichende Kriterien, wann diese quadratische Form und damit $\mathcal{E}$ definit ist:

Die Extremale gibt ein *schwaches* Minimum, d. h. gegenüber solchen Vergleichskurven, deren Krümmungen sich von denen der Extremale hinreichend wenig unterscheiden, wenn auf der Extremale

$$f_{\kappa\kappa}f_{\tau\tau} - f_{\kappa\tau}^2 > 0 \quad \text{und} \quad f_{\kappa\kappa} > 0 \quad \text{gilt.}$$

Die Extremale gibt ein *starkes* Minimum, wenn für alle $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$ in der Umgebung der Extremalen, soweit Vergleichskurven betrachtet werden,

$$f_{\kappa\kappa}f_{\tau\tau} - f_{\kappa\tau}^2 > 0 \quad \text{und} \quad f_{\kappa\kappa} > 0 \quad \text{gilt.}$$

Der Ausdruck „starkes“ Minimum bedeutet, daß von den Vergleichskurven genügende Nachbarschaft des begleitenden Dreibeins zum Dreibein der Extremale verlangt wird.

III. Teil.

Beispiele.

Das Variationsproblem der Affinlänge im Raum⁶⁾.

Das Variationsproblem der räumlichen Affinlänge läßt sich als eine der hier zu behandelnden Aufgaben darstellen, da zwischen der Affinlänge σ , der Bogenlänge s und den Krümmungen κ , τ der Zusammenhang besteht

$$d\sigma = (\kappa^2 \tau)^{1/6} ds, \quad \text{und demnach} \quad f = (\kappa^2 \tau)^{1/6}$$

zu setzen ist.

Da es nicht sogleich gelingt, die Krümmungen κ und τ aus den Extremalendifferentialgleichungen zu bestimmen, wird hier gezeigt: Wenn x die Extremale und σ deren Affinlänge ist, so verschwindet die vierte Ableitung von x nach σ gleichzeitig mit den Extremalendifferentialgleichungen.

⁶⁾ Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. II, Berlin 1923, § 29, 30, 36.

Der Vektor $\frac{d^4 \mathbf{x}}{d\sigma^4}$ ist zu berechnen nach der Formel $\frac{d}{d\sigma} = \frac{1}{f} \frac{d}{ds}$. Wenn dabei die Frenetschen Formeln und der Wert

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{3} \frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{1}{6} \frac{\tau'}{\tau}$$

benutzt werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \mathbf{x}}{d\sigma^4} &= \frac{\mathbf{x}'}{f^4} \left[-\frac{f'''}{f} + 10 \frac{f' f''}{f^2} - 15 \frac{f'^3}{f^3} + 6 \kappa^2 \frac{f'}{f} - 3 \kappa \kappa' \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{x}''}{f^4} \left[-4 \frac{f''}{f} + 15 \frac{f'^2}{f^2} - 6 \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{f'}{f} + \frac{\kappa''}{\kappa} - \kappa^2 - \tau^2 \right] \\ &= M_1 \mathbf{x}' + M_2 \mathbf{x}''. \end{aligned}$$

Für die linken Seiten der beiden Extremalendifferentialgleichungen

$$E_1 = B' + \kappa A - \tau C, \quad E_2 = C' + \tau B$$

sind durch Einsetzen von f leicht die Identitäten zu bestätigen:

$$M_2 = -3 \frac{\kappa}{f^5} E_1, \quad M_1 + \frac{f'}{f} M_2 = -2 \frac{\kappa \tau}{f^5} \left(E_2 + \frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} E_1 - \frac{\tau'}{\tau^2} E_1 \right).$$

Da $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$ gelten muß, verschwinden M_1 und M_2 . Für die beiden Affinkrümmungen k und t gilt direkt

$$M_1 - \frac{f'}{f} M_2 = -\frac{t}{f}, \quad M_2 = -\frac{k}{f^2},$$

sie müssen also verschwinden.

Es bleibt das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^4 \mathbf{x}}{d\sigma^4} = 0$$

zu integrieren. Drei voneinander unabhängige Polynome dritten Grades, deren Wronskideterminante, da σ die Affinlänge sein soll, normiert ist zu

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\sigma^2} \frac{d^3 \mathbf{x}}{d\sigma^3} \right) = 1, \text{ sind immer eine Lösung.}$$

So entstehen die Extremalen aus

$$x = \sigma, \quad y = \frac{1}{3} \sigma^2, \quad z = \frac{1}{6} \sigma^3$$

durch inhaltstreue Affinitätstransformationen, es sind, wie bekannt, die ∞^{10} kubischen Parabeln des Raumes. Denn eine allgemeine Affinitätstransformation enthält 12 Konstante. Inhaltstreue und der Umstand, daß die Affinlänge σ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, erniedrigen die Anzahl der unabhängigen Konstanten in den allgemeinen Extremalen auf zehn.

Über die Art des Extremums gibt die Bedingung von Clebsch Aufschluß. Es ist, wenn die 6. Wurzel in f positiv gezogen wird,

$$f_{xx} f_{\tau\tau} - f_{x\tau}^2 = + \frac{1}{36} \left(\frac{f}{\kappa \tau} \right)^2 > 0, \quad f_{xx} = -\frac{2}{9} \frac{f}{\kappa^2} < 0,$$

auch für alle $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$ der Vergleichskurven, natürlich mit der Einschränkung $\tau > 0$.

Wenn noch die Jacobische Bedingung als erfüllt angenommen wird, gilt der Satz: die kubische Parabel liefert ein starkes Maximum der Affinlänge gegenüber allen benachbarten (vgl. den Schluß des II. Teils) Raumkurven, die mit der Parabel in den Endpunkten das begleitende Dreieck gemeinsam haben.

f als Funktion von κ/τ .

Die zweite Differentialgleichung der Extremalen

$$(E_2) \quad C' + \tau B = 0$$

läßt sich einmal direkt integrieren, wenn — abgesehen von $B = 0$, d. h. $f = \kappa f_\kappa + \tau f_\tau$ — das zweite Glied integrierbar ist. Die Integrabilitätsbedingung heißt

$$\kappa^2 f_{\kappa\kappa} + 2\kappa\tau f_{\kappa\tau} + \tau^2 f_{\tau\tau} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$f = \sqrt{\kappa\tau} \varphi\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) + \psi\left(\frac{\kappa}{\tau}\right).$$

Der erste Teil ist eine positiv homogene Funktion erster Stufe, die schon ausgeschlossen wurde. Es soll nur der einfache Fall, f als Funktion des Quotienten der beiden Krümmungen, behandelt werden. Es wird

$$\kappa f_\kappa + \tau f_\tau = 0, \quad A = f, \quad \tau B = \frac{\tau}{\kappa} \frac{df}{ds} = \frac{dD}{ds}. \quad C + D = c.$$

Zusammen mit den beiden schon bekannten Integralen

$$(I_1) \quad f^2 + \left(\frac{1}{\kappa} f'\right)^2 + C^2 = a^2, \quad (I_2) \quad f f_\tau + \frac{1}{\kappa^2} f' f'_\tau + f_\kappa C = b$$

kann nach Ausschaltung der Bogenlänge eine Differentialgleichung 1. Ordnung für κ und τ gebildet werden:

$$\frac{df_\tau}{df} = \frac{b - f f_\tau - f_\kappa (c - D)}{a^2 - f^2 - (c - D)^2} \text{ usw.}$$

Eine Integration ist auch in Spezialfällen nicht direkt möglich, wohl aber, wenn die einschränkende Annahme

$$b = 0$$

gemacht wird. Dann ist das allgemeine Integral der letzten Gleichung oder die natürliche Gleichung der Extremalen bei Elimination der Bogenlänge

$$f^2 + d^2 \cdot f_\tau^2 + (c - D)^2 = a^2.$$

Wegen $f_{\tau} \cdot d = \frac{1}{\kappa} \cdot f'$ wird die Bogenlänge $s = \frac{1}{d} \cdot \frac{\tau}{\kappa}$. Bei der Einschränkung $b = 0$ sind also die Extremalen der Aufgabe $\int_{s_0}^{s_1} f\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) ds = \text{extrem.}$ geodätische Linien auf Kegeln.

Vollständige Aufstellung der Extremalen für $f = \tau^{1/2}$.

Obwohl für f als Funktion von τ allein die natürliche Gleichung zwischen κ und τ explizit angegeben werden konnte und zur Berechnung der Koordinaten der Extremalen nur Quadraturen auszuführen sind, ist $f = \tau^{1/2}$ der einzige Fall, der auf eine bekannte Kurvenklasse führt und bei dem keine analytischen Schwierigkeiten in der Rechnung auftreten.

Die natürlichen Gleichungen der Extremalen sind für $f = \tau^{1/2}$

$$\left(\frac{1-2b}{a}\right)^2 \kappa^2 + \frac{1-2b}{2a^2} \tau^2 = \tau^7, \quad \tau = \frac{1}{a^2 \frac{1-4b}{(1-2b)^2} s^2 + \frac{1-2b}{2a^2}}$$

oder $\frac{\kappa}{\tau} = a^2 \frac{\sqrt{1-4b}}{(1-2b)^2} \cdot s$. Es ist zu beschränken $b < \frac{1}{4}$. Der Tangentenwinkel Θ wird bei Einführung des Parameters u

$$\tau = \frac{2a^3}{1-2b} \frac{1}{\cos^2 u}; \quad \Theta = \frac{u}{\sqrt{1-4b}} + \arctg(\sqrt{1-4b} \operatorname{Ctg} u)$$

und danach sind die Koordinaten der Extremalen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{1-4b}}{2a^2} \left[\cos u \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{1-4b}} - \frac{2b}{\sqrt{1-4b}} \sin u \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{1-4b}} \right], \\ y &= \frac{\sqrt{1-4b}}{2a^2} \left[\cos u \cdot \cos \frac{u}{\sqrt{1-4b}} + \frac{2b}{\sqrt{1-4b}} \sin u \cdot \sin \frac{u}{\sqrt{1-4b}} \right], \\ z &= \frac{1-2b}{2a^2 \sqrt{1-4b}} u, \end{aligned}$$

die noch einer allgemeinen orthogonalen Transformation zu unterworfen sind.

Für $b = 0$ stimmen die natürlichen Gleichungen mit denen der Asymptotenlinien eines Katenoids überein, die Cesàro angibt⁸⁾. Auch die Koordinaten

$$x = \frac{1}{2a^2} \cos u \cdot \sin u, \quad y = \frac{1}{2a^2} \cos u \cdot \cos u, \quad z = \frac{u}{2a^2}$$

lassen dann erkennen, daß die Kurve auf dem Katenoid

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2a^2} \cos(2a^2 z)$$

⁷⁾ Diese quadratische Relation ist in zwei Dissertationen erwähnt: O. Joachimi, Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen ..., Münster 1911. Fr. Klauke, Über Raumkurven, zwischen deren Krümmungen ..., Halle 1916.

⁸⁾ E. Cesàro, Vorlesungen über Natürliche Geometrie, Leipzig 1901, S. 228.

liegt. Ein Streifen, der auf dieser Fläche längs der Kurve gelegt wird, ist leicht als asymptotischer Streifen nachzuweisen.

Wenn die Extremale für $b \neq 0$ von einem rotierenden Koordinatensystem

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \frac{u}{\sqrt{1-4b}} - y \sin \frac{u}{\sqrt{1-4b}}, \\ \eta &= x \sin \frac{u}{\sqrt{1-4b}} + y \cos \frac{u}{\sqrt{1-4b}},\end{aligned}\quad \zeta = z$$

betrachtet wird, dessen Drehungswinkel proportional der Entfernung der Kurve von der xy -Ebene ist, entsteht die Raumkurve

$$\xi = -\frac{b}{a^2} \sin u, \quad \eta = \frac{\sqrt{1-4b}}{2a^2} \cos u, \quad \zeta = \frac{1-2b}{2a^2 \sqrt{1-4b}} \cdot u,$$

die die drei bekannten hyperbolischen Funktionen als Projektionen besitzt. Für $b = 0$ ist es sogar nur die Kosinuskurve der $\eta\zeta$ -Ebene.

Die allgemeinen Extremalen sind schraubenartig und entfernen sich mit wachsendem z exponentiell von der z -Achse.

Da sich für $f(\tau)$ keine $\mathcal{G}$ -Funktion bilden läßt, kann auf diesem Wege nichts über die Art des Extremums entschieden werden.

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis, Herrn Prof. Dr. J. Radon für die Stellung dieser Aufgabe zu danken.

(Eingegangen am 6. April 1932.)

On a Rational Plane Curve with an $(n-2)$ -fold Point.

By

Peter Field.

The equation of a plane curve of the n th order contains $n(n+3)/2$ undetermined coefficients and the curve, if it is rational, has $(n-1)(n-2)/2$ singular points. If the singular points were arbitrarily chosen this would impose $3(n-1)(n-2)/2$ conditions on the coefficients. For $n \geq 6$, we have

$$3(n-1)(n-2)/2 > n(n+3)/2.$$

Hence for $n \geq 6$ the singular points can not be chosen arbitrarily. Cayley¹⁾, Halphen²⁾, and others have discussed the problem, particularly with reference to the sextic. Recently Blumenthal³⁾ has announced some theorems analogous to those obtained by Halphen. If the nature of the singular points is specified, i. e. crunode, acnode, or cusp, their positions are still further restricted⁴⁾.

A rational plane n -ic with an $n-2$ fold point has $n-2$ additional singular points. If u_n denotes a homogeneous polynomial of degree n in x and y and ε is a parameter, the equation of the curve can be written

$$(1) \quad u_n + 2\varepsilon u_{n-1} + u_{n-2} = 0.$$

Any line $y = mx$ meets the curve in $n-2$ points at the origin. If V_n denotes a polynomial of the n th degree in m which is obtained by dividing u_n by x^n and replacing (y/x) by m , the two remaining intersections are found from the equation

$$x^2 V_n + 2\varepsilon x V_{n-1} + V_{n-2} = 0$$

or

$$(2) \quad x = \frac{-\varepsilon V_{n-1} \pm \sqrt{\varepsilon^2 V_{n-1}^2 - V_n V_{n-2}}}{V_n}$$

¹⁾ *Proceedings of the London Mathematical Society*, III (1869-71), p. 198.

²⁾ *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1882, p. 162.

³⁾ *American Mathematical Monthly*, XXXVIII, p. 367.

⁴⁾ *American Journal of Mathematics*, XLVI, p. 235.

There are $n-2$ values of m which give lines through singular points. Hence the coefficients of V_n , V_{n-1} , and V_{n-2} must be so chosen that

$$(3) \quad \varepsilon^2 V_{n-1}^2 - V_n V_{n-2} = \varphi_{n-2}^2 \varphi_2$$

where φ_{n-2} and φ_2 are polynomials in m of degree $n-2$ and 2 respectively. Actually to construct such a case it would perhaps be most simple to think of V_{n-1} , φ_{n-2} , and φ_2 as given and then to think of V_n and V_{n-2} as satisfying the equation

$$(4) \quad V_n V_{n-2} = \varepsilon^2 V_{n-1}^2 - \varphi_{n-2}^2 \varphi_2.$$

The values of m which are obtained by equating φ_{n-2} to zero give the slopes of the $n-2$ lines that pass through the singular points while the values obtained by equating φ_2 to zero give the slopes of the two tangents to the curve which can be drawn from the $n-2$ fold point and whose points of contact are not at that point. Corresponding to a pair of conjugate imaginary roots of $\varphi_{n-2} = 0$ the curve has a pair of conjugate imaginary double points. As no question of whether the given singular points are crunodes or acnodes arises in this case, it will be assumed that the roots of $\varphi_{n-2} = 0$ are all real. For further discussion of the problem it will be subdivided into special cases.

Case I. The roots of $\varphi_2 = 0$ are imaginary. In this case $\varphi_{n-2}^2 \varphi_2$ preserves its sign throughout the plane. If it is negative, the $n-2$ points as well as the $n-2$ fold point are all isolated. As we assume that the equation of the curve contains only real coefficients, equation (4) shows this can only happen when n is even. This also follows from the fact that a curve of odd order must meet any straight line in its plane in at least one real point. On the other hand if $\varphi_{n-2}^2 \varphi_2$ is positive the $n-2$ singular points will all be crunodes.

If n is even, $V_{n-1} = 0$ has at least one real root and the right hand member of equation (4) equated to zero has at least two real roots. This follows because the function is negative for the value of m which makes V_{n-1} equal to zero and is positive for any value of m which makes φ_{n-2} equal to zero. As the function is of even degree it must have at least two real roots. Hence if n is even there must be at least two real asymptotes or two real tangents at the $n-2$ fold point; i. e. the $n-2$ fold point must either lie on the given circuit or it may be isolated and the $n-2$ singular points lie on a circuit of index two⁵⁾.

Case II. The roots of $\varphi_2 = 0$ are real and unequal. The two values of m which are roots of $\varphi_2 = 0$ determine two lines through the

⁵⁾ A circuit is of index two if it meets any straight line in its plane in at least two real points.

$n-2$ fold point and these divide the plane into two regions such that the crunodes lie in one region and the acnodes in the other. In this case the equation

$$(5) \quad \varepsilon^2 V_{n-1}^2 - \varphi_{n-2}^2 \varphi_2 = 0$$

may have only imaginary roots for n any even integer. To obtain such a case it is only necessary to take ε large, V_{n-1} such that all but one of the roots of $V_{n-1} = 0$ are imaginary, and to take the real root of $V_{n-1} = 0$ in the region for which φ_2 is negative. The curve will be composed of an $n-2$ fold isolated point and the remaining $n-2$ singular points will be crunodes or acnodes according to whether they are in the region for which φ_2 is positive or negative. If they are all acnodes the curve will be composed of an $n-2$ fold isolated point, $n-2$ isolated points and an oval.

Case III. The roots of $\varphi_2 = 0$ are equal or $\varphi_2 = \varphi_1^2$. It follows from a well known theorem that the curve is degenerate in this case. It can also be seen directly by multiplying equation (1) by u_{n-2} which gives

$$u_{n-2}^2 + 2\varepsilon u_{n-1} u_{n-2} + u_n u_{n-2} = 0.$$

Hence

$$u_{n-2} = -\varepsilon u_{n-1} \pm \sqrt{\varepsilon^2 u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2}}.$$

According to our supposition the quantity $\varepsilon^2 u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2}$ may be written ψ_{n-1}^2 . Therefore

$$u_{n-2} = -\varepsilon u_{n-1} \pm \psi_{n-1}.$$

These results may be summarized in the following Theorem: *If a rational plane curve has an $n-2$ fold point, then the two tangents to the curve from the $n-2$ fold point (whose points of contact are not at the $n-2$ fold point) separate the plane into two regions such that the crunodes lie in one region and the acnodes in the other. If the two tangents are imaginary, the $n-2$ singular points are either all crunodes or all acnodes and in case they are all acnodes, the degree of the curve must be an even number.*

The application of the idea to a curve with an $n-2$ fold point which has in addition a number of singular points less than $n-2$ is apparent. It is perhaps also possible to study the curve with an $n-3$ fold point in the same way.

University of Michigan.

(Eingegangen am 6. April 1932.)

Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1.

Von

Max Deuring in Leipzig.

Es ist nicht bekannt, ob die Anzahl der imaginären quadratischen Zahlkörper mit nur einer Idealklasse endlich ist oder nicht. Die Entscheidung darüber hängt mit der Nullstellenverteilung der L -Reihen zusammen, die diesen Körpern zugeordnet sind. Das sind L -Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$, die mit einem reellen eigentlichen Charakter χ gebildet sind, für den $\chi(-1) = -1$ gilt. Wenn man voraussetzt, daß die zum Körper $k(\sqrt{-4d})$ mit der Diskriminante $-4d$ gehörige L -Reihe $L_d(s)$ auf der Strecke $1 - \frac{a}{\log d} \leq s < 1$ von Null verschieden ist, so kann man beweisen, daß die Klassenzahl h_d von $k(\sqrt{-4d})$ einer Ungleichung

$$h_d > b(a) \frac{d^{1/2}}{\log d}$$

genügt (E. Hecke, in der Arbeit von E. Landau: Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper, Gött. Nachr. 1918, S. 285—295). Daraus folgt insbesondere, daß die Anzahl der imaginären quadratischen Körper mit der Klassenzahl 1 endlich ist.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß unser Problem auch mit der Nullstellenverteilung der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ zusammenhängt. $-4d_1, -4d_2, \dots$ seien die Diskriminanten der einklassigen imaginären quadratischen Zahlkörper, nach wachsendem Betrage geordnet. In § 2 wird bewiesen:

1. *Angenommen, die Anzahl der d , ist unendlich, dann folgt: Alle nicht reellen Nullstellen von $\zeta(s)$ sind einfach und haben den Realteil $\frac{1}{2}$ (Riemannsche Vermutung).*

Dies Ergebnis scheint dafür zu sprechen, daß die fragliche Anzahl endlich ist.

2. Ist $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$, so gilt, wieder unter der Voraussetzung, daß die d_v in unendlicher Zahl vorhanden sind,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} e^{it \log d_v} = \pi^{it} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it) \zeta(1 - 2it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)};$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L_{d_v}(\frac{1}{2} + it)}{\log d_v} = \frac{\zeta(1 + 2it)}{\zeta'(\frac{1}{2} + it)}.$$

3. Ganz allgemein gilt

$$d_{v+1} > e^{c_{12} d_v^{1/4}}$$

(c_{12} ist eine positive Zahl).

3 verschärft in gewissem Sinne für die einklassigen Körper den Hauptsatz der erwähnten Arbeit von Landau: es gibt zu jedem $\omega > 0$ ein $c(\omega) > 0$ mit der Eigenschaft, daß jede Diskriminantenfolge $-4d_1, -4d_2, -4d_3, \dots$ von imaginären quadratischen Körpern $k(\sqrt{-4d_v})$, deren Klassenzahlen h_{d_v} die Ungleichung

$$h_{d_v} < c(\omega) \frac{d_v^{1/2}}{\log d_v}$$

erfüllen, der Seltenheitsrelation

$$d_{v+1} > d_v^\omega$$

genügt.

$c_1, c_2, c_3, \dots$ bedeuten in dieser Arbeit positive Zahlen.

§ 1.

Asymptotische Entwicklung von $\Sigma' (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s}$.

$Q(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2$ sei eine positiv definite quadratische Form mit reellen Koeffizienten, also

$$a > 0, \quad D = 4d = 4ac - b^2 > 0.$$

— D ist die Diskriminante der Form.

Die Reihe

$$\sum'_{n, m} (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s},$$

($-\infty < n < +\infty, -\infty < m < +\infty$, außer $n = m = 0$),

konvergiert für $\sigma \geq 1 + \varepsilon > 1$ absolut und gleichmäßig, stellt also dort eine analytische Funktion $\zeta_Q(s)$ dar. $\zeta_Q(s)$ ist in der ganzen Ebene regulär mit Ausnahme eines Poles erster Ordnung bei $s = 1$.

1. Satz 1.

$$(1) \quad \zeta_Q(s) - 2a^{-s} \zeta(2s) - 2d^{\frac{1}{2}-s} a^{s-1} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sqrt{\pi} = R_Q(s)$$

ist eine ganze Funktion. Für $\sigma \geq 2 - k$ (k eine natürliche Zahl) gilt

$$(2) \quad R_Q(s) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^{1-2s-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{d y^{2k}} (1+y^2)^{-s} d y \cdot d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k},$$

dabei ist $P_{2k}(x)$ die periodische Funktion

$$(3) \quad P_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2j\pi x}{(2j\pi)^{2k}}$$

und es steht x für $\frac{|m|}{a} (d^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} b)$.

Beweis. Es sei $m \neq 0$. Die Eulersche Summenformel (siehe z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 2. Aufl., § 64 A, S. 536—543), ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s} &= \int_{-N}^{+N} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} d x \\ &+ \frac{1}{2} ((a N^2 + b N m + c m^2)^{-s} + (a N^2 - b N m + c m^2)^{-s}) \\ &+ \sum_{j=1}^k \frac{B_{2j}}{(2j)!} \left[\left(\frac{d^{2j-1}}{d x^{2j-1}} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} \right)_{x=N} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d^{2j-1}}{d x^{2j-1}} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} \right)_{x=-N} \right] \\ &- \int_{-N}^{+N} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{d x^{2k}} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} d x. \end{aligned}$$

Für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt daraus durch $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} d x \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{d x^{2k}} (a x^2 + b m x + c m^2)^{-s} d x. \end{aligned}$$

Wir machen nun links die im Satz 1 schon angedeutete Substitution $x = \frac{|m|}{a} (d^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} b)$. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s} &= d^{\frac{1}{2}-s} a^{s-1} |m|^{1-2s} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+y^2)^{-s} d y \\ &- d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k} |m|^{1-2s-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2k}}{d y^{2k}} (1+y^2)^{-s} P_{2k}(x) d y. \end{aligned}$$

Da für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) \int_{-\infty}^{+\infty} (1+y^2)^{-s} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-(1+y^2)z} dz dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-z} z^{s-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 z} dy dz = \pi^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} z^{s-\frac{1}{2}} e^{-z} dz \\ &= \Gamma(s - \frac{1}{2}) \pi^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

gilt, so haben wir im Bereich $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a n^2 + b n m + c m^2)^{-s} &= |m|^{1-2s} d^{\frac{1}{2}-s} a^{s-1} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \\ &\quad - |m|^{1-2s-2k} d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{2k}}{d y^{2k}} (1+y^2)^{-s} P_{2k}(x) dy,\end{aligned}$$

woraus für $\sigma > 1$ die Gleichung (1) mit dem angegebenen Ausdruck für $R_Q(s)$ folgt. Die Reihe (2) für $R_Q(s)$ konvergiert für $\sigma \geq 2-k$ absolut und gleichmäßig, denn $P_{2k}(x)$ ist als periodische Funktion von m unabhängig beschränkt, so daß das Integral im Bereich $\sigma \geq 2-k$ absolut und gleichmäßig konvergiert und dort unter einer festen Schranke bleibt; die Konvergenz der Reihe mit dem Summationsindex m folgt dann aus $|m^{1-2s-2k}| \leq m^{-3}$. Also ist $R_Q(s)$ eine ganze Funktion, die für $\sigma \geq 2k$ durch (2) dargestellt wird. Daraus folgt, daß $\zeta_Q(s)$ in alle Punkte außer $s = 1$ analytisch fortgesetzt werden kann und bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{\pi} d^{-\frac{1}{2}}$ hat. (1) gilt daher in der ganzen Ebene.

2. Wir untersuchen jetzt das Verhalten von $\zeta_Q(s)$ bei wachsendem d (unter der Annahme, daß das Verhalten von a bekannt sei). Nicht zu übersehen ist in (1) lediglich $R_Q(s)$; für das eine Abschätzung gesucht werden muß. Die Form Q geht in die Formel (2) für $R_Q(s)$ an schlecht erreichbarer Stelle im Argument x von $P_{2k}(x)$ ein. Wir rechnen mit

$$(4) \quad |P_{2k}(x)| \leq 4 \cdot (2\pi)^{-2k}.$$

Es handelt sich jetzt um eine Abschätzung für $\frac{d^{2k}}{d y^{2k}} (1+y^2)^{-s}$. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$(5) \quad 2\pi \frac{d^h}{d y^h} (1+y^2)^{-s} = h! r^{-h} \int_0^{2\pi} (1+(y+re^{i\delta})^2)^{-s} e^{-ih\delta} d\delta;$$

$0 < r < 1+y^2.$

(Integration über einen Kreis vom Radius r um y .)

Wir beschränken uns auf $y \geq 0$ und $t \geq 0$, denn für konjugiert komplexe s (und reelle y) sind die Werte von $\left| \frac{d^h}{d y^h} (1 + y^2)^{-s} \right|$ gleich, ebenso für entgegengesetzte reelle y . Das Integral rechts in (5) wird durch das Integral über den Betrag der Integranden abgeschätzt.

Da

$$|(1 + (y + r e^{i\delta})^2)^{-s}| = |(1 + (y + r e^{i\delta})^2)|^{-\sigma} e^{t \arg(1 + (y + r e^{i\delta})^2)}$$

ist, so handelt es sich um Abschätzungen für

$$|1 + (y + r e^{i\delta})^2| \quad \text{und} \quad \arg(1 + (y + r e^{i\delta})^2).$$

Wir setzen nun

$$r = \frac{y_1}{3 t_1},$$

und dabei bedeutet

$$t_1 = \begin{cases} t, & \text{wenn } t \geq 1, \\ 1, & \text{wenn } t \leq 1, \end{cases} \quad y_1 = \begin{cases} y, & \text{wenn } y \geq 1, \\ 1, & \text{wenn } y \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} R(1 + (y + r e^{i\delta})^2) &= 1 + y^2 + r^2 \cos 2\delta + 2 y r \cos \delta \geq 1 + y^2 - r^2 - 2 y r \\ &= 1 + y^2 - \frac{2 y y_1}{3 t_1} - \frac{y_1^2}{9 t_1^2} \geq y_1^2 \left(1 - \frac{1}{3 t_1} - \frac{1}{9 t_1^2} \right) \geq \frac{5}{9} y_1^2. \end{aligned}$$

Da also der Realteil von $1 + (y + r e^{i\delta})^2$ positiv ist, so liegt das Argument von $1 + (y + r e^{i\delta})^2$ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, es ist

$$\begin{aligned} (6) \quad |\arg(1 + (y + r e^{i\delta})^2)| &= \left| \arctang \frac{I(1 + (y + r e^{i\delta})^2)}{R(1 + (y + r e^{i\delta})^2)} \right| \leq \frac{9 r}{5 y_1^2} (2 y + r) \\ &= \frac{3}{5 t_1 y_1} \left(2 y + \frac{y_1}{3 t_1} \right) \leq \frac{7}{5 t_1}. \end{aligned}$$

Für den Betrag von $1 + (y + r e^{i\delta})^2$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} R(1 + (y + r e^{i\delta})^2)^2 &\leq |1 + (y + r e^{i\delta})^2| \leq [R(1 + (y + r e^{i\delta})^2)^2 \\ &\quad + I(1 + (y + r e^{i\delta})^2)]^{1/2} \end{aligned}$$

und daraus folgt, indem man links $\frac{2}{5} y_1^2$ an Stelle von $R(1 + (y + r e^{i\delta})^2)$ und rechts $[(1 + (y + r)^2)^2 + r^2 (2 y + r)^2]^{1/2}$ einführt und dann r durch $\frac{y_1}{3}$, y durch y_1 ersetzt

$$(7) \quad \frac{2}{5} y_1^2 \leq |1 + (y + r e^{i\delta})^2| \leq 3 y_1^2,$$

(5), (6), (7) ergeben

$$\left| \frac{d^h}{d y^h} (1 + y^2)^{-s} \right| \leq h! \left(\frac{3 t_1}{y_1} \right)^h y^{-2\sigma} 3^{|\sigma|} e^{7/2},$$

und Heranziehen von (4) führt zu

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (1+y^2)^{-s} dy \right| &< c_1 3^{|\sigma|} (2k)! \left(\frac{3t_1}{2\pi} \right)^{2k} \int_0^\infty y_1^{-2(\sigma+k)} dy \\
 &= c_1 3^{|\sigma|} (2k)! \left(\frac{3t_1}{2\pi} \right)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2(\sigma+k-1)} \right) \\
 &< 2c_1 3^{|\sigma|} (2k)! \left(\frac{3t_1}{2\pi} \right)^{2k} \text{ (wegen } k \geq 2-\sigma).
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann

Satz 2.

$$|R_Q(s)| \leq c_2 3^{|\sigma|} d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} \left(\frac{3kt_1 a}{\pi d^{1/2}} \right)^{2k} k^{1/2} e^{-2k},$$

indem man $k! < 3h^{h+\frac{1}{2}} e^{-h}$ und $k \geq 2-\sigma$ benutzt.

Wir wollen uns jetzt auf den Bereich $\sigma > 0$ beschränken. Setzt man

$$k = \left\lceil \frac{\pi d^{1/2}}{3at_1} \right\rceil,$$

so ist der Bedingung $k \geq 2-\sigma$ Genüge geleistet unter der Voraussetzung

$$(9) \quad t_1 \leq \frac{\pi d^{1/2}}{9a}.$$

Daher gilt unter der Voraussetzung (9)

$$|R_Q(s)| \leq c_2 3^\sigma d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} \left(\frac{3at_1}{\pi d^{1/2}} \left\lceil \frac{\pi d^{1/2}}{3at_1} \right\rceil \right)^2 \left[\frac{\pi d^{1/2}}{3at_1} \right] \left[\frac{\pi d^{1/2}}{3at_1} \right]^{1/2} e^{-2 \left\lceil \frac{\pi d^{1/2}}{3at_1} \right\rceil}$$

und daraus

Satz 3.

$$|R_Q(s)| < c_3 3^\sigma d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} e^{-\frac{2d^{1/2}}{at_1}},$$

falls $\sigma > 0$ und $t_1 \leq \frac{\pi d^{1/2}}{9a}$.

3. Für $\frac{d}{ds} R_Q(s) = R'_Q(s)$ hat man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 R'_Q(s) &= \Sigma' |m|^{1-2s-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{dy^{2k}} (\log(1+y^2) (1+y^2)^{-s}) dy \cdot d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k} \\
 &+ \Sigma' \log(2|m|) |m|^{1-2s-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{dy^{2k}} (1+y^2)^{-s} dy \cdot d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k} \\
 &+ \Sigma' |m|^{1-2s-2k} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(x) \frac{d^{2k}}{dy^{2k}} (1+y^2)^{-s} dy \cdot d^{\frac{1}{2}-s-k} a^{s-1+2k} (\log d - \log a)
 \end{aligned}$$

der in demselben Bereich wie der Ausdruck (2) für $R_Q(s)$ gilt.

Die beiden letzten Summanden sind nach (8) zusammen kleiner als

$$c_4 3^{|\sigma|} d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} (|\log d - \log a| + 1) \left(\frac{3 k t_1 a}{d^{1/2}} \right)^{2k} k^{1/2} e^{-2k}$$

oder auch, wenn $\sigma > 0$ und $t_1 \leq \frac{\pi d^{1/2}}{9a}$, kleiner als

$$c_4 3^\sigma d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} (1 + |\log d - \log a|) e^{-\frac{2 d^{1/2}}{a t_1}}.$$

Für den ersten Summanden kann man einen ähnlichen Ansatz wie (5) machen; die Rechnung führt zu einer oberen Schranke von derselben Form wie in (8). Daher gelten die beiden folgenden Sätze

Satz 4.

$$|R'_Q(s)| \leq c_5 3^{|\sigma|} d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} (1 + |\log d - \log a|) \left(\frac{3 k t_1 a}{d^{1/2}} \right)^{2k} k^{1/2} e^{-2k}.$$

Satz 5.

$$|R'_Q(s)| \leq c_5 3^\sigma d^{\frac{1}{2}-\sigma} a^{\sigma-1} (1 + |\log d - \log a|) e^{-\frac{2 d^{1/2}}{a t_1}},$$

falls $\sigma > 0$ und $t_1 \leq \frac{\pi d^{1/2}}{9a}$.

§ 2.

Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1.

$k(\sqrt{-d_1})$, $k(\sqrt{-d_2})$, ... sei die Folge der imaginären quadratischen Zahlkörper mit nur einer Idealklasse, $-D_v = -4d_v$ bedeute die Diskriminante von $k(\sqrt{-d_v})$, $d_{v+1} > d_v$.

Die Zetafunktion von $k(\sqrt{-d_v})$ ist

$$\zeta(s) L_{d_v}(s) = \frac{1}{2} \Sigma' (a n^3 + b n m + c m^2)^{-s},$$

dabei bedeutet $L_{d_v}(s)$ die ganze Funktion

$$L_{d_v}(s) = \sum_n \left(\frac{-D_v}{n} \right) n^{-s}$$

und $a x^2 + b x y + c y^2$ eine quadratische Form, welche die Normen aller ganzen Zahlen $n \omega_1 + m \omega_2$ von $k(\sqrt{-d_v})$ darstellt. Da die Norm von 1 gleich 1 ist, so kann $a = 1$ genommen werden.

Wir machen jetzt die Annahme, daß die Folge der d_v nicht abbricht.

1. Satz 3 ergibt

$$\zeta(s) L_{d_v}(s) = \zeta(2s) + d_v^{\frac{1}{2}-s} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} + O\left(e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_1}}\right),$$

das O ist für wachsendes v gemeint.

Hieraus folgt für festes $s \neq 1$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\zeta(s) \lim_{v \rightarrow \infty} L_{d_v}(s) = \zeta(2s).$$

Da $\zeta(2s) \neq 0$ ist, so muß auch $\zeta(s) \neq 0$ sein.

Satz 6. Die nichtreellen Nullstellen von $\zeta(s)$ haben den Realteil $\frac{1}{2}$.

2. $s = \frac{1}{2} + it$ sei eine Nullstelle von $\zeta(s)$. Dann gibt Satz 3

$$(10) \quad \left| d_v^{it} - \pi^{1/2} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\zeta(2s) \Gamma(s)} \right| < c_6 e^{-\frac{2d_v^{1/2}}{t_1}}.$$

Satz 7. Ist $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$, so gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} e^{it \log d_v} = \pi^{1/2} \frac{\zeta(2it) \Gamma(it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)} = \pi^{it} \frac{\zeta(1 - 2it) \Gamma(\frac{1}{2} - it)}{\zeta(1 + 2it) \Gamma(\frac{1}{2} + it)}$$

und (10) gibt den Genauigkeitsgrad der Konvergenz an.

Man überzeugt sich leicht davon, daß der Ausdruck

$$\pi^{1/2} \frac{\zeta(2it) \Gamma(it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)}$$

den Betrag 1 hat. Denn aus der Riemannschen Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ folgt

$$\pi^{-it} \zeta(2it) \Gamma(it) = \pi^{it-1/2} \zeta(1-2it) \Gamma(\frac{1}{2}-it),$$

demnach

$$\pi^{1/2} \frac{\zeta(2it) \Gamma(it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)} = \pi^{it} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it) \zeta(1 - 2it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it) \zeta(1 + 2it)}.$$

3. Aus Satz 5 folgt

$$\begin{aligned} \zeta'(s) L_{d_v}(s) + \zeta(s) L'_{d_v}(s) &= \zeta'(2s) - \log d_v d_v^{\frac{1}{2}-s} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \\ &+ d_v^{\frac{1}{2}-s} \frac{d}{ds} \left(\pi^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta(2s-1) \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \right) + O \left(e^{-\frac{2d_v^{1/2}}{t_1}} \log d_v \right). \end{aligned}$$

Ist $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$, so divergiert der Ausdruck rechts für wachsendes v nach Satz 7. Daher kann links nicht $\zeta'(s) = 0$ sein, und es folgt

Satz 8. Alle Nullstellen von $\zeta(s)$ sind einfach.

Ferner ergibt sich

Satz 9. Ist $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0$, so gilt für $s = \frac{1}{2} + it$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{L_{d_v}(s)}{\log d_v} = -\frac{\zeta(2s)}{\zeta'(s)},$$

genauer

$$\frac{L_{d_v}(s)}{\log d_v} + \frac{\zeta(2s)}{\zeta'(s)} = O \left(\frac{1}{\log d_v} \right).$$

4. Die Voraussetzung, daß die Folge der d_v nicht abbricht, lassen wir wieder fallen. Wir werden den folgenden Satz beweisen, dessen Bedeutung

ist, daß, selbst wenn die d_v in unendlicher Anzahl vorhanden sein sollten, sie doch außerordentlich selten sind.

Satz 10.

$$d_{v+1} > e^{c_{13} d_v^{1/4}}.$$

Beweis. Aus (10) folgt für $\mu \geq v$

$$|e^{it \log d_\mu} - e^{it \log d_v}| < 2 c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}.$$

wenn $\frac{1}{2} + it_0$ eine Nullstelle von $\zeta(s)$ bedeutet. Demnach gibt es eine ganze rationale Zahl $E_{v,\mu} \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$|t_0 \log d_\mu - \log d_v) - 2\pi E_{v,\mu}| < 2\pi c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}.$$

Um aus diesen Relationen Abschätzungen für die Diskriminanten zu erhalten, muß man versuchen, die unbekannten ganzen Zahlen E zu eliminieren. Man kann aus den beiden Relationen

$$(11) \quad \begin{aligned} |t_0 (\log d_v - \log d_{v-1}) - 2\pi E_{v-1,v}| &< 2\pi c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \\ |t_0 (\log d_{v+1} - \log d_v) - 2\pi E_{v,v+1}| &< 2\pi c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$(12) \quad \left| (\log d_{v-1} - \log d_{v-1}) - \frac{2\pi (E_{v-1,v} + E_{v,v+1})}{t_0} \right| < \frac{4\pi}{t_0} c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}$$

und

$$\begin{aligned} |(E_{v,v+1} + E_{v-1,v}) \log d_v - E_{v,v+1} \log d_{v-1} - E_{v-1,v} \log d_{v+1}| \\ < \frac{2\pi}{t_0} c_6 (E_{v,v+1} + E_{v-1,v}) e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \end{aligned}$$

erschließen.

In der zweiten Ungleichung kann man rechts die Summe $E_{v,v+1} + E_{v-1,v}$ durch die obere Schranke ersetzen, die sich aus (12) ergibt, und links alles in einen Logarithmus zusammenfassen. Auf diese Weise erhält man

$$(13) \quad \left| \log \frac{d_v^{E_{v-1,v} + E_{v,v+1}}}{d_{v-1}^{E_{v,v+1}} d_{v+1}^{E_{v-1,v}}} \right| < c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \left(\log d_{v+1} - \log d_{v-1} + \frac{4\pi}{t_0} c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \right).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung kann man nun nach unten abschätzen, weil die Diskriminanten der einklassigen imaginären quadratischen Körper Primzahlen sind bis auf $-D_1 = -4$. Das folgt daraus, daß die Geschlechterzahl von $k(\sqrt{-D_v})$ gleich Eins ist. In (13) steht links der Logarithmus der rationalen Zahl

$$r = \frac{D_v^{E_v, v+1} D_v^{E_v-1, v}}{D_v^{E_v-1, v+E_v, v+1}},$$

denn die Faktoren 4 heben sich fort. Weil die D_v teilerfremd sind, so ist r von 1 verschieden und der Abstand von 1, $\varepsilon = r - 1$, muß dem Betrage nach größer sein als der reziproke Nenner von r

$$|\varepsilon| \geq D_v^{-E_v-1, v-E_v, v+1}.$$

Nun können wir

$$(14) \quad \log d_{v+1} \leq e^{\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}$$

voraussetzen, denn falls

$$\log d_{v+1} > e^{\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}$$

gilt, so ist die Behauptung des Satzes 10 ohnehin klar. Aus (14) und (13) folgt aber

$$\log r < c_7,$$

so daß wir die Abschätzung für ε zu der Folgerung

$$\log r \geq c_8 |\varepsilon| \geq c_8 (4 d_v)^{-E_v, v+1-E_v-1, v}$$

benutzen können. Setzt man dies in (13) ein, so ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} (4 d_v)^{\frac{t_0}{2\pi}} \left(\log d_{v-1} - \log d_{v+1} - \frac{4\pi}{t_0} c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \right) \\ < \frac{c_8}{c_9} \left(\log d_{v+1} - \log d_{v-1} + \frac{4\pi}{t_0} c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \right) e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}}, \end{aligned}$$

die die E nicht mehr enthält. Übergang zu den Logarithmen ergibt

$$\begin{aligned} \log \left(d_v^{\frac{t_0}{2\pi} \log(4 d_v)} \right) + 2 c_6 e^{-\frac{2 d_v^{1/2}}{t_0}} \log d_v &> \frac{2 d_v^{1/2}}{t_0} \\ &- \log(\log d_{v+1} - \log d_{v-1} + c_9) - c_{10}. \end{aligned}$$

Hieraus folgen leicht die Ungleichungen

$$\log(4d_v) \left(\frac{t_0}{2\pi} \log d_{v+1} + c_{11} \right) > \frac{2d_v^{1/2}-1}{t_0} - \log(\log d_{v+1} + c_9) - c_{10},$$

$$c_{12} \frac{\log \log d_{v+1}}{\log d_v} + \log d_{v+1} > \frac{4\pi d_v^{1/2}-1}{t_0^2 \log(4d_v)},$$

weiter

$$(1 + c_{12}) \log d_{v+1} > \frac{4\pi d_v^{1/2}-1}{t_0^2 \log(4d_v)},$$

$$(2 + c_{12}) (\log d_{v+1})^2 > \frac{4\pi d_v^{1/2}-1}{t_0^3}.$$

Das ist die Behauptung des Satzes.

(Eingegangen am 13. Mai 1932.)

Some Tauberian theorems.

By

L. S. Bosanquet in London and M. L. Cartwright in Cambridge.

1. The starting point of this paper is a proof of the theorem of Littlewood¹⁾ and Andersen²⁾ that if $\sum a_n$ is bounded (C, α) , $\alpha \geq -1$, and summable (A) , then $\sum a_n$ is summable $(C, \alpha + \delta)$ for every $\delta > 0$. This theorem may be said to include, as the case $\alpha = -1$ ³⁾, the famous O Tauberian theorem of Littlewood⁴⁾ that if $na_n = O(1)$ and $\sum a_n$ is summable (A) , then $\sum a_n$ is convergent. For the condition $s_n = O(1)$ is a simple consequence of the hypotheses; it is in fact the analogue of Tauber's classical theorem with O in place of o .

Let $\sum a_n z^n = f(z) = f_0(z)$ be regular for $|z| < 1$, and let⁵⁾

$$f_k(z) = \frac{1}{1-z} \int_z^1 f_{k-1}(u) du.$$

It has been shown⁶⁾ that the O theorem of Littlewood holds when $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, where $0 < |\gamma| < \frac{1}{2}\pi$, and indeed for more general methods of approach. We shall consider here chiefly theorems about angular approach, and we first prove a slightly more general theorem for bounded Cesàro means.

¹⁾ Littlewood, 9.

²⁾ Andersen, 1, 80, (Theorem 4), see also Hardy and Littlewood, 6.

³⁾ $\sum a_n$ is said to be bounded $(C, -1)$ if $na_n = O(1)$, and $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = O(1)$. Here and throughout the paper Σ denotes $\sum_{n=0}^{\infty}$.

⁴⁾ Littlewood, 9.

⁵⁾ Here and elsewhere $\int_z^1$ is to be interpreted as $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \int_z^{\zeta}$ where $\zeta \rightarrow 1$ along the straight line $(z, 1)$.

⁶⁾ Hardy and Littlewood, 5.

Theorem 1. *If*(I) $\sum a_n$ is bounded (C, α), $\alpha \geq -1$,(II) $f_\lambda(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $0 \leq |\gamma| < \frac{1}{2}\pi$,for some positive integer λ , then $\sum a_n$ is summable ($C, \alpha + \delta$) for every $\delta > 0$.

The main idea in the proof given here is that of Montel's theorem⁷⁾ on the limit of an analytic function bounded in a sector. Now it has been shown that the hypothesis $na_n = O(1)$ in Littlewood's theorem may be replaced by $na_n > -K$ ⁸⁾, or, more generally⁹⁾, by the condition that $a_n = b_n + c_n$, where $nb_n = O(1)$ and $|\arg c_n| \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$, but only when $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along the real axis. There is also a one-sided version of Montel's theorem in which the function, instead of being bounded, simply omits certain values. The question arises whether the one-sided series results can be extended to the case of angular approach by means of the one-sided version of Montel's theorem.

We first observe that some general bounding condition on the coefficients, or, what is more or less the same thing, on the function, is necessary for a theorem of this type. For consider the function

$$(1) \quad \sum a_n z^n = e^{\frac{1}{(1-z)^\alpha}}, \quad \alpha > 1.$$

Here $a_n > 0$ for every n , and $f(z) \rightarrow 0$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, where $\frac{1}{2}\pi/\alpha < \gamma < \frac{1}{2}\pi$. But $f(z) \rightarrow \infty$ as $z \rightarrow 1$ along the real axis, so that $\sum a_n$ is obviously divergent. As a matter of fact, when a_n is real the problem is comparatively trivial. For, assuming just enough to exclude such a function as (1), we can show that $f(z) \rightarrow A$ along the real axis without using the condition $na_n > -K$.

Theorem 2. *If*(I) a_n is real,(II) $f(z) = O\{\exp(|1-|z||^{-\frac{1}{2}\pi/\alpha})\}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$,(III) $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, where $0 \leq |\gamma| < \alpha$, then $f(z) \rightarrow A$ when $z \rightarrow 1$ so that $|\arg(1-z)| \leq \gamma$.Corollary. *If in addition $na_n > -K$, then $\sum a_n$ is convergent.*

When a_n is complex, we assume that $a_n = O(1)$ (which is obviously necessary for convergence), and we prove a one-sided result corresponding to the case $\alpha = -1$ of theorem 1.

⁷⁾ Montel, 10, Julia, 7, p. 99. It is the main idea in the proof of Lemma 3.

⁸⁾ Hardy and Littlewood, 4. See also Landau, 8, p. 58.

⁹⁾ See Neder, 11.

Theorem 3. *If*

(I) $a_n = O(1)$,

(II) $a_n = b_n + c_n$, where $nb_n = O(1)$ and $|\arg c_n| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$,

(III) $s_n = \sum_0^n a_n = s'_n + s''_n$, where $s'_n = O(1)$ and $-\pi + \delta \leq \arg s''_n \leq \pi - 2\gamma - \delta$, $\delta > 0$, $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}\pi$,

(IV) $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$,

then $\sum a_n$ is convergent.

Conditions (II) and (III) amount to a one-sided condition on the $(C, -1)$ sum of $\sum a_n$, but, whereas in Littlewood's theorem we could easily deduce $s_n = O(1)$ from the other hypotheses, here we are unable to deduce III from I, II and IV by any simple argument. Since we obtained our result, however, Prof. Wiener¹⁰) has applied his methods to the problem, and proved the theorem without using (III) and with a less stringent hypothesis in place of (I).

2. 1. We require the following lemmas.

Lemma 1. (Hardy and Littlewood¹¹). *The necessary and sufficient condition that $\sum a_n$ be summable by some Cesàro mean to sum A is that there be integers K, k such that (I) $a_n = O(n^K)$ and (II) $f_k(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$.*

Lemma 2. *The necessary and sufficient condition that some Cesàro mean of $\sum a_n$ be bounded is that there be integers K, k such that*

(I) $a_n = O(n^K)$ and (II) $f_k(z) = O(1)$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$.

The proof is similar to that of lemma 1.

Lemma 3. *If there are positive integers k, λ such that*

(I) $f_k(z) = O(1)$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$,

(II) $f_\lambda(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $|\gamma| < \frac{1}{2}\pi$,

then $f_{\lambda+1}(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$.

This we have proved elsewhere¹²).

Lemma 4. [Andersen¹³] *If $\sum a_n$ is bounded (C, α) , $\alpha \geq -1$, and summable (C, k) for some integer k , then $\sum a_n$ is summable $(C, \alpha + \delta)$ for every $\delta > 0$.*

2. 2. Proof of theorem 1. It follows from condition (1) and lemma 2 that there is an integer k such that $f_k(z) = O(1)$ as $z \rightarrow 1$ in $|z| < 1$. Hence, by condition (II) and lemma 3, $f_{k+1}(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$

¹⁰) Wiener, 13.

¹¹) Hardy and Littlewood, 3.

¹²) Bosanquet and Cartwright, 2.

¹³) Andersen, 1.

in $|z| < 1$. It follows, by lemma 1, that $\sum a_n$ is summable by some Cesàro mean, and by lemma 4 that $\sum a_n$ is summable $(C, \alpha + \delta)$ for every $\delta > 0$.

3. Proof of theorem 2. Since a_n is real, we have

$$f(re^{i\theta}) = \sum a_n r^n \cos n\theta + i \sum a_n r^n \sin n\theta \rightarrow A_1 + iA_2$$

along $\arg(1 - re^{i\theta}) = \gamma$, and therefore

$$f(re^{-i\theta}) = \sum a_n r^n \cos n\theta - i \sum a_n r^n \sin n\theta \rightarrow A_1 - iA_2$$

along $\arg(1 - re^{-i\theta}) = \gamma$, i. e., $f(z) \rightarrow A_1 - iA_2$ along $\arg(1 - re^{i\theta}) = -\gamma^{14}$. Therefore it follows from (II) by a theorem of Phragmén and Lindelöf that $f(z) = O(1)$ in $|\arg(1 - z)| \leq \gamma$; and hence, by a theorem of Lindelöf, we have $A_1 - iA_2 = A_1 + iA_2 = A_1$, and $f(z) \rightarrow A_1 = A$ as $z \rightarrow 1$ in $|\arg(1 - z)| \leq \gamma$.

The corollary follows from the well-known theorem of Hardy and Littlewood.

4. 1. In theorem 3 we cannot follow the method of theorem 1 throughout because we have not proved a one-sided version of lemma 3. We require the following lemmas.

Lemma 5. Under hypotheses (I) and (IV) of theorem 3 we have

$$\int_z^1 f(u) du = \sum \frac{a_n}{n+1} (1 - z^{n+1})$$

for $|z| < 1$.

Proof. We have, for $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$,

$$\int_z^\zeta f(u) du = \sum \frac{a_n}{n+1} (\zeta^{n+1} - z^{n+1}).$$

The result will follow from Abel's theorem if we prove that $\sum \frac{a_n}{n+1}$ is convergent.

Now it follows from (IV) that

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \sum \frac{a_n}{n+1} \zeta^{n+1}$$

exists, provided that $\zeta \rightarrow 1$ along $\arg(1 - z) = \gamma$. But $n \cdot \frac{a_n}{n+1} = O(1)$; and therefore, by Littlewood's theorem with angular approach¹⁵) (which may be regarded as the case $\alpha = -1$, $\lambda = 0$ of theorem 1), it follows that $\sum \frac{a_n}{n+1}$ is convergent.

¹⁴) We are indebted to Prof. Wiener for drawing our attention to this point.

¹⁵) Hardy and Littlewood, 5.

Lemma 6. (Montel's theorem¹⁶). If $f(z)$ is regular in a sector $\alpha < \arg(1-z) < \beta$, $0 < |1-z| < \varrho$, and omits there values covering a certain region¹⁷ of the complex plane; if further $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $\alpha < \gamma < \beta$, then $f(z) \rightarrow A$ when $z \rightarrow 1$ in $\alpha + \delta \leq \arg(1-z) \leq \beta - \delta$, provided $\delta > 0$.

Lemma 7. If $f_1(z)$ is regular in a sector $\alpha < \arg(1-z) < \beta$, $0 < |1-z| < \varrho$, and if $f_1(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in the sector, then $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in any sector $\alpha + \delta \leq \arg(1-z) \leq \beta - \delta$, provided $\delta > 0$.

Proof. We have for $\alpha + \delta \leq \arg(1-z) \leq \beta - \delta$,

$$f(z) = \frac{d}{dz} \{(1-z)f_1(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1-u)f_1(u)}{(u-z)^2} du,$$

where C is the circle $|u-z| = d \leq |1-z| \sin \delta$, and the result may be deduced without difficulty¹⁸.

4. 2. Proof of theorem 3. We may suppose without loss of generality that $s_n \equiv s_n''$. For it follows from condition (III) that there exists a number K such that $-\pi + \delta \leq \arg(s_n + K) \leq \pi - 2\gamma - \delta$. But we can change s_n into $s_n + K$ by altering the first term of the series $\sum a_n$ and writing $A + K$ instead of A .

We shall show that, if

$$0 < \eta < \delta,$$

there is a number K such that

$$(4.21) \quad |\arg\{f_1(z) + K\} + \gamma| < \pi,$$

provided that $\gamma - \eta < \arg(1-z) < \gamma + \eta$, $0 < |1-z| < \varrho$. In other words there is a sector, enclosing $\arg(1-z) = \gamma$ in which $f_1(z)$ omits values covering a region of the complex plane. Now, by lemma 5, $f_1(z)$ is regular in this sector and also tends to A as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$. It will then follow from lemma 6 that $f_1(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in $\gamma - \frac{1}{2}\eta \leq \arg(1-z) \leq \gamma + \frac{1}{2}\eta$, and by lemma 7 that $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ in $\gamma - \frac{1}{4}\eta \leq \arg(1-z) \leq \gamma + \frac{1}{4}\eta$. We can repeat the argument with $\gamma_1 = \gamma - \frac{1}{4}\eta$ in place of γ , and again with $\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{1}{4}\eta$ in place of γ_1 , and so on. After $4\gamma/\eta$ times we have $f(z) \rightarrow A$ as $z \rightarrow 1$ along the real axis. The theorem will then follow from the known case.

Let

$$A_N(z) = \sum_0^N a_n z^n = (1-z) \sum_0^N s_n z^n + s_N z^{N+1},$$

$$B_N(z) = \sum_{N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

¹⁶) See Julia, 7, p. 99.

¹⁷) It is enough to assume only that $f(z)$ omits at least two values.

¹⁸) This is a particular case of a theorem proved in our former paper, see Bosanquet and Cartwright, 2., theorem IIa.

Then

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} \int_z^1 A_N(u) du + \frac{1}{1-z} \int_z^1 B_N(u) du = I_1 + I_2.$$

Now write

$$I_2 = \frac{1}{1-z} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} (1-z^{n+1}) + \frac{1}{1-z} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (1-z^{n+1}) = I_3 + I_4.$$

Then, for $|z| < 1$, since $R(1-z^{n+1}) > 0$, it follows that $|\arg(1-z^{n+1})| < \frac{1}{2}\pi$, and hence that

$$-\pi + \delta < \arg \sum_{N+1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (1-z^{n+1}) < \pi - \delta.$$

Therefore, for $\gamma - \eta < \arg(1-z) < \gamma + \eta$ we have

$$(4.22) \quad -\pi + \delta - \eta < \arg I_4 + \gamma < \pi - \delta + \eta.$$

Next we have

$$|I_3| < \frac{1}{|1-z|} \sum_{N+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{|1-z|} O\left(\frac{1}{N}\right) = O(1)$$

provided that

$$N \sim \frac{K_1}{|1-z|}.$$

Now write

$$I_1 = \frac{1}{1-z} \sum_0^N s_n \left\{ \frac{1-z^{n+1}}{n+1} - \frac{1-z^{n+2}}{n+2} \right\} + s_N \frac{1-z^{N+2}}{(N+2)(1-z)} = I_5 + I_6.$$

We observe that

$$\begin{aligned} \arg \left[\frac{1}{1-z} \left\{ \frac{1-z^{n+1}}{n+1} - \frac{1-z^{n+2}}{n+2} \right\} \right] \\ = \arg \left\{ (1-z) \frac{1+2z+3z^2+\dots+(n+1)z^n}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ = \arg(1-z) + O(n\theta), \text{ where } z = re^{i\theta}, \\ = \arg(1-z) + O(n|1-z|). \end{aligned}$$

It follows that, given any $\varepsilon > 0$, K_2 can be chosen so that, for $n < \frac{K_2}{|1-z|}$,

$$\left| \arg \left[\frac{1}{1-z} \left\{ \frac{1-z^{n+1}}{n+1} - \frac{1-z^{n+2}}{n+2} \right\} \right] - \gamma \right| < \varepsilon,$$

provided that $\gamma - \eta < \arg(1-z) < \gamma + \eta$.

Hence

$$(4.23) \quad -\pi + \delta - \eta - \varepsilon < \arg I_5 + \gamma < \pi - \delta + \eta + \varepsilon,$$

and, choosing $\varepsilon < \delta - \eta$, we have $|\arg I_5 + \gamma| < \pi$. Also

$$\begin{aligned} \arg I_6 &= \arg s_N + \arg(1+z+\dots+z^{N+1}) \\ &= \arg s_N + O(N\theta), \end{aligned}$$

so that $|\arg I_6 + \gamma| < \pi - \delta + \eta + \varepsilon < \pi$. Combining these results we obtain (4.21).

5. The above method also gives the following result.

Theorem 4. If

- (I) $a_n = O(1)$,
 (II) $a_n = b_n + c_n$, where $nb_n = O(n^\tau)$, $0 < \tau < 1$, and $|\arg c_n| \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$,
 (III) $f(z) \sim \frac{A}{(1-z)^\tau}$ as $z \rightarrow 1$ along $\arg(1-z) = \gamma$, $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}\pi$,

then

$$\sum_0^n a_m \sim \frac{A n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

When $\tau = 1$, the theorem is still true, but in this case condition (I) includes condition (II) and there is no one-sidedness. The condition corresponding to (III) in theorem 3 is unnecessary here.

Proof. By an argument similar to that of theorem 3, but without any partial summation, we show that there is a constant K such that

$$|\arg \{(1-z)^\tau f_1(z) + K\} + \gamma(1-\tau)| < \pi$$

in $\gamma - \eta < \arg(1-z) < \gamma + \eta$; and since

$$(1-z)^\tau f_1(z) + K \rightarrow \frac{A}{1-\tau} + K$$

along $\arg(1-z) = \gamma$, it does so in $\gamma - \frac{1}{2}\eta < \arg(1-z) < \gamma + \frac{1}{2}\eta$.

By an argument similar to that of lemma 7 we see that

$$(5.1) \quad f(z) \sim \frac{A}{(1-z)^\tau}$$

in $\gamma - \frac{1}{4}\eta < \arg(1-z) < \gamma + \frac{1}{4}\eta$. Repeating the argument as before we show that (5.1) holds when $kv \rightarrow 1$ by real values, and the result follows from a theorem of Hardy and Littlewood.

6. It may be observed that in theorem 3 we actually prove rather more; in fact we prove the following result:

Theorem 5. If

$$(I) \quad \sum \frac{a_n}{n+1} \text{ is convergent,}$$

II) conditions (II) and (III) of theorem 3 are satisfied,

then there is an $\eta > 0$ such that

$$|\arg \{f_1(z) + K\} + \gamma| < \pi$$

provided that $|\arg(1-z) + \gamma| < \eta$.

This is a one-sided analogue of the 'necessary' part of lemma 2 for the particular case involving $(C, -1)$ and $f_1(z)$.

We do not use $f(z) \rightarrow A$ at all so that we have to strengthen (I) slightly in order to show that $f_1(z)$ exists in $|z| < 1$.

References.

1. A. F. Andersen, Studier over Cesaros Summabilitetsmetode. (Copenhagen, 1921).
2. L. S. Bosanquet and M. L. Cartwright, On the Hölder and Cesàro Means of an analytic function. *Math. Zeitschr.* **37** (1933), S. 170—192.
3. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Solution of the Cesaro summability problem for power series and Fourier series. *Math. Zeitschr.* **19** (1924), p. 67—96.
4. — — Tauberian theorems concerning power series, etc. *Proc. London Math. Soc.* (2) **13** (1914), p. 174—191.
5. — — Abel's theorem and its converse. *Proc. London Math. Soc.* (2) **18** (1918), p. 205—235.
6. — — Notes on the theory of series XVI: Two Tauberian theorems. *Journ. London Math. Soc.* **6** (1931), p. 281—286.
7. G. Julia, Lecons sur les fonctions uniformes. (Paris 1923.)
8. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 2nd. Edn. (Berlin 1929.)
9. J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series. *Proc. London Math. Soc.* (2) **9** (1910), p. 434—448.
10. P. Montel, Sur la représentation conforme. *Journ. de Math.* (4) **3**, (1917), p. 1—54.
11. L. Neder, Über Taubersche Bedingungen. *Proc. London Math. Soc.* (2) **23** (1923), p. 172—184.
12. G. Polya, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Vol. I (Berlin 1925).
13. N. Wiener, A one-sided Tauberian theorem. *Math. Zeitschr.* **36** (1933), S. 787—789.

(Eingegangen am 28. Mai 1932.)

Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.

Siebente Abhandlung.

Beiträge zur Maxwell'schen Theorie der Saturnringe. Anfangswertproblem¹⁾.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Die vorliegende Abhandlung schließt unmittelbar an die fünfte Abhandlung dieser Reihe an. In jener Arbeit handelte es sich um die Bestimmung permanenter Bewegungen eines um den Zentralkörper (Saturn) über ein oder mehrere angenähert kreisförmige ebene Gebiete verteilten vollkommen inkohärenten (staubartigen) Mittels bei Anwesenheit eines störenden in derselben Ebene in einer Kreisbahn um den Saturn bewegten Satelliten. Die Eigengravitation der Ringe entspricht im wesentlichen einem logarithmischen Potential, die Anziehung der einzelnen Teilchen durch den Zentralkörper und durch den Satelliten gehorcht hingegen dem Newtonschen Gesetz²⁾.

Im folgenden wird unter Zugrundelegung desselben mechanischen Systems das *Anfangswertproblem* behandelt, und es wird gezeigt, daß, wenn der Anfangszustand geeigneten, durch Ungleichheiten gekennzeichneten Bedingungen genügt, sich die Bewegung des Systems über beliebig lange Zeiträume mathematisch verfolgen läßt. Genauer, je weniger sich die Anfangsbedingungen von denjenigen eines stationären Zustandes entfernen, um so länger bleibt die Bewegung mit Bestimmtheit in der Nachbarschaft der fraglichen stationären Bewegung liegen³⁾.

¹⁾ Vgl. L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Math. Zeitschr., Bd. 10, S. 130—159 (1921); zweite Abhandlung, ebenda, Bd. 12, S. 201—218 (1922); dritte Abhandlung, a. a. O., Bd. 13, S. 82 bis 118 (1922); vierte Abhandlung, a. a. O., Bd. 17, S. 62—110 (1923); fünfte Abhandlung, Festschrift für H. v. Seeliger, Berlin 1924 (J. Springer), S. 200—227; sechste Abhandlung. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II. Vol. I, (1932—X), S. 173—213. Zum Verständnis der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis der sechs vorgenannten Aufsätze nicht erforderlich.

²⁾ Eine Interpretation dieses mechanischen Modells findet sich auf S. 426.

³⁾ Eine exakte Fassung dieses Ergebnisses vergleiche S. 436.

Erstes Kapitel.

§ 1.

Problemstellung.

In dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems möge sich eine punktförmige Masse M befinden. Über die Kreisringflächen

$$(1) \quad \begin{cases} z = 0, R_{k0}^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R_k^0)^2, & (k = 1, \dots, m) \\ R_{10} < R_1 < R_{20} < \dots \end{cases}$$

sei ferner eine Massenbelegung konstanter Dichte μ_0 verteilt (Fig. 1). Die Gesamtmasse der Ringe ist also

$$\pi \mu_0 \sum_1^m \{(R_k^0)^2 - R_{k0}^2\}.$$

Die einzelnen Teilchen können sich, unbehindert durch die Nachbarteilchen, nach allen Richtungen hin frei bewegen und üben keinerlei Spannkkräfte aufeinander aus.

Betrachten wir irgendeine Verschiebung der mit Masse belegten Flächenstücke, bei der der Punkt $P_0 = (x, y, 0)$ in $\dot{P}_0 = (x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$ übergeht, unter $\Delta x, \Delta y$ Funktionen verstanden, die stetige Ableitungen erster Ordnung haben.

Sind, wie wir jetzt annehmen wollen, die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x}, \frac{\partial \Delta x}{\partial y}, \frac{\partial \Delta y}{\partial x}, \frac{\partial \Delta y}{\partial y},$$

dem absoluten Betrage nach hinreichend klein, so definiert der Übergang von P_0 zu $\dot{P}_0$ eine topologische Abbildung der Kreisringbereiche F_0 auf gewisse ringähnliche Bereiche $\dot{F}_0$. Es genügt, beispielsweise

$$\left| \frac{\partial \Delta x}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \Delta x}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \Delta y}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \Delta y}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{3}$$

vorauszusetzen. Geht dabei ein P_0 enthaltendes Flächenelement df_0 in $d\dot{f}_0$ über, so wird die Dichte $\dot{\mu}_0$ der Masse in $\dot{P}_0$ der Gleichung

$$(2) \quad \dot{\mu}_0 d\dot{f}_0 = \mu_0 df_0$$

gemäß festgesetzt. Die Dichte $\dot{\mu}_0$ ist, als Funktion von x und y aufgefaßt, stetig.

Bei der Anwendung auf das astronomische Problem der Saturnringe hat man sich vorzustellen, daß die einzelnen Massenteilchen einander nicht berühren, und μ_0 die mittlere Dichte der Belegung darstellt. Die Beziehung (2) ist die Kontinuitätsgleichung.

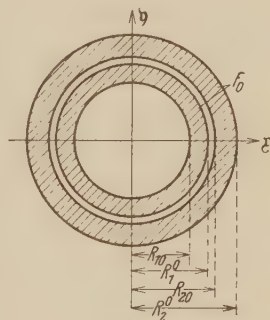


Fig. 1.

Die einzelnen Massenteilchen der Ringe sind durch Gravitationskräfte aneinander geknüpft. Die zwischen zwei in den Punkten Q_1, Q_2 in einer Entfernung r_{12} befindlichen Massenelementen dm_1 und dm_2 wirkende Kraft soll den Wert

$$(3) \quad -\kappa \frac{dm_1 dm_2}{r_{12} \sqrt{r_{12}^2 + h^2}},$$

entsprechend einem Potential

$$(4) \quad \frac{\kappa}{h} dm_1 dm_2 \log \frac{\sqrt{r_{12}^2 + h^2} + h}{r_{12}},$$

haben. Auf dieses Anziehungsgesetz wird man durch folgende Betrachtungen geführt.

Die Masse der Saturnringe, die wir uns mit Cassini und Maxwell als aus unzähligen Einzelkörpern — kleinen Satelliten, Meteorsteinen oder kosmischem Staub — bestehend vorstellen, ist tatsächlich über eine Anzahl dreidimensionaler Ringkörper von rechteckigem Querschnitt

$$(5) \quad R_{k0}^2 \leq x^2 + y^2 \leq (R_k^0)^2, \quad -h \leq z \leq h$$

verteilt. Die Ebene $x-y$ ist die Mittelebene aller Ringkörper. Bewegt sich ein Teilchen der in den Ringen verteilten Materie unter der Einwirkung der Gravitationskraft des Saturn allein, so beschreibt es eine Ellipse, deren Ebene durch den Mittelpunkt des Planeten hindurchgeht. Die Bahnebenen verschiedener Teilchen schneiden einander; darum sind Zusammenstöße unvermeidlich, sofern, wie wir vorausgesetzt haben, Spannkraft nicht vorhanden sind. Die Wirkung der Zusammenstöße ist freilich nur geringfügig, da die einzelnen Teilchen einander unter einem sehr spitzen Winkel treffen und die Geschwindigkeitsdifferenzen auch nur ganz klein sind. Nach einer von Maxwell durchgeführten überschläglichen Berechnung dürfte der Verlust an kinetischer Energie durch Zusammenstöße (innere Reibung) im Jahre nicht mehr als den $\frac{1}{40} \cdot 10^{-12}$ -ten Teil der Gesamtenergie betragen⁴⁾. In dem Folgenden soll darum von den Zusammenstößen ganz abgesehen und angenommen werden, daß alle Massenteilchen, die sich in denselben Punkt der Ebene $x-y$ hineinprojizieren, allemal die gleichen Bahnen in parallelen Ebenen beschreiben. Da nun die Anziehungskraft, die das den Punkt Q_2 enthaltende Elementarstäbchen von der Höhe $2h$ und der Gesamtmasse dm_2 auf die Masseneinheit im Punkte Q_1 ausübt, wie man leicht berechnet, den Wert

$$-\frac{\kappa dm_2}{r_{12} \sqrt{r_{12}^2 + h^2}}$$

⁴⁾ Vgl. The scientific papers of James Clerk Maxwell, Vol. 1, On the stability of the motion of Saturns Rings, S. 288—377, insbes. S. 354—356.

hat, so kommt man zu dem eingangs angegebenen mechanischen Modell. Die Kraft, mit der dieselbe Masseneinheit von dem Zentralkörper angezogen wird, ist natürlich die Newtonsche.

Ein statisches Gleichgewicht des Systems ist selbstverständlich nicht denkbar. Ebenso wenig kann das System wie ein starrer Körper rotieren. Nimmt man indessen an, daß die Teilchen, die sich auf der Peripherie eines Kreises vom Radius R um den Koordinatenursprung ($R_{k0} \leq R \leq R_k^0$, $k = 1, \dots, m$) befinden, mit der Winkelgeschwindigkeit ω ,

$$(6) \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{R^3} [M + \mu_0 R^2 J_0(R)],$$

unter $J_0(R)$ eine gewisse angebbare Funktion verstanden, um den Zentralkörper rotieren, so wird das System sich im dynamischen Gleichgewicht befinden. Die Winkelgeschwindigkeit nimmt, zumindest wenn μ_0 hinreichend klein ist, mit wachsender Entfernung von dem Zentralkörper monoton ab. Diese Bewegung wird gestört, wenn man den Anfangszustand ein wenig ändert und wenn man dem System eine weitere punktförmige Masse $\mathfrak{M}$ hinzufügt. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M}$ um den Körper M , der festgehalten wird, in der Ebene $z = 0$ gleichförmig rotiert. Die Entfernung der Masse $\mathfrak{M}$ von dem Koordinatenursprung heiße $\mathfrak{R}$, ihre Winkelgeschwindigkeit β .

§ 2.

Die Integro-Differentialgleichungen der Bewegung.

Wir gehen von dem dynamischen Gleichgewichtszustande bei Abwesenheit eines störenden Körpers aus und beziehen die Lage der Teilchen, die den Kreis

$$(7) \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad R_{k0} \leq R \leq R_k^0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

erfüllen, auf ein kartesisches Koordinatensystem $x-y-z$, dessen Ursprung mit dem Ursprung des Systems $x-y-z$, dessen $x-y$ -Ebene mit der Ebene $z = 0$ zusammenfällt, und das um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig rotiert. Wir nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ alle die unendlich vielen rotierenden Achsenkreuze zusammenfallen.

Die Lage eines bestimmten Massenteilchens des Kreises (7) ist durch seine Polarkoordinaten $R, \frac{s}{R}$ in bezug auf das rotierende Achsenkreuz, die zugleich seine Polarkoordinaten gegen das feste Achsenkreuz zur Zeit $t = 0$ sind, vollkommen bestimmt. Hier ist s die von dem Punkte $(R, 0, 0)$ bis zum gerade betrachteten Punkte gerechnete Bogenlänge des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. Im allgemeinen wird das betrachtete Teilchen im Laufe der Zeit seine Lage gegen die rotierenden Achsen ändern. Seine Polarkoordinaten werden die Werte

$$(8) \quad R + \zeta, \quad \frac{s + \sigma}{R}$$

annehmen, unter ζ und σ gewisse Funktionen des Halbmessers R , des Polarwinkels $\frac{s}{R}$ und der Zeit t verstanden (Fig. 2)^{4a)}.

Im Laufe der weiteren Betrachtungen wird es sich stets um kleine Bewegungen handeln. Wir wollen ein für allemal $|\zeta| < R$ voraussetzen.

Es gilt jetzt

$$(9) \quad x = (R + \zeta) \cos\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right), \quad y = (R + \zeta) \sin\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right),$$

mithin

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -(R + \zeta) \sin\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = (R + \zeta) \cos\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sin\left(\omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right), \end{cases}$$

so daß die kinetische Energie T den Wert

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} (R + \zeta)^2 \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2$$

hat. Wir finden weiter leicht die Formeln

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial T}{\partial \sigma} = (R + \zeta)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \\ \quad + 2(R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{cases}$$

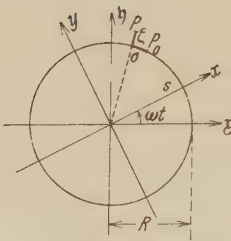


Fig. 2.

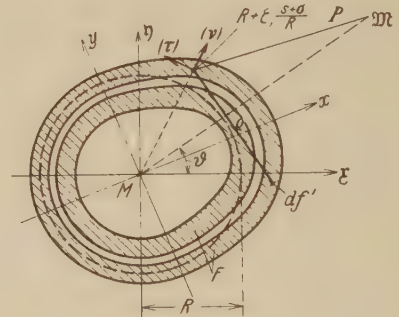


Fig. 3.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Massenpunktes $R, \frac{s}{R}$ sind demnach

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 = Q_\zeta, \\ (R + \zeta)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = Q_\sigma. \end{cases}$$

^{4a)} In der Fig. 2 sind P_0 und P durch P_{t_0} und P_t zu ersetzen.

Hier bezeichnen $Q_{\zeta} \delta \zeta$ und $Q_{\sigma} \delta \sigma$ die virtuellen Arbeiten, welche die auf eine Masseneinheit in $\left(R + \zeta, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ wirkenden Gravitationskräfte bei ihrem Übergang in den Punkt $\left(R + \zeta + \delta \zeta, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ bzw. $\left(R + \zeta, \frac{s + \sigma + \delta \sigma}{R}\right)$ leisten würden. Betrachten wir die Gesamtheit der bewegten Massenpunkte im Augenblick t . Die Gesamtheit der von ihnen bedeckten Flächenstücke in der Ebene $x-y$ heiße F , die Dichte in einem Flächenelement $d f'$ sei μ' (Fig. 3). Die von der Eigengravitation der Ringe herührenden Beiträge zu Q_{ζ} und Q_{σ} sind

$$(14) \quad \text{und} \quad \frac{\kappa}{h} \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho}$$

$$\frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho}.$$

Hier bezeichnet ϱ den Abstand des betrachteten Punktes $\left(R + \zeta, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ von dem Flächenelement $d f'$, oder, was auf dasselbe hinausläuft, der beiden Punkte P_t und P'_t , deren Polarkoordinaten in dem Achsenkreuz $x-\eta$ 3 die Werte

$$\left(R + \zeta, \omega t + \frac{s + \sigma}{R}\right) \quad \text{und} \quad \left(R' + \zeta', \omega' t + \frac{s' + \sigma'}{R'}\right)$$

haben. Ferner bezeichnen die Symbole $\frac{\partial}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial}{\partial \tau}$ die Ableitungen in der Richtung der äußeren Normale an den Kreis (7) und in der darauf senkrechten Richtung in $\left(R + \zeta, \frac{s + \sigma}{R}\right)$. Ist die Entfernung des störenden Körpers $\mathfrak{M}$ von dem Punkte $\left(R + \zeta, \frac{s + \sigma}{R}\right)$ gleich $\mathbf{P}$, so sind die von seiner Anziehung herrührenden Beiträge zu Q_{ζ} und Q_{σ} entsprechend gleich

$$(15) \quad \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\mathbf{P}} \quad \text{und} \quad \kappa \mathfrak{M} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\mathbf{P}}.$$

Die Anziehung des Zentralkörpers gibt nur zu Q_{ζ} einen Beitrag. Dieser hat den Wert

$$(16) \quad - \frac{M \kappa}{(R + \zeta)^2}.$$

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten demnach

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2$$

$$= - \frac{M \kappa}{(R + \zeta)^2} + \frac{\kappa}{h} \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\mathbf{P}},$$

$$(R + \zeta)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$= \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} + \kappa \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\mathbf{P}}.$$

Sei ϑ der Polarwinkel des Körpers $\mathfrak{M}$ in der festen x - η -Ebene zur Zeit t . Offenbar ist

$$(18) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \beta t \quad (\vartheta_0 \text{ konstant}).$$

Die Winkelgeschwindigkeit der relativen Bewegung von $\mathfrak{M}$ gegen das zu dem Kreise $x^2 + \eta^2 = R^2$, $\vartheta = 0$ gehörige rotierende Achsenkreuz x - η - ϑ ist gleich $\beta - \omega = \gamma$. Offenbar ist γ für verschiedene Achsenkreuze verschieden.

Die Gesamtheit der durch (7) in der Ebene x - η bestimmten Ringflächen heiße F_0 . Es sei wie vorhin μ_0 die als konstant vorausgesetzte Dichte in F_0 , und es möge df'_0 ein Flächenelement in F_0 bezeichnen. Es gilt dann $\mu_0 df'_0 = \mu' d f'$, und wir können die Gleichungen (17) auch in der Form schreiben

$$(19) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \\ &= - \frac{M \kappa}{(R + \zeta)^2} + \frac{\kappa}{h} \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{P}, \\ & (R + \zeta)^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2(R + \zeta) \left(\omega + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ &= \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\zeta}{R} \right) \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} + \kappa \left(1 + \frac{\zeta}{R} \right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{P}. \end{aligned}$$

Es sei ϱ_0 der Abstand der Punkte $P_{t_0} = \left(R, \omega t + \frac{s}{R} \right)$ und $P'_{t_0} = \left(R', \omega' t + \frac{s'}{R'} \right)$, es seien $\frac{\partial}{\partial \nu_0}$ und $\frac{\partial}{\partial \tau_0}$ die Ableitungen in der Richtung OP_{t_0} und in der darauf senkrechten Richtung. Wir transformieren die Gleichungen (19), indem wir die Glieder ersten Grades in bezug auf ζ , σ und ihre partiellen Ableitungen nach links, alle anderen Glieder nach rechts schaffen. Um dies zu bewerkstelligen, müssen zuvörderst die beiden Integralausdrücke in bekannter Weise in unendliche Reihen entwickelt werden⁵⁾.

Neben den Punkten

$$P_t = \left(R + \zeta, \omega t + \frac{s + \sigma}{R} \right) \quad \text{und} \quad P'_t = \left(R' + \zeta', \omega' t + \frac{s' + \sigma'}{R'} \right)$$

betrachten wir, unter t zunächst einen reellen Parameter verstanden, die Punkte

$$P_{t+\tau} = \left(R + \tau \zeta, \omega t + \frac{s + \tau \sigma}{R} \right) \quad \text{und} \quad P'_{t+\tau} = \left(R' + \tau \zeta', \omega' t + \frac{s' + \tau \sigma'}{R'} \right)^{6)}.$$

Ihr Abstand möge ϱ_t heißen. Die Ausdrücke

$$\int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \nu_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \quad \text{und} \quad \int_{F_0} \mu'_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \tau_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t},$$

⁵⁾ Man vergleiche etwa die analogen Betrachtungen der sechsten Abhandlung, S. 7–15.

⁶⁾ Wir befinden uns in der (festen) Ebene x - η . Man beachte, daß die Winkelgeschwindigkeit eine alsbald zu bestimmende Funktion von R darstellt.

in denen die Symbole $\frac{\partial}{\partial v_t}$ und $\frac{\partial}{\partial \tau_t}$ die Ableitungen in der Richtung OP_{tt} und in der darauf im Sinne der Rotation senkrecht stehenden Richtung bezeichnen, haben, sofern $|\zeta|$ und $|\sigma|$ und ihre partiellen Ableitungen in bezug auf die Ortsvariablen hinreichend klein sind, auch noch für alle komplexen t mit $|t| \leq t^* > 1$ eine bestimmte Bedeutung und stellen analytische und reguläre Funktionen von t dar.

Es ist nämlich, wie man leicht einsieht,

$$\frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \\ = - \frac{h}{\varrho_t^2 \sqrt{\varrho_t^2 + h^2}} \left[R + t \zeta - (R' + t \zeta') \cos \left\{ (\omega' - \omega) t + \frac{s'}{R'} - \frac{s}{R} + t \left(\frac{\sigma'}{R'} - \frac{\sigma}{R} \right) \right\} \right]$$

und dieser Ausdruck wird für $\varrho_0 \rightarrow 0$ wie $\frac{1}{\varrho_n}$ unendlich. Entsprechend ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \tau_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \\ = \frac{h}{\varrho_t^2 \sqrt{\varrho_t^2 + h^2}} (R' + t \zeta') \sin \left\{ (\omega' - \omega) t + \frac{s'}{R'} - \frac{s}{R} + t \left(\frac{\sigma'}{R'} - \frac{\sigma}{R} \right) \right\}.$$

Es gilt die Cauchy-Taylorsche Entwicklung

$$(20) \quad \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} = \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0},$$

somit für $t = 1$

$$(21) \quad \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} = \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0},$$

wofür man wegen $\mu_0 df'_0 = \mu' df'$ auch noch schreiben kann

$$(22) \quad \int_F \mu' df' \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} = \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_F \mu' df' \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0} \\ = \int_{F_0} \mu_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} + \sum_{m=1}^{\infty} J_m.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}
 \int_F \mu' df' \frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} &= \int_{F_0} \mu'_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} \\
 (23) \quad &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{F'} \mu' df' \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial}{\partial \tau_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^2 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0} \\
 &= \int_{F_0} \mu'_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} + \sum_{m=1}^{\infty} K_m = \sum_{m=1}^{\infty} K_m,
 \end{aligned}$$

da aus Gründen der Symmetrie

$$\int_{F_0} \mu'_0 df'_0 \frac{\partial}{\partial \tau_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0} = 0$$

ist.

Wir nehmen an, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von ζ und σ in bezug auf die Ortsvariablen einer Hölderschen Bedingung, kürzer einer H -Bedingung mit dem Exponenten $\lambda < 1$, genügen, und setzen

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \Omega = \text{obere Grenze } \left\{ |\zeta|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|_{\lambda}, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right|_{\lambda}; \right. \\
 \left. |\sigma|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right|_{\lambda}, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right|_{\lambda} \right\}^7)
 \end{aligned}$$

für alle (R, s) in F_0 und alle t in $\langle 0, T \rangle$.

Die Reihen (22), (23) konvergieren gewiß unbedingt und gleichmäßig, sofern, unter ε_0 einen hinreichend kleinen Wert verstanden,

$$(25) \quad \Omega \leq \varepsilon_0$$

gilt.

Für die weiteren Entwicklungen sind folgende Eigenschaften der Integralausdrücke J_m, K_m von Wichtigkeit. Die zu integrierenden Funk-

7) Wir schreiben zur Abkürzung beispielsweise $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|_{\lambda}$

$$= \text{obere Grenze} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial R} \zeta(R+k, s+l) - \frac{\partial}{\partial R} \zeta(R, s) \right| (k^2 + l^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \right\}$$

bei festgehaltenen R, s und t . Da nach Voraussetzung $\frac{\partial \zeta}{\partial R}$ der Hölderschen Bedingung

$$\left| \frac{\partial}{\partial R} \zeta(R+k, s+l) - \frac{\partial}{\partial R} \zeta(R, s) \right| < \text{Const.} (k^2 + l^2)^{\frac{\lambda}{2}}$$

genügt, so hat $\left| \frac{\partial}{\partial R} \right|_{\lambda}$ einen bestimmten endlichen von R, s und t abhängigen Wert.

tionen verhalten sich, wenn P'_i gegen P_i konvergiert, wie $1/\varrho$ oder, was dasselbe ist, wie $1/\varrho_0$. Bei festgehaltenem t , das wir in einem Intervall $\langle 0, T \rangle$ gelegen annehmen, sind alle J_m und K_m sowie ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in bezug auf R und s stetig und erfüllen eine Höldersche Bedingung mit dem Exponenten λ . Für alle t in $\langle 0, T \rangle$ gleichmäßig gelten die Ungleichheiten

$$(26) \quad |J_1|, \left| \frac{\partial J_1}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial J_1}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial J_1}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial J_1}{\partial s} \right|_\lambda; \quad |K_1|, \left| \frac{\partial K_1}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial K_1}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial K_1}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial K_1}{\partial s} \right|_\lambda \\ \leq \alpha_1 \Omega,$$

unter α_1 eine Konstante verstanden, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \dots$

Setzt man zur Abkürzung

$$(27) \quad \Phi = J_2 + J_3 + \dots, \quad \Psi = K_2 + K_3 + \dots,$$

so bestehen die weiteren Ungleichheitsbeziehungen

$$(28) \quad |\Phi|, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_\lambda; \\ |\Psi|, \left| \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right|_\lambda \leq \alpha_2 \Omega^2.$$

Es sei $\dot{\zeta}, \dot{\sigma}$ ein anderes System wie ζ, σ beschaffener Funktionen, und es möge

$$(29) \quad |\dot{\zeta}|, \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial s} \right|_\lambda; \quad |\dot{\sigma}|, \left| \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial s} \right|_\lambda \leq \Omega$$

sein. Wir setzen

$$(30) \quad \bar{\sigma} = \text{obere Grenze} \left\{ |\dot{\zeta} - \zeta|, \left| \frac{\partial}{\partial R} (\dot{\zeta} - \zeta) \right|, \dots, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\zeta} - \zeta) \right|_\lambda; \right. \\ \left. |\dot{\sigma} - \sigma|, \left| \frac{\partial}{\partial R} (\dot{\sigma} - \sigma) \right|, \dots, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\sigma} - \sigma) \right|_\lambda \right\}.$$

Alsdann bestehen in naheliegender Schreibweise für alle t in $\langle 0, T \rangle$ gleichmäßig die weiteren Ungleichheitsbeziehungen

$$(31) \quad |\dot{\Phi} - \Phi|, \left| \frac{\partial}{\partial R} (\dot{\Phi} - \Phi) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\Phi} - \Phi) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial R} (\dot{\Phi} - \Phi) \right|_\lambda, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\Phi} - \Phi) \right|_\lambda;$$

$$(32) \quad |\dot{\Psi} - \Psi|, \left| \frac{\partial}{\partial R} (\dot{\Psi} - \Psi) \right|, \dots, \left| \frac{\partial}{\partial s} (\dot{\Psi} - \Psi) \right|_\lambda \leq \alpha_3 \Omega \bar{\sigma}.$$

Die vorstehenden Behauptungen folgen fast ohne weiteres aus den allgemeinen Sätzen über das Newtonsche Potential einer von geschlossenen Flächen der Klasse Ah^s) begrenzten Volumladung, die ich vor einiger

^{s)} Das sind Flächen mit stetiger Normale, deren Richtungskosinus als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter der Fläche einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen.

Zeit veröffentlicht habe⁹⁾. Diese Sätze gelten natürlich *mutatis mutandis* für das logarithmische Potential eines ebenen von geschlossenen Kurven der Klasse Ah begrenzten Gebietes. Von der Dichte der Belegung wird dabei vorausgesetzt, daß sie stetig ist und einer H -Bedingung mit dem Exponenten λ genügt. Wie sich ohne ernstliche Schwierigkeiten zeigen läßt, erfüllt die Belegungsdichte μ tatsächlich eine H -Bedingung mit dem Exponenten λ . Man sieht ferner unmittelbar, daß die Randkurven der Gebiete F der Klasse Ah angehören. Schließlich ist beispielsweise

$$(33) \quad \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{\varrho^2 + h^2} + h}{\varrho} = \int_F \mu' d f' \frac{\partial}{\partial v} \log \{ \sqrt{\varrho^2 + h^2} + h \} \\ + \frac{\partial}{\partial v} \int_F \mu' \log \frac{1}{\varrho} d f',$$

und der erste Integralausdruck rechterhand ist, als Funktion der kartesischen Koordinaten des Punktes P_t aufgefaßt, analytisch und regulär, so daß es letzten Endes lediglich auf das Verhalten des zweiten Summanden, demnach des logarithmischen Potentials $\int_F \mu' \log \frac{1}{\varrho} d f'$ ankommt.

Wir bestimmen jetzt ω so, daß die von ζ und σ freien nicht notwendig „kleinen“ Glieder in (19) verschwinden,

$$(34) \quad R \omega^2 = \frac{M \kappa}{R^2} - \frac{\kappa}{h} \int_{F_0} \mu_0 d f'_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \log \frac{\sqrt{\varrho_0^2 + h^2} + h}{\varrho_0}.$$

Augenscheinlich ist ω eine bestimmte Funktion von R .

Nach einer Ordnung der Glieder nehmen die Gleichungen (19) die folgende Form an:

$$(35) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3} \right) \zeta - 2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\kappa}{h} J_1 = 2 \frac{\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \zeta + (R + \zeta) \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \\ - \frac{M \kappa}{R^2} \left(\frac{3 \zeta^2}{R^2} - \frac{4 \zeta^3}{R^3} + \dots \right) + \frac{\kappa}{h} (J_2 + J_3 + \dots) + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\mathfrak{P}},$$

⁹⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, I. Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 72–83; II. Sächsische Berichte 78 (1926), S. 147–212; III. ebenda 78 (1928), S. 213–239; IV. ebenda 82 (1930), S. 265–344. Siehe namentlich IV, S. 310–323 sowie II, S. 159–167.

$$(36) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\kappa}{h} K_1 = -\frac{2}{R} \zeta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\zeta^2}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - 2\omega \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ - 2 \frac{\zeta}{R^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\kappa \zeta}{h R} K_1 + \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) (K_2 + K_3 + \dots) \\ + \kappa \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{P}^{10}.$$

Dabei ist

$$J_1 = \int_F \mu' d f' \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^3 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0} \\ = \int_{F_0} \mu'_0 d f'_0 \left\{ \zeta \left[\frac{h(3\varrho_0^3 + 2h^2)}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} (R - R' \cos \psi_0)^2 - \frac{h}{\varrho_0^3 \sqrt{\varrho_0^3 + h^2}} \right] \right. \\ + \zeta' \left[(R - R' \cos \psi_0) \frac{h(3\varrho_0^3 + 2h^2)}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} \cdot (R' - R \cos \psi_0) + \frac{h \cos \psi_0}{\varrho_0^3 \sqrt{\varrho_0^3 + h^2}} \right] \\ + \left(\frac{\sigma'}{R'} - \frac{\sigma}{R} \right) \left[R R' (R - R' \cos \psi_0) \frac{3\varrho_0^3 + 2h^2}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} \right. \\ \left. \left. - \frac{R'}{\varrho_0^3 \sqrt{\varrho_0^3 + h^2}} \right] h \sin \psi_0 \right\}$$

mit

$$\varrho_0^3 = R^3 + R'^3 - 2 R R' \cos \psi_0$$

und

$$\psi_0 = (\omega' - \omega) t + \frac{s'}{R'} - \frac{s}{R}.$$

Für $\varrho_0 \rightarrow 0$ wird der Ausdruck in geschweiften Klammern, wie man sich nach einer geeigneten Umformung überzeugt, wie $1/\varrho_0$ unendlich.

Des weiteren ist

$$K_1 = \int_F \mu' d f' \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v_t} \log \frac{\sqrt{\varrho_t^3 + h^2} + h}{\varrho_t} \right)_{t=0} \\ = \int_{F_0} \mu'_0 d f'_0 \left\{ -\zeta \frac{h(3\varrho_0^3 + 2h^2)}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} R' \sin \psi_0 (R - R' \cos \psi_0) \right. \\ + \zeta' \left[\frac{h(3\varrho_0^3 + 2h^2)}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} R' \sin \psi_0 (R \cos \psi_0 - R') + \frac{h \sin \psi_0}{\varrho_0^3 \sqrt{\varrho_0^3 + h^2}} \right] \\ \left. - \left(\frac{\sigma'}{R'} - \frac{\sigma}{R} \right) \left[\frac{h R R'^2 \sin^2 \psi_0 (3\varrho_0^3 + 2h^2)}{\varrho_0^4 (\varrho_0^3 + h^2)^{3/2}} - \frac{R' h \cos \psi_0}{\varrho_0^3 \sqrt{\varrho_0^3 + h^2}} \right] \right\}$$

und auch jetzt verhält sich der Ausdruck in geschweiften Klammern für $\varrho_0 \rightarrow 0$ wie $1/\varrho_0^{11}$.

Es sei T , wie schon früher, ein fester positiver Wert, der beliebig groß angenommen werden darf, und es mögen $c_1(R, s)$, $c_2(R, s)$, $c_3(R, s)$,

¹⁰⁾ Die Ausdrücke $\kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{P}$ und $\kappa \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{P}$ gelten als klein, da $\frac{R_m^0}{R}$

alsbald als hinreichend klein vorausgesetzt werden wird.

¹¹⁾ Ich bin Herrn Dr. Karl Maruhn für die freundliche explizite Bestimmung der Größen J_1 und K_1 zu Dank verpflichtet.

$c_4(R, s)$ auf F_0 erklärte stetige Funktionen, die stetige, einer H -Bedingung mit dem Exponenten λ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben, bezeichnen.

Wir setzen

$$(37) \quad \Omega_1 = \text{Max} \left\{ |c_1(R_1, s)|, |c_2(R, s)|, |c_3(R, s)|, |c_4(R, s)|; \right. \\ \left. \left| \frac{\partial c_1}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial c_1}{\partial s} \right|, \dots, \left| \frac{\partial c_4}{\partial s} \right|; \left| \frac{\partial c_1}{\partial R} \right|_\lambda, \left| \frac{\partial c_1}{\partial s} \right|_\lambda, \dots, \left| \frac{\partial c_4}{\partial s} \right|_\lambda \right\}$$

und beweisen, daß man Ω_1 und $R_m^0/\mathcal{R}$ gewiß so klein wählen kann, daß für alle t in $\langle 0, T \rangle$ die Integro-Differentialgleichungen (35) und (36) ein und nur ein System von Lösungen haben, die den Anfangsbedingungen

$$(38) \quad \begin{aligned} \zeta &= c_1(R, s), & \sigma &= c_2(R, s), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= c_3(R, s), & \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= c_4(R, s) \end{aligned} \quad \text{für } t = 0$$

genügen.

§ 3.

Umformung der Integro-Differentialgleichungen des Problems.

Es sei $f(x)$ eine beliebige, etwa in dem Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte stetige Funktion. Die Differentialgleichung

$$(39) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$$

hat, wie man weiß, eine und nur eine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung, die den Anfangsbedingungen

$$(40) \quad y(0) = c^{(1)}, \quad \frac{dy(0)}{dx} = c^{(2)} \quad (c^{(1)}, c^{(2)} \text{ konstant})$$

genügt. Sie läßt sich in der Form darstellen:

$$(41) \quad y(x) = \int_0^x (x-z) f(z) dz + c^{(1)} + c^{(2)} x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Wir wenden dieses Ergebnis sinngemäß zunächst auf die Integro-Differentialgleichung (35) an und finden

$$(42) \quad \begin{aligned} \zeta(t) &= c_1(R, s) + t c_3(R, s) + \int_0^t (t-\hat{t}) \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3} \right) \zeta(\hat{t}) d\hat{t} \\ &+ \int_0^t (t-\hat{t}) \left[2\omega \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa}{h} J_1 + \frac{2\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \zeta(\hat{t}) + (R + \zeta) \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &- \frac{M\kappa}{R^2} \left(\frac{3\zeta^2}{R^3} - \frac{4\zeta^3}{R^3} + \dots \right) + \frac{\kappa}{h} (J_2 + J_3 + \dots) \\ &\left. + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\hat{p}} \right] d\hat{t}^{12} \end{aligned}$$

¹²⁾ Wir schreiben zur Abkürzung $\zeta(t)$ für $\zeta(R, s, t)$; $\hat{J}_1, \dots$ bezeichnen die Ausdrücke, die aus $J_1, \dots$ entstehen, wenn man t durch $\hat{t}$ ersetzt.

oder nach einer teilweisen Integration

$$\begin{aligned}
 (43) \quad \zeta(t) = & c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s) + 2\omega \int_0^t \sigma(\hat{t}) d\hat{t} \\
 & + \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3}\right) \int_0^t (t - \hat{t}) \zeta(\hat{t}) d\hat{t} + \int_0^t (t - \hat{t}) \left[\frac{\kappa}{h} J_1 \right. \\
 & + \frac{2\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \zeta(\hat{t}) + (R + \dot{\zeta}) \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \right)^2 - \frac{M\kappa}{R^2} \left(\frac{3\dot{\zeta}^2}{R^2} - \frac{4\dot{\zeta}^3}{R^3} + \dots \right) \\
 & \left. + \frac{\kappa}{h} (J_2 + J_3 + \dots) + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\hat{p}} \right] d\hat{t}.
 \end{aligned}$$

Die Integro-Differentialgleichung (36) liefert in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
 (44) \quad \sigma(t) = & c_2(R, s) + t c_4(R, s) + \int_0^t (t - \hat{t}) \left[-2\omega \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa}{h} K_1 - \frac{2}{R} \dot{\zeta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} \right. \\
 & - \frac{\dot{\zeta}^2}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} - 2\omega \frac{\dot{\zeta}}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} - 2 \frac{\dot{\zeta}}{R^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa \dot{\zeta}}{h R} \dot{K}_1 \\
 & \left. + \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) (\dot{K}_2 + \dot{K}_3 + \dots) + \kappa \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\hat{p}} \right] d\hat{t}
 \end{aligned}$$

und nach einer teilweisen Integration

$$\begin{aligned}
 (45) \quad \sigma(t) = & c_2(R, s) + t c_4(R, s) + 2\omega t c_1(R, s) - 2\omega \int_0^t \zeta(\hat{t}) d\hat{t} \\
 & + \int_0^t (t - \hat{t}) \left[\frac{\kappa}{h} \dot{K}_1 - \frac{2}{R} \dot{\zeta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} - \frac{\dot{\zeta}^2}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} - 2\omega \frac{\dot{\zeta}}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} \right. \\
 & - 2 \frac{\dot{\zeta}}{R^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa \dot{\zeta}}{h R} K_1 + \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) (\dot{K}_1 + \dot{K}_3 + \dots) \\
 & \left. + \kappa \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\hat{p}} \right] d\hat{t}.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt das System Volterraser Integralgleichungen

$$\zeta(t) - 2\omega \int_0^t \sigma(\hat{t}) d\hat{t} - \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3} \right) \int_0^t (t - \hat{t}) \zeta(\hat{t}) d\hat{t} = F_1(t),$$

$$(46) \quad \sigma(t) + 2\omega \int_0^t \zeta(\hat{t}) d\hat{t} = F_2(t),$$

unter $F_1(t)$ und $F_2(t)$ Funktionen verstanden, die für alle t in dem Intervall $\langle 0, T \rangle$ erklärt und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter

Ordnung stetig sind. Nach bekannten Sätzen sind die Gleichungen (46) stets und zwar in einer einzigen Art und Weise lösbar, und es gilt

$$(47) \quad \begin{aligned} \zeta(t) &= F_1(t) + \int_0^t H_1(t, \bar{t}) F_1(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t H_2(t, \bar{t}) F_2(\bar{t}) d\bar{t}, \\ \sigma(t) &= F_2(t) + \int_0^t H_3(t, \bar{t}) F_1(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t H_4(t, \bar{t}) F_2(\bar{t}) d\bar{t}, \end{aligned}$$

unter $H_1(t, \bar{t}), \dots, H_4(t, \bar{t})$ explizite angebbare, übrigens gewiß nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktionen verstanden.

Es sei etwa für alle t in $\langle 0, T \rangle$

$$(48) \quad |F_1(t)|, |F_2(t)|, |F_1'(t)|, \dots, |F_2''(t)| \leq A \quad (A \text{ konstant}).$$

Aus (47) folgt in dem gleichen Intervall vor allem

$$(49) \quad |\zeta(t)|, |\sigma(t)| \leq \alpha_4 A.$$

Differentiiert man die Beziehungen (46), so findet man

$$(50) \quad \begin{aligned} \zeta'(t) - 2\omega\sigma(t) - \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3}\right) \int_0^t \zeta(\hat{t}) d\hat{t} &= F_1'(t), \\ \sigma'(t) + 2\omega\zeta(t) &= F_2'(t), \end{aligned}$$

darum wegen (48) und (49) für alle t in $\langle 0, T \rangle$

$$(51) \quad |\zeta'(t)|, |\sigma'(t)| \leq \alpha_3 A.$$

Eine weitere Differentiation von (50) führt, wie man leicht sieht, zu den Ungleichheiten

$$(52) \quad |\zeta''(t)|, |\sigma''(t)| \leq \alpha_6 A.$$

Es sei speziell gesetzt:

$$(53) \quad F_1(t) = \int_0^t (t - \hat{t})^{\frac{\kappa}{h}} \hat{J}_1 d\hat{t} + G_1(t), \quad F_2(t) = \int_0^t (t - \hat{t})^{\frac{\kappa}{h}} \hat{K}_1 d\hat{t} + G_2(t),$$

unter $G_1(t)$ und $G_2(t)$ in $\langle 0, T \rangle$ erkläre, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktionen verstanden. Augenscheinlich haben $F_1(t)$ und $F_2(t)$ die gleiche Eigenschaft¹³⁾. Wir gehen noch einen

¹³⁾ In der Tat hat beispielsweise der Integralausdruck

$$\int_0^t (t - \hat{t})^{\frac{\kappa}{h}} \hat{J}_1 d\hat{t},$$

als Funktion von t aufgefaßt, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, da J_1 , wie übrigens alle J_m und K_m ($m = 1, 2, \dots$), stetige Funktionen von t darstellen.

Schritt weiter und nehmen an, daß $G_1(t)$ und $G_2(t)$ auch noch von R und s abhängen und, als Funktionen dieser Variablen betrachtet, stetige, der H -Bedingung mit dem Exponenten λ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Genauer, es sollen alle Funktionen

$$(54) \quad G_1, \frac{\partial G_1}{\partial t} = G_1', \frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2} = G_1'', \frac{\partial G_1}{\partial R}, \frac{\partial G_1}{\partial s}, \frac{\partial G_1'}{\partial R}, \frac{\partial G_1'}{\partial s},$$

$$\frac{\partial G_1''}{\partial R}, \frac{\partial G_1''}{\partial s}, \left| \frac{\partial G_1}{\partial R} \right|_{\lambda}, \left| \frac{\partial G_1}{\partial s} \right|_{\lambda}, \left| \frac{\partial G_1'}{\partial R} \right|_{\lambda}, \dots, \left| \frac{\partial G_1''}{\partial s} \right|_{\lambda}$$

sowie die Funktionen, die man erhält, wenn man G_1 durch G_2 ersetzt, existieren und, außer möglicherweise der mit dem Zeichen $|_{\lambda}$ behafteten Ausdrücke, die jedenfalls beschränkt sind, sich stetig verhalten. Da, wie man weiß¹⁴⁾, $\hat{J}_1$ und $\hat{K}_1$ stetige, der H -Bedingung mit dem Exponenten λ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf R und s haben, so existieren auch alle zu F_1 und F_2 gehörigen Ausdrücke der Gesamtheit (54).

Setzt man (53) in (47) ein, so erhält man

$$(55) \quad \zeta(t) = G_1(t) + \int_0^t (t-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{J}_1 d\hat{i} + \int_0^t H_1(t, \bar{t}) \left[\int_0^{\bar{t}} (\bar{t}-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{J}_1 d\hat{i} \right] d\bar{t}$$

$$+ \int_0^t H_2(t, \bar{t}) \left[\int_0^{\bar{t}} (\bar{t}-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{K}_1 d\hat{i} \right] d\bar{t} + \int_0^t H_1(t, \bar{t}) G_1(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t H_2(t, \bar{t}) G_2(\bar{t}) d\bar{t},$$

$$(56) \quad \sigma(t) = G_2(t) + \int_0^t (t-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{K}_1 d\hat{i} + \int_0^t H_3(t, \bar{t}) \left[\int_0^{\bar{t}} (\bar{t}-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{J}_1 d\hat{i} \right] d\bar{t}$$

$$+ \int_0^t H_4(t, \bar{t}) \left[\int_0^{\bar{t}} (\bar{t}-i)^{\frac{\alpha}{h}} \hat{K}_1 d\hat{i} \right] d\bar{t} + \int_0^t H_3(t, \bar{t}) G_1(\bar{t}) d\bar{t} + \int_0^t H_4(t, \bar{t}) G_2(\bar{t}) d\bar{t}.$$

Dies ist ein System linearer nichthomogener Integro-Differentialgleichungen¹⁵⁾. Die Integration erstreckt sich in bezug auf die Ortsvariablen über das Gebiet F_0 , in bezug auf die Zeit über das Intervall $\langle 0, t \rangle$ ($t \leq T$). Sie sind, wie sich ohne ernste Schwierigkeiten zeigen läßt,

¹⁴⁾ Vgl. die Ausführungen auf S. 10–11.

¹⁵⁾ Man beachte, daß in J_1 und K_1 nur die Werte $\zeta(R, s, t)$, $\sigma(R, s, t)$, $\zeta(R', s', t)$, und $\sigma(R', s', t)$ und zwar linear eingehen. Vorhin bei der Einführung der Ausdrücke $J_1, K_1, \dots$ ist indessen die Existenz stetiger Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial s}, \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial R}$ vorausgesetzt worden.

durch die Neumannschen Reihen und darum gewiß stets und in einer einzigen Weise lösbar. Die Lösungen der Gleichungen (55), (56) haben stetige Ableitungen

$$(57) \quad \begin{aligned} \zeta' &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \zeta'' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial R}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s}, \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial R}, \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial s}, \quad \frac{\partial \zeta''}{\partial R}, \quad \frac{\partial \zeta''}{\partial s}, \\ \sigma' &= \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \sigma'' = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial R}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial R}, \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial s}, \quad \frac{\partial \sigma''}{\partial R}, \quad \frac{\partial \sigma''}{\partial s}, \end{aligned}$$

die sechs zuletzt hingeschriebenen partiellen Ableitungen jeder Zeile erfüllen, als Funktionen von R und s aufgefaßt, eine H -Bedingung mit dem Exponenten λ . Liegen die Ausdrücke (54) und die analogen auf G_2 bezüglichen Ausdrücke unterhalb einer festen Schranke, in Formeln, ist etwa

$$(58) \quad |G_1|, |G'_1|, |G''_1|, \left| \frac{\partial G_1}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial G''_1}{\partial s} \right|_\lambda; \quad |G_2|, |G'_2|, \dots, \left| \frac{\partial G''_2}{\partial s} \right|_\lambda \leq B$$

(B konstant),

so gelten die weiteren Ungleichheiten

$$(59) \quad \begin{aligned} &|\zeta|, |\zeta'|, |\zeta''|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \zeta''}{\partial s} \right|_\lambda; \\ &|\sigma|, |\sigma'|, |\sigma''|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \sigma''}{\partial s} \right|_\lambda \leq \alpha_7 B. \end{aligned}$$

Die Werte $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ hängen, beiläufig bemerkt, von T ab.

§ 4.

Sukzessive Approximationen.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns der Auflösung der Integro-Differentialgleichungen (43), (45) zu, die wir zur Abkürzung in der Form

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} L_1 \{ \zeta, \sigma \} &= \zeta(t) - 2\omega \int_0^t \sigma(\hat{t}) d\hat{t} - \left(\omega^2 + \frac{2M}{R^3} \right) \int_0^t (t - \hat{t}) \zeta(\hat{t}) d\hat{t} \\ &\quad - \int_0^t (t - \hat{t}) \frac{\kappa}{h} \hat{J}_1 dt \\ &= c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s) + A_1 \{ \zeta, \sigma \}, \\ A_1 \{ \zeta, \sigma \} &= \int_0^t (t - \hat{t}) \left[\frac{2\omega}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \zeta(\hat{t}) + (R + \hat{\zeta}) \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{M\kappa}{R^2} \left(\frac{3\hat{\zeta}^2}{R^2} - \frac{4\hat{\zeta}^3}{R^3} + \dots \right) + \frac{\kappa}{h} (\hat{J}_2 + \hat{J}_3 + \dots) + \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\hat{P}} \right] d\hat{t}, \end{aligned} \right.$$

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} L_2 \{\zeta, \sigma\} &= \sigma(t) + 2\omega \int_0^t \zeta(\hat{t}) d\hat{t} - \int_0^t (t - \hat{t}) \frac{\kappa}{h} \dot{K}_1 d\hat{t} \\ &= c_2(R, s) + t c_4(R, s) + 2\omega t c_1(R, s) + A_2 \{\zeta, \sigma\}, \\ A_2 \{\zeta, \sigma\} &= \int_0^t (t - \hat{t}) \left[-\frac{2}{R} \zeta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} - \frac{\dot{\zeta}^2}{R^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \hat{t}^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} - 2\omega \frac{\dot{\zeta}}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\dot{\zeta}}{R^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{t}} + \frac{\kappa}{h} \frac{\dot{\zeta}}{R} \dot{K}_1 + \frac{\kappa}{h} \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) (\dot{K}_2 + \dot{K}_3 + \dots) \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left(1 + \frac{\dot{\zeta}}{R} \right) \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{p} \right] d\hat{t} \end{aligned} \right.$$

schreiben, durch sukzessive Approximationen.

Wir setzen

$$(62) \quad \begin{aligned} L_1 \{\zeta, \sigma\} &= c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s), \\ L_2 \{\zeta, \sigma\} &= c_2(R, s) + t c_4(R, s) + 2\omega t c_1(R, s), \\ L_1 \{\zeta, \sigma\} &= c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s) + A_1 \{\zeta, \sigma\} = M_1 \{\zeta, \sigma\}, \\ L_2 \{\zeta, \sigma\} &= c_2(R, s) + t c_4(R, s) + 2\omega t c_1(R, s) + A_2 \{\zeta, \sigma\} = M_2 \{\zeta, \sigma\}, \end{aligned}$$

allgemein

$$(64) \quad \begin{aligned} L_1 \{\zeta^{n+1}, \sigma^{n+1}\} &= c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s) + A_1 \{\zeta^n, \sigma^n\} = M_1 \{\zeta^n, \sigma^n\}, \\ L_2 \{\zeta^{n+1}, \sigma^{n+1}\} &= c_2(R, s) + t c_4(R, s) + 2\omega t c_1(R, s) + A_2 \{\zeta^n, \sigma^n\} = M_2 \{\zeta^n, \sigma^n\}. \end{aligned}$$

Sind die durch (37) erklärte GröÙe Ω_1 sowie der Wert $\frac{R_m^0}{\mathfrak{R}}$ hinreichend klein, so erfüllen, wie wir jetzt zeigen wollen, die sukzessiven Approximationen gewiß die Ungleichheitsbeziehungen

$$(65) \quad \left| \zeta \right|, \left| \zeta' \right|, \left| \zeta'' \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \zeta''}{\partial s} \right|_\lambda; \left| \sigma \right|, \left| \sigma' \right|, \left| \sigma'' \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \sigma''}{\partial s} \right|_\lambda \leq \varepsilon_0.$$

Der Prozeß der sukzessiven Approximationen kann darum unbegrenzt fortgesetzt werden¹⁶⁾.

Es sei etwa

$$(66) \quad \Pi = \text{obere Grenze} \left\{ \left| \zeta \right|, \left| \zeta' \right|, \left| \zeta'' \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \zeta''}{\partial s} \right|_\lambda; \left| \sigma \right|, \left| \sigma' \right|, \left| \sigma'' \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \sigma''}{\partial s} \right|_\lambda \right\} \leq \varepsilon_0.$$

¹⁶⁾ Vgl. die Ausführungen auf S. 432, insbesondere die Beziehung (25).

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(67) \quad \left| \frac{2\omega}{R} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{t}} \hat{\zeta}^n(\hat{t}) + (R + \hat{\zeta}) \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{t}} \right)^2 - \frac{M\kappa}{R^2} \left(\frac{3\hat{\zeta}^2}{R^2} - \frac{4\hat{\zeta}^3}{R^3} + \dots \right) \right| < \alpha_8 \Pi^2,$$

$$\left| \kappa \mathfrak{M} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\hat{\rho}} \right| < \alpha_9 \left(\frac{R_m^0}{\mathfrak{R}} \right)^2, \quad \frac{\kappa}{h} |\hat{J}_2 + \hat{J}_3 + \dots| < \alpha_{10} \Pi^2,$$

sowie wegen (37)

$$(68) \quad |c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s)| \leq \{1 + (2\omega + 1)T\} \Omega_1 \leq \alpha_{11} \Omega_1,$$

somit

$$|M_1 \{ \hat{\zeta}^n, \hat{\sigma}^n \}| < \alpha_{11} \Omega_1 + \frac{1}{2} T^2 \left\{ \alpha_9 \left(\frac{R_m^0}{\mathfrak{R}} \right)^2 + (\alpha_8 + \alpha_{10}) \Pi^2 \right\},$$

kürzer

$$(69) \quad |M_1 \{ \hat{\zeta}^n, \hat{\sigma}^n \}| < \alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_{13} \Pi^2, \quad \chi = \frac{R_m^0}{\mathfrak{R}}.$$

Eine nähere Betrachtung lehrt, daß M_1 , als Funktion von t , R und s aufgefaßt, die in dem Vorstehenden immer wieder auftretenden partiellen Ableitungen hat. Man kann die Konstanten α_{11} , α_{12} , α_{13} so groß wählen, daß neben (69) auch noch die Ungleichheitsbeziehungen

$$(70) \quad |M_1'| = \left| \frac{\partial M_1}{\partial t} \right|, |M_1''| = \left| \frac{\partial^2 M_1}{\partial t^2} \right|, \left| \frac{\partial M_1}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial M_1}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial M_1}{\partial R} \right|, \dots,$$

$$\left| \frac{\partial M_1''}{\partial s} \right|_\lambda < \alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_{13} \Pi^2$$

und, wie man in ähnlicher Weise findet, die Ungleichheiten

$$(71) \quad |M_2|, |M_2'|, |M_2''|, \left| \frac{\partial M_2}{\partial R} \right|, \left| \frac{\partial M_2}{\partial s} \right|, \left| \frac{\partial M_2}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial M_2''}{\partial s} \right|_\lambda$$

$$< \alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_{13} \Pi^2$$

statthaben.

Betrachten wir jetzt die Integro-Differentialgleichungen (64). Die in (58) eingeführte Konstante B hat jetzt den Wert $\alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_{13} \Pi^2$. Wegen (59) ist augenscheinlich

$$(72) \quad \left| \hat{\zeta}^{n+1} \right|, \left| \hat{\zeta}'^{n+1} \right|, \left| \hat{\zeta}''^{n+1} \right|, \left| \frac{\partial \hat{\zeta}^{n+1}}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \hat{\zeta}''^{n+1}}{\partial s} \right|_\lambda;$$

$$\left| \hat{\sigma}^{n+1} \right|, \left| \hat{\sigma}'^{n+1} \right|, \left| \hat{\sigma}''^{n+1} \right|, \left| \frac{\partial \hat{\sigma}^{n+1}}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \hat{\sigma}''^{n+1}}{\partial s} \right|$$

$$\leq \alpha_7 (\alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_{13} \Pi^2).$$

Betrachten wir jetzt die quadratische Gleichung

$$(73) \quad \alpha_7 \alpha_{13} \tau^2 + \alpha_7 \alpha_{12} \chi^2 + \alpha_7 \alpha_{11} \Omega_1 = \tau.$$

Sie hat für hinreichend kleine χ und Ω_1 zwei positive Wurzeln. Die kleinere, die wir mit τ_* bezeichnen wollen, konvergiert mit χ und Ω_1 zugleich gegen 0. Es gilt demnach

$$(74) \quad \alpha_7 \alpha_{13} \tau_*^3 + \alpha_7 \alpha_{13} \chi^3 + \alpha_7 \alpha_{11} \Omega_1 = \tau_*.$$

Wir denken uns χ und Ω_1 so klein gewählt, daß $\tau_* < \varepsilon_0$ wird. Unter dieser Voraussetzung folgt aus (62), da diesmal B den Wert $\alpha_{11} \Omega_1$ hat,

$$(75) \quad \left| \frac{1}{\zeta} \right|, \left| \frac{1}{\zeta'} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \sigma''}{\partial s} \right|_{\lambda} \leq \alpha_7 \alpha_{11} \Omega_1 \\ < \alpha_7 \alpha_{13} \tau_*^3 + \alpha_7 \alpha_{13} \chi^3 + \alpha_7 \alpha_{11} \Omega_1 = \tau_*.$$

Aus den Gleichungen (63) ergibt sich, da B nunmehr den Wert

$$\alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^3 + \alpha_{13} \tau_*^3$$

hat,

$$(76) \quad \left| \frac{2}{\zeta} \right|, \left| \frac{2}{\zeta'} \right|, \dots, \left| \frac{\partial^2 \sigma''}{\partial s^2} \right|_{\lambda} \leq \alpha_7 (\alpha_{11} \Omega_1 + \alpha_{12} \chi^3 + \alpha_{13} \tau_*^3) = \tau_* < \varepsilon_0.$$

Eine Wiederholung dieser Überlegung lehrt, daß für $\frac{3}{\zeta}, \frac{4}{\zeta}, \dots; \frac{3}{\sigma}, \frac{4}{\sigma}, \dots$ sich die gleichen Schranken ergeben. Wie bekauptet, kann unser Verfahren der sukzessiven Näherungen unbegrenzt fortgesetzt werden.

Und nun der Konvergenzbeweis.

Aus (64) und den hierzu analogen Beziehungen

$$(77) \quad L_1 \left\{ \begin{smallmatrix} n+2 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} = c_1(R, s) + t c_3(R, s) - 2\omega t c_2(R, s) + A_1 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\}, \\ L_2 \left\{ \begin{smallmatrix} n+2 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} = c_2(R, s) + t c_4(R, s) - 2\omega t c_1(R, s) + A_2 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\}$$

folgt, wenn wir zur Abkürzung

$$\zeta^{n+1} - \zeta^n = \frac{n}{3}, \quad \sigma^{n+1} - \sigma^n = \frac{n}{1}$$

setzen.

$$(78) \quad L_1 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ 3, 1 \end{smallmatrix} \right\} = A_1 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} - A_1 \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} = \Phi_1, \\ L_2 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ 3, 1 \end{smallmatrix} \right\} = A_2 \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} - A_2 \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ \zeta, \sigma \end{smallmatrix} \right\} = \Phi_2.$$

Es seien nunmehr

$$(79) \quad \left| \frac{n}{3} \right|, \left| \frac{n'}{3} \right|, \left| \frac{n''}{3} \right|, \left| \frac{\partial \frac{n}{3}}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \frac{n}{3}}{\partial s} \right|_{\lambda}; \left| \frac{n}{1} \right|, \left| \frac{n'}{1} \right|, \left| \frac{n''}{1} \right|, \left| \frac{\partial \frac{n}{1}}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \frac{n}{1}}{\partial s} \right|_{\lambda} \leq \bar{O}.$$

Aus (60) und (61) folgt, wie sich ohne ernstliche Schwierigkeiten zeigen läßt, daß Φ_1 und Φ_2 Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$(80) \quad \left| \Phi_1 \right|, \left| \Phi_1' \right|, \left| \Phi_1'' \right|, \left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \Phi_1''}{\partial s} \right|_{\lambda}; \left| \Phi_2 \right|, \left| \Phi_2' \right|, \dots, \left| \frac{\partial \Phi_2''}{\partial s} \right|_{\lambda} \\ \leq (\alpha_{14} \chi^3 + \alpha_{15} \tau_*) \bar{O}$$

erfüllen. Aus (78) ergibt sich nunmehr den vorstehenden Betrachtungen zufolge, daß

$$(81) \quad \left| \frac{n+1}{3} \right|, \left| \frac{n+1}{3'} \right|, \left| \frac{n+1}{3''} \right|, \left| \frac{\partial \frac{n+1}{3}}{\partial R} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \frac{n+1}{3''}}{\partial s} \right|_{\lambda}; \left| \frac{n+1}{1} \right|, \left| \frac{n+1}{1'} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \frac{n+1}{1''}}{\partial s} \right|_{\lambda} \\ \leq \alpha_7 (\alpha_{14} \chi^2 + \alpha_{15} \tau_*) \bar{O}$$

gesetzt werden kann.

Man kann nun, da ja τ_* mit Ω_1 und χ zugleich gegen Null geht, diese Größen so klein wählen, etwa

$$(82) \quad \Omega_1 \leq \delta_*, \quad \chi \leq \delta_*,$$

daß

$$(83) \quad \alpha_7 (\alpha_{14} \chi^2 + \alpha_{15} \tau_*) \leq q < 1$$

gilt. Die unendlichen Reihen

$$(84) \quad \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta^{n+1} - \zeta^n), \quad \sigma + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma^{n+1} - \sigma^n)$$

konvergieren wie geometrische Reihen mit dem Quotienten q . Das gleiche gilt für die Reihen, die man durch gliedweise Differentiation im Sinne der Symbole

$$(85) \quad \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial R}, \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}, \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial R}, \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial s}$$

erhält. Aber auch die Reihen

$$(86) \quad \left[\frac{\partial \zeta''}{\partial R} \right]_{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\zeta^{n+1} - \zeta^n) \right]_{\lambda}, \quad \left[\frac{\partial \sigma''}{\partial R} \right]_{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial R} (\sigma^{n+1} - \sigma^n) \right]_{\lambda}$$

und die hierzu analogen Reihen konvergieren gleichmäßig. Hieraus folgt aber, daß die Funktionen

$$(87) \quad \zeta = \zeta + \sum (\zeta^{n+1} - \zeta^n), \quad \sigma = \sigma + \sum (\sigma^{n+1} - \sigma^n)$$

nebst ihren durch (85) charakterisierten partiellen Ableitungen stetig sind und die vier in (85) zuletzt hingeschriebenen Ableitungen einer Hölder'schen Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß ζ, σ die Lösungen unseres Problems darstellen.

Nur noch eine letzte Schlußbemerkung. Betrachten wir vorübergehend, wie zu Beginn dieser Arbeit, ein die Gebiete (1) erfüllendes vollkommen inkohärentes Medium konstanter Dichte μ_0 , diesmal aber im momentanen Ruhezustande. Ein dauernder Ruhezustand ist nicht möglich, -- unter der Einwirkung der gegenseitigen Attraktionskräfte und der Anziehung durch den Zentralkörper und den Satelliten wird sich

das Medium in Bewegung setzen. Diese Bewegung läßt sich über ein *hinreichend kurzes Zeitintervall* mathematisch streng verfolgen¹⁷⁾. Das gleiche gilt, wenn die Teilchen des Mediums beliebige Anfangsgeschwindigkeiten haben. Bei dem Problem, das uns in dieser Arbeit beschäftigte, handelt es sich um eine Bewegung in der Nachbarschaft einer stationären Bewegung. Die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit einzelner Teilchen des Mediums sind von derjenigen der fraglichen stationären Bewegung nur wenig verschieden. Dafür gelingt es diesmal, die neue Bewegung über ein *langes Zeitintervall* $\langle 0, T \rangle$ hindurch zu verfolgen. *Die stationäre Bewegung läßt sich für alle t in $\langle 0, T \rangle$ in eine Schar benachbarter Bewegungen einbetten.* Je größer T ist, um so kleiner sind die zulässigen Abweichungen des Anfangszustandes von dem dynamischen Gleichgewichtszustande, um so größer muß zugleich die Entfernung des Satelliten von dem Zentralkörper angenommen werden. Die Dichte μ_0 braucht hingegen nicht als klein vorausgesetzt zu werden.

¹⁷⁾ Vgl. meine Arbeit: Über einen Einwand gegen das Newtonsche Attraktionsgesetz. Ein Problem der Dynamik vollkommen inkohärenter, gravitierender Medien (Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 607—622. A. a. O. handelt es sich um die Bewegung eines den Gesamtraum erfüllenden, zur Zeit $t = 0$ homogenen, vollkommen inkohärenten gravitierenden Mediums.

(Eingegangen am 25. Juni 1932.)

Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Die Cartansche Theorie der halbeinfachen Lieschen Gruppen wurde von H. Weyl¹⁾ in ihrem allgemeinen Teil vereinfacht und neu dargestellt. Die Weylsche Darstellung bricht knapp vor der vollständigen Aufzählung der einfachen Gruppen ab. Sie enthält aber alle Hilfsmittel, die man für diese Aufzählung braucht.

Cartan²⁾ benutzt für seine Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen eine ziemlich unübersichtliche Determinantenmethode. Die Weylsche Auffassung legt eine geometrische Methode nahe, welche die metrischen Eigenschaften der „Wurzelvektoren“ zu einem schrittweisen Aufbau des Systems der Wurzelvektoren benutzt. Diese geometrische Methode, die von J. A. Schouten in einer hektographierten Vorlesung³⁾ schon skizziert wurde, soll hier vollständig durchgeführt werden.

Zunächst soll eine kleine Vereinfachung der Weylschen Darstellung angegeben werden, wobei zugleich einige für das Folgende wesentlichen Zusammenhänge klarer zum Vorschein kommen.

§ 1.

Nach Weyl II, Satz 3 (§ 3) hat eine halbeinfache (und insbesondere eine einfache) Liesche Gruppe mit komplexen Parametern die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$H_1, \dots, H_n, E_\alpha, E_\beta, \dots$$

Dabei sind die Transformationen $H = \lambda^1 H_1 + \dots + \lambda^n H_n$ alle untereinander vertauschbar:

$$(1) \quad [H_i, H_k] = 0.$$

¹⁾ H. Weyl, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 271—309 und **24** (1925), S. 328—395. Die drei Teile der Weylschen Arbeit werden hier mit „Weyl I, II, III“ zitiert.

²⁾ E. Cartan, Thèse (Paris 1894).

³⁾ Vorlesung über die Theorie der halbeinfachen kontinuierlichen Gruppen, Leiden 1926—27.

Die „Wurzeln“ $\alpha, \beta, \dots$ sind gewisse Linearformen $\alpha = \sum a_i \lambda^i$ in $\lambda^1, \dots, \lambda^n$. Es ist

$$(2) \quad [H E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad [H_i E_\alpha] = a_i E_\alpha.$$

Zu jeder Wurzel α kommt auch $-\alpha$ als Wurzel vor und es ist

$$(3) \quad [E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha = -\sum a^i H_i.$$

Schließlich ist für $\alpha + \beta \neq 0$

$$(4) \quad [E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta},$$

wobei $N_{\alpha+\beta} = 0$ zu setzen ist, wenn $\alpha + \beta$ keine Wurzel ist.

Es gibt eine bei der adjungierten Gruppe invariante nicht-singuläre quadratische Form in den Koeffizienten λ^i, σ^α einer infinitesimalen Transformation $T = \sum \lambda^i H_i + \sum \tau^\alpha E_\alpha$:

$$\varphi(T, T) = Q(\lambda) + \sum_\alpha N_\alpha \tau^\alpha \tau^{-\alpha}$$

mit

$$Q(\lambda) = \sum \alpha^2 = \sum g_{ik} \lambda^i \lambda^k.$$

Wir schließen nun wie bei Weyl II, § 4, S. 370, oben: $\varphi(S, T) = 0$ für $S = [E_\alpha T]$. Das ergibt:

$$-\tau_\alpha \sum \sum g_{ik} \lambda^i a^k - N_\alpha \alpha \tau_\alpha + \sum_{\alpha+\beta+\gamma=0} N_\gamma N_{\alpha\beta} \tau_\beta \tau_\gamma = 0,$$

also [wie bei Weyl, Gleichung (25)] durch Nullsetzen der in den τ linearen Glieder:

$$N_\alpha \alpha = -\sum \sum g_{ik} a^i \lambda^k.$$

Mit der Normierung $N_\alpha = -1$ folgt wegen $\alpha = \sum a_i \lambda^i$ sofort:

$$(5) \quad a_k = \sum g_{ik} a^i,$$

d. h.: a_k und a^i sind die ko- und kontravarianten Komponenten desselben Vektors α in bezug auf den metrischen Fundamentaltensor g_{ik} .

Daraus folgt weiter

$$(6) \quad \alpha_\beta = -\sum a_i b^i = -(\alpha b),$$

wo (αb) das skalare Produkt der Vektoren α und b bedeutet⁴⁾. Auch die Weylsche Gleichung (28) ist eine unmittelbare Folge.

Die Einführung der Hermiteschen Form $\sum \alpha \bar{\alpha}$ (Weyl, § 4) ist nunmehr unnötig: die Weylsche Gleichung (22) stellt auch in Bezug auf die quadratische Metrik $g_{ik} \lambda^i \lambda^k$ eine Spiegelung dar. Übrigens brauchen wir das im folgenden nicht einmal.

⁴⁾ Zu beachten: Bei Weyl bezeichnet $(\alpha \beta)$ das entgegengesetzte skalare Produkt $-(\alpha b) = \alpha_\beta$. Vgl. Weyl, Gleichung (27).

Drückt man jede Wurzel ϱ durch n linear-unabhängige Wurzeln $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ aus:

$$\varrho = \sum r_k \alpha^{(k)},$$

so sind die Koeffizienten r_k aus den Gleichungen⁵⁾

$$\frac{(\varrho \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)} \alpha^{(i)})} = \sum r_k \frac{(\alpha^{(k)} \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)} \alpha^{(i)})}$$

rational zu bestimmen, weil die Koeffizienten dieser Gleichungen rationale Zahlen sind. Es gibt also im n -dimensionalen Vektorraum der Linearformen in $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ ein Koordinatensystem, in welchem alle Wurzeln reell sind. Im gleichen Koordinatensystem ist auch $Q = \sum \varrho^2$ eine reelle, positiv-definite quadratische Form; mithin definiert g_{ik} eine gewöhnliche euklidische Metrik.

Die Struktur der Gruppe hängt nach (1) bis (4) nur von den Wurzelvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ und von den Zahlen $N_{\alpha\beta}$ ab. Bei der Weylschen Normierung $N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ sind die Quadrate $N_{\alpha\beta}^2$ eindeutig durch das System der Wurzelvektoren bestimmt. Daß aber die $N_{\alpha\beta}$ selbst bis auf unwesentliche Normierungsfaktoren eindeutig bestimmt sind, folgt aus denselben Überlegungen, die zu der Weylschen Normierung führen. Man ziehe nämlich die Wurzelpaare $\varrho, -\varrho$ in der bei Weyl II, S. 372–373 erwähnten Rangordnung heran. Wenn dann alle $N_{\alpha\beta\gamma}$ für alle α, β, γ zwischen $-\varrho$ und $+\varrho$ schon feststehen, und nun eine Wurzel herankommt, die etwa in zwei Weisen als Summe $\varrho = \alpha + \beta = \gamma + \delta$ dargestellt werden kann, so ist das Produkt $N_{\alpha, \beta, -\varrho} N_{-\gamma, -\delta, \varrho}$ nach Weyl (31) ausdrückbar durch bekannte Produkte. Da auch $N_{\gamma, \delta, -\varrho} N_{-\alpha, -\beta, \varrho}$ bekannt ist [nämlich durch (34) und (35)], so sind alle Verhältnisse $N_{\alpha, \beta, -\varrho} : N_{\gamma, \delta, -\varrho}$ bekannt. Legt man also durch eine Normierung von E_ϱ (und $E_{-\varrho}$) eine der Größen $N_{\alpha, \beta, -\varrho}$ fest, so können alle anderen berechnet werden.

§ 2.

Das ganze Problem ist also zurückgeführt auf die Bestimmung eines endlichen Systems Σ von reellen Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ in einem Vektorraum E_n mit euklidischer Metrik, welches folgenden Bedingungen genügt:

1. Σ enthält mit $\mathbf{a}$ auch $-\mathbf{a}$, aber keine weiteren Vielfachen $k\mathbf{a}$.
2. Sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ Vektoren von Σ , so ist $2 \frac{(\mathbf{a} \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \mathbf{a})}$ stets eine ganze Zahl.
3. Mit $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ enthält Σ auch die Vektoren $\mathbf{b} - k\mathbf{a}$, wo die ganze Zahl k von 0 bis $2 \frac{(\mathbf{a} \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \mathbf{a})}$ läuft⁶⁾.

⁵⁾ In diesen Gleichungen kann man unter $(\varrho \alpha)$ entweder das skalare Produkt $(\mathbf{r} \mathbf{a})$, oder (nach Weyl) den entgegengesetzten Wert $\varrho_\alpha = -(\mathbf{r} \mathbf{a})$ verstehen; für die Werte der Quotienten macht das nichts aus.

⁶⁾ Vgl. Weyl II, S. 360.

Weiter können wir annehmen:

4. Σ zerfällt nicht in zwei gegenseitig senkrechte Teilsysteme⁷⁾.

Aus 2. folgt: $4 \frac{(a b)^2}{(a a)(b b)} = \text{ganz}$, also, wenn φ der Winkel zwischen den Vektoren a und b ist,

$$\cos^2 \varphi = \frac{(a b)^2}{(a a)(b b)} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \text{ oder } 1.$$

Die möglichen Winkel zwischen den Vektoren sind also 90° , 60° , 45° , 30° , 0° und deren Supplemente. Im Fall 90° ist das Längenverhältnis beliebig. Im Fall 60° ist

$$\frac{(a b)}{(a a)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{(a b)}{(b b)} = \frac{1}{2}, \quad \text{also } (a a) = (b b).$$

Im Fall 45° ist

$$\frac{(a b)}{(a a)} = \frac{1}{2} \text{ oder } 1, \quad \frac{(a b)}{(b b)} = 1 \text{ bzw. } \frac{1}{2}, \quad \text{also } \frac{(b b)}{(a a)} = \frac{1}{2} \text{ oder } 2.$$

Im Fall 30° ist

$$\frac{(a b)}{(a a)} = \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{2}, \quad \frac{(a b)}{(b b)} = \frac{3}{2} \text{ bzw. } \frac{1}{2}, \quad \text{also } \frac{(b b)}{(a a)} = \frac{1}{3} \text{ oder } 3.$$

Diese drei Möglichkeiten für das Längenverhältnis und den Winkel zweier Vektoren von Σ bilden (zusammen mit der obigen Bedingung 3.) die Grundlage der folgenden Untersuchung. Auf Grund dieser Fallunterscheidung kann man z. B. aus $(a a) = 1$, $(b b) = 2$ stets schließen, daß $(a b)$ nur 0 oder ± 1 sein kann; ebenso folgt aus $(a a) = (b b) = 1$ sofort $(a b) = 0$ oder $\pm \frac{1}{2}$, falls nicht $a = \pm b$ ist.

Das System $\Sigma = \Sigma_n$ möge n linear-unabhängige Vektoren enthalten. Suchen wir (für $n > 1$) zunächst zwei nicht-senkrechte Vektoren a, b heraus, so bilden die von ihnen linear-abhängigen Vektoren in Σ_n ein Teilsystem Σ_2 , welches alle Bedingungen 1. bis 4. erfüllt. Suchen wir dann einen zu Σ_2 nicht-senkrechten Vektor, so bestimmt dieser mit Σ_2 in derselben Weise ein System Σ_3 , welches wieder alle Bedingungen erfüllt, usw. So kann man also die Systeme Σ_n schrittweise aufbauen: *Jedes Σ_{n+1} geht aus einem Σ_n hervor.*

Wir führen dabei rechtwinklige Koordinatenvektoren ein, wählen für das Ausgangspaar a, b ein solches mit kleinstmöglichem Winkel und für a den kleineren der Vektoren a und b . Die Länge des Vektors a wählen wir zunächst beliebig, da die richtige Normierung des ganzen Systems Σ auf Grund von $g_{ik} = \sum_a a_i a_k$ leicht hinterher geschehen kann.

Das einzige System Σ_1 besteht aus dem Einheitsvektor a und $-a$.

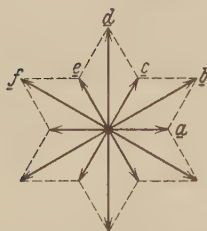
⁷⁾ Ist die Bedingung 4. nicht erfüllt, so ist die Gruppe nicht einfach, sondern nur halbeinfach und direktes Produkt von einfachen Gruppen.

§ 3. G_2, B_2, A_2 .

Bestimmung aller Σ_2 . Bei $a = (1, 0)$ gibt es für b die folgenden Möglichkeiten:

1. Winkel 30° . $(ab) = \frac{3}{2}$, $(bb) = 3$, also $b = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Zum System Σ_2 gehören nach 3. auch:



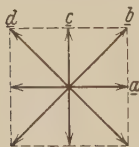
$$c = b - a = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$e = b - 2a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$f = b - 3a = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$d = b + f = (0, \sqrt{3}),$$

sowie ihre Entgegengesetzten $-a, -b, -c$ usw. (welche im folgenden nicht mehr extra erwähnt werden sollen). Unter diesen Vektoren sind alle möglichen Richtungen schon vertreten, also ist für weitere Vektoren in Σ_2 kein Platz mehr. Das fertige System möge G_2 heißen.

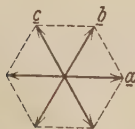
2. Winkel 45° .

$$(ab) = 1, (bb) = 2, \text{ also } b = (1, 1).$$

$$c = b - a = (0, 1),$$

$$d = b - 2a = (-1, 1).$$

Jeder weitere Vektor würde mit einem von diesen einen kleineren Winkel einschließen, also ist das System $\{a, b, c, d\}$ vollständig. Es möge B_2 heißen.

3. Winkel 60° .

$$(ab) = \frac{1}{2}, (bb) = 1, \text{ also } b = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$c = b - a = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Jeder weitere Vektor würde mit a, b oder c einen kleineren Winkel als 60° einschließen. Das System $\{\pm a, \pm b, \pm c\}$ heiße A_2 .

Mit G_2, B_2, A_2 sind alle Systeme Σ_2 erschöpft.

§ 4.

Erweiterung von G_2 . Versuchen wir, G_2 zu einem System Σ_3 zu erweitern durch Hinzufügung eines nicht zur Ebene Σ_2 senkrechten Vektors $r = (r_1, r_2, r_3)$, (wo r_3 also eine neu hinzukommende Koordinate ist), so kann (rr) nur 1 oder 3 sein. Weiter kann man das Koordinaten-

kreuz in G_2 stets so um 60° oder 120° drehen, daß die Projektion von r auf diese Ebene keine Achsenrichtung ist, also r_1 und r_2 beide $\neq 0$ sind. Man hat dann zwei Fälle:

$$1. (rr) = 3, (ra) = r_1 = \pm \frac{3}{2},$$

$$\frac{(rd)}{(da)} = \frac{r_2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{2}, \text{ also } r_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$(rr) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} + r_3^2 = 3, \text{ also } r_3 = 0.$$

$$2. (rr) = 1, (ra) = r_1 = \pm \frac{1}{2},$$

$$\frac{(rd)}{(da)} = \frac{r_2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{2}, \text{ also } r_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$(rr) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + r_3^2 = 1, \text{ also } r_3 = 0.$$

In beiden Fällen würde r also in der Ebene von G_2 liegen, also ist eine *Erweiterung von G_2 unmöglich*. Mithin kommen für $n > 2$ keine Winkel von 30° mehr vor.

§ 5. B_n, C_n .

Als Erweiterung von B_2 bietet sich sofort das System B_n , bestehend aus den Grundvektoren $\pm e_j$ [$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, usw.] und $\pm e_j \pm e_k$.

Man kann B_2 auch auf andere Koordinaten transformieren, indem man $\frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}d$ als Grundvektoren wählt. Als n -dimensionale Erweiterung bietet sich dann das System C_n , bestehend aus den Vektoren $\pm 2e_j$ und $\pm e_j \pm e_k$.

Wir stellen nun zunächst alle Erweiterungen von B_n und C_n zu Systemen Σ_{n+1} auf.

§ 6. F_4 .

Erweiterung von B_n . Das Quadrat (rr) eines neuen nicht-senkrechten Vektors r kann nur 2 oder 1 sein, weil in B_n Vektoren der Längenquadrate 1 und 2 vorkommen.

Fall 1. $(rr) = 1$. r sei etwa zu $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ nicht senkrecht. Dann ist $(re_1) = r_1 = \pm 1$, etwa $r_1 = +1$. Alle übrigen $(re_j) = r_j$ müssen 0 sein, da sonst r im Raum E_n liegen würde ($r_{n+1} = 0$ wie in § 4). Also ist $r = (1, 0, \dots, 0, 1)$. Zum System Σ_{n+1} gehören weiter $r - e_1 = (0, \dots, 0, 1)$ und $r - 2e_1 = (-1, 0, \dots, 0, 1)$, sowie $r - (e_1 \pm e_k) = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 1)$ das sind also alle Vektoren von B_{n+1} . Weitere Vektoren s mit $(ss) = 2$ sind nicht möglich; wenn wir also noch weiter erweitern wollen, kommen wir auf

Fall 2. $(r, r) = 1$. r sei zu e_1 nicht senkrecht. Dann ist $(r, e_1) = r_1 = \pm \frac{1}{2}$, etwa $= \frac{1}{2}$. Weiter ist

$$r_1 \pm r_k = r(e_1 \pm e_k) = \frac{2(r(e_1 \pm e_k))}{(e_1 \pm e_k)^2} = 0 \text{ oder } \pm 1, \text{ mithin } r_k = \pm \frac{1}{2} \\ (k = 2, \dots, n).$$

Wegen

$$1 = (r, r) = r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + r_{n+1}^2 > \frac{n}{4}$$

kann n höchstens 3 sein.

Für $n = 2$ zieht der Vektor $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ die weiteren

$$\begin{aligned} r - e_1 &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \\ r - e_2 &= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \\ s = (r - e_1) - e_2 &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \\ t = (e_1 + e_2) - 2s &= (0, 0, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

nach sich. Führt man $e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$ und t als neue Grundvektoren ein, so zeigt sich, daß das ebenkonstruierte System gerade C_3 ist: Für weitere Vektoren ist kein Platz, denn alle Vektoren r mit $(r, r) = 1$ haben wir schon, und die mit $(r, r) = 2$ (Fall 1) schleppen den Vektor $(0, 0, 1)$ nach sich, der sich mit $(0, 0, -\sqrt{2})$ nicht verträgt.

Für $n = 3$ haben wir etwa

$$\begin{aligned} r &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ r - e_1 &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \text{ usw.}, \end{aligned}$$

das ergibt alle Vektoren $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Weiter gehören zu $\Sigma_{n+1} = \Sigma_4$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= (0, 0, 0, 1), \\ (1, 1, 0, 0) - 2 \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= (0, 0, -1, -1), \end{aligned}$$

ebenso erhält man die übrigen Vektoren von B_4 . So erhalten wir ein B_4 umfassendes System F_4 . Weitere Vektoren in Σ_4 sind nicht möglich.

§ 7.

Erweiterungen von C_n . Wegen $C_2 = B_2$ können wir $n > 2$ voraussetzen. Das Quadrat (r, r) eines neuen Vektors r kann 4 oder 2 sein, weil in C_n Vektoren der Längenquadrate 2 und 4 vorkommen.

Fall 1. $(r, r) = 4$. $r_j = 2 \frac{(r, 2e_j)}{(2e_j, 2e_j)} = 0$ oder ± 1 , etwa $r_1 = 1$.

$$r_1 + r_2 = 2 \frac{(r, e_1 + e_2)}{(e_1 + e_2)^2} = \pm 2 \text{ oder } 0, \text{ also } r_2 = \pm 1,$$

ebenso alle weiteren r_i . Wegen $(r r) = 4$ kommt nur $n = 3$ in Betracht. Dem System gehören an

$$r = (1, 1, 1, 1),$$

$$r - 2e_1 = (-1, 1, 1, 1),$$

$$r - (e_1 + e_2) = (0, 0, 1, 1), \text{ usw.},$$

kurz: alle Vektoren $\pm 2e_i$, $\pm e_i \pm e_k$ und $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4$. Führt man die neuen Grundvektoren

$$(1, 1, 0, 0), \quad (-1, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 1), \quad (0, 0, 1, -1)$$

ein, so erweist sich das System als identisch mit F_4 . Wir wissen schon, daß eine weitere Erweiterung von F_4 in 4 Dimensionen unmöglich ist. Also bleibt nur:

Fall 2. Alle $(r r) = 2$. Wie vorhin ist $r_j = 0$ oder ± 1 . Ist $r_1 = 1$, so müssen r_2 bis r_n Null sein, damit für r_{n+1} noch etwas übrigbleibt.

$$r = (1, 0, \dots, 0, 1),$$

$$r - (e_1 \pm e_k) = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 1),$$

$$r - 2e_1 = (-1, 0, \dots, 0, 1),$$

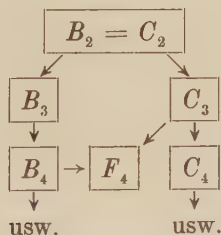
$$(2e_1) - 2 \cdot r = (0, \dots, 0, -2)$$

Also erhalten wir genau C_{n+1} .

§ 8.

Erweiterungen von F_4 gibt es nicht, denn F_4 umfaßt B_4 , und B_4 hat keine Erweiterung außer B_5 , welche mit F_4 unverträglich ist.

Aus dem vorangehenden folgt, daß alle Systeme Σ_n , welche Winkel von 45° enthalten, in folgendem Schema enthalten sind:



§ 9.

Wir können uns also von jetzt an auf solche Systeme Σ_n beschränken, in denen nur Winkel von 60° und Vektoren gleicher Länge vorkommen, etwa alle $(a a) = 2$ und alle $(a b) = 0$ oder ± 1 . Für diese Systeme gilt folgende allgemeine Bemerkung: Wenn man zu einem System, welches

die in § 2 gestellten Bedingungen erfüllt, einen Vektor r hinzunimmt, der die Bedingungen

$$(r r) = 2, \quad (r a) = 0 \text{ oder } \pm 1 \text{ für alle } a$$

erfüllt, so führt die wiederholte Bildung von neuen Vektoren

$$s = r - \frac{(r a)}{(a a)} a, \text{ usw.}$$

nie zu Widersprüchen mit diesen Bedingungen. Ist nämlich etwa $(r a) = 1$, also $s = r - a$, so folgt $(s s) = 1$ und $(s b) = (r b) - (a b) =$ ganzzahlig, also wieder 0 oder ± 1 für jedes b des Systems.

§ 10. A_n .

Eine Erweiterung von A_2 der gesuchten Art ist das System A_n , das aus den $n(n+1)$ Vektoren $d_{jk} = e_j - e_k$ ($j, k = 1, \dots, n+1$) des E_{n+1} besteht, welche alle dem Unterraum E_n mit der Gleichung $\sum_1^{n+1} x_v = 0$ angehören.

Wir bestimmen nun alle Erweiterungen Σ_{n+1} von A_n . Ist r ein neu hinzukommender Vektor, so setzt sich r zusammen aus einer Komponente r^0 im Raume E_n und einer Komponente r^* senkrecht dazu. Diese senkrechte Richtung kann sonst beliebig gewählt werden: Wir werden das eine Mal r^* im Raume E_{n+1} , das andere Mal in einer neu hinzuzunehmenden Koordinatenrichtung, also senkrecht zu E_{n+1} in E_{n+2} , ein drittes Mal im Teilraum $\sum_1^{n+2} x_v = 0$ des E_{n+2} wählen.

Wählen wir zuerst r^* senkrecht zu E_{n+1} , so daß die ersten $n+1$ Bestimmungszahlen $r_1, \dots, r_{n+1}$ von r die Komponente r^0 bestimmen und die $(n+2)$ -te die Komponente r^* darstellt, so hat r den Bedingungen

$$(r, d_{jk}) = r_j - r_k = \pm 1 \text{ oder } 0 \quad \text{und} \quad \sum_1^{n+1} r_v = 0$$

zu genügen. Sind etwa $r_1, \dots, r_k$ positiv und $r_{k+1}, \dots, r_{n+1}$ nicht positiv, so folgt $r_1 - r_{k+1} = 1$, also $0 < r_1 \leq 1$, weiter $r_1 = r_2 = \dots = r_k$ und $r_{k+1} = \dots = r_{n+1} = r_1 - 1$;

$$k \cdot r_1 + (n+1-k)(r_1 - 1) = 0,$$

$$r_1 = \frac{n+1-k}{n+1}, \quad r_{k+1} = \frac{-k}{n+1}.$$

Die Zahl k ist so zu bestimmen, daß

$$\sum_1^{n+1} r_v^2 = k \left(\frac{n+1-k}{n+1} \right)^2 + (n+1-k) \left(\frac{k}{n+1} \right)^2 < 2$$

oder

$$k(n+1-k) < 2(n+1)$$

wird. Die linke Seite dieser Ungleichung ist eine quadratische Form in k , die für $0 < k \leq \frac{n+1}{2}$ dauernd anwächst. Es genügt, die Werte $0 < k \leq \frac{n+1}{2}$ zu betrachten, weil bei Ersetzung von r durch $-r$ die Zahl k durch $n+1-k$ ersetzt wird. Ist also unsere Ungleichung für einen Wert k verletzt, so ist sie für alle größeren Werte von k auch verletzt. Man kann für sie auch schreiben

$$(n+1)(k-2) < k^2.$$

Für $k = 1$ oder 2 ist die Ungleichung stets erfüllt, für $k = 3$ nur bei $n+1 < 9$, $n < 8$. Für $n \geq 8$ kommen also nur die Werte $k = 1, 2$ in Frage; für $n = 7$ scheidet auch $k = 4$ wegen $8 \cdot 2 = 4^2$ aus; also bleibt für $n = 5, 6, 7$ nur $k = 1, 2, 3$ übrig, während für $n = 3$ oder 4 wieder nur $k = 1, 2$ in Frage kommen. Für $n = 2$ hat man schließlich nur $k = 1$. Also drei Fälle:

$$\text{Fall 1. } k = 1, \quad n \geq 2;$$

$$\text{Fall 2. } k = 2, \quad n \geq 3;$$

$$\text{Fall 3. } k = 3, \quad n = 5, 6, 7.$$

§ 11.

Bemerkung. Wenn man nicht nach den Erweiterungen Σ_{n+1} von A_n , sondern nach den Erweiterungen gleicher Dimension Σ_n fragt, so ist in den Ungleichungen von § 10 $<$ durch $=$ zu ersetzen.

Man findet zwei Lösungen:

$$n = 7, \quad k = 4: \quad r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right);$$

$$n = 8, \quad k = 3: \quad r = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Man überzeugt sich leicht, daß man in beiden Fällen zu einer eindeutig bestimmten Erweiterung Σ_n von A_n kommt. Auf die erweiterten Systeme (E_7 bzw. E_8) kommen wir noch zurück.

§ 12.

Wir untersuchen nun die drei Fälle von § 10 getrennt.

Im Fall $k = 1$ hat man

$$r = \left(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \dots, -\frac{1}{n+1}, \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right),$$

also

$$r^0 = \left(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \dots, -\frac{1}{n+1}\right); \quad r^* = \left(0, 0, \dots, 0, \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right).$$

Man vermeidet die Irrationalität, indem man r^* im Raum $\sum_1^{n+2} x_v = 0$ wählt, also

$$r^* = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}, -1 \right)$$

setzt. Dann wird

$$r = (1, 0, \dots, 0, -1) = d_{1, n+2},$$

$$r - d_{1k} = (0, \dots, 1, 0, \dots, -1) = d_{k, n+2},$$

also enthält Σ_{n+1} alle Vektoren d_{jk} ($j, k = 1, \dots, n+2$); diese bilden das System A_{n+1} .

§ 13. D_n .

Im Fall $k = 2$ hat man

$$r = \left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}, \frac{-2}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right),$$

d. h.

$$r^0 = \left(\frac{n-1}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}, \frac{-2}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, 0 \right) \quad \text{und} \quad r^* = \left(0, \dots, 0, \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right).$$

Man vermeidet die Irrationalität, indem man r^* im Raum E_{n+1} wählt, also mit Weglassung der $(n+2)$ -ten Komponente setzt:

$$r^* = \left(\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{2}{n+1} \right),$$

$$r = (1, 1, 0, \dots, 0),$$

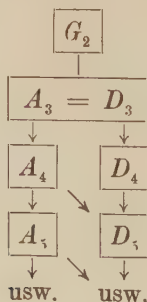
$$r - d_{1j} = (0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = e_2 + e_j,$$

$$r - d_{2j} = e_1 + e_j,$$

$$(r - d_{1j}) - d_{2k} = e_j + e_k.$$

Mithin enthält Σ_{n+1} alle Vektoren $\pm e_j \pm e_k$ ($j, k = 1, \dots, n+1$) des E_{n+1} . Diese bilden ein neues System D_{n+1} .

Für $n = 2$ sind die Fälle $k = 1$ und 2 gleichbedeutend. Mithin ist $D_3 = A_3$. Von da an verzweigt es sich nach dem Schema:



§ 14. E_6, E_7, E_8 .

Fall 3.

$$r = \left(\frac{n-2}{n+1}, \frac{n-2}{n+1}, \frac{n-2}{n+1}, \frac{-3}{n+1}, \dots, \frac{-3}{n+1}, \sqrt{\frac{8-n}{n+1}} \right).$$

Bildet man $r - d_{1k}, r - d_{2k}, r - d_{3k}$ ($k > 3$), weiter $(r - d_{1j}) - d_{2k}$, usw., so sieht man, daß in Σ auch alle zu r analogen Vektoren mit permutierten Koordinaten $r_1, \dots, r_{n+1}$ vorkommen. Wir unterscheiden nun die Unterfälle:

$$n = 5. \quad r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

Unter den Permutationen findet sich auch

$$s = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right);$$

weiter ist im System

$$r + s = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{2}).$$

Die so erhaltenen Vektoren bilden ein System E_6 , welches alle Bedingungen des § 1 erfüllt.

$$n = 6. \quad r = \left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}, \sqrt{\frac{9}{7}} \right) = r^0 + r^*.$$

Man vermeidet wie im § 12 die Irrationalität, indem man r^* im Raum

$$\sum_1^8 x_\nu = 0 \text{ wählt:}$$

$$r^* = \left(-\frac{1}{14}, -\frac{1}{14}, \dots, -\frac{1}{14}, \frac{1}{2} \right),$$

$$r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Das System enthält auch die Permutation

$$s = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

sowie

$$r + s = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1)$$

und alle Permutationen davon. Das System umfaßt also A_7 und ist dessen einzig mögliche gleichdimensionale Erweiterung E_7 .

Bemerkung. Die Vektoren $e_j - e_k$ ($j, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) des Systems bilden ein Teilsystem A_5 ; dieses bestimmt zusammen mit dem Vektor $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein System Σ_6 , welches nur E_6 sein kann, da die Komponente von r im Raum von A_5 genau $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ heißt. Also ist E_7 eine Fortsetzung von E_6 .

$$n = 7. \quad r = \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \sqrt{\frac{1}{8}} \right).$$

Man vermeidet wie in § 13 die Irrationalität, indem man r^* im Raum E_{n+1} wählt:

$$r^* = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{8} \right),$$

$$r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Das System enthält auch die Permutation

$$s = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

mithin auch

$$r + s = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1).$$

Addiert man dazu noch die Vektoren $-d_{j7}$ und $-d_{k8}$, so erhält man alle Vektoren $-e_j - e_k$, mithin das ganze System D_8^+ . Kombination von r mit den Vektoren $\pm e_j \pm e_k$ ergibt schließlich alle Vektoren $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2})$, welche je eine ungerade Anzahl von $-$ und $+$ -Zeichen enthalten. Alle diese Vektoren zusammen bilden ein System E_8 , welches alle Bedingungen von § 1 erfüllt.

Bemerkung. Der Vektor $t = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2})$ bestimmt zusammen mit A_7 ein System, welches mit A_8 identisch sein muß, denn die Komponente t^0 im Raum von G_8 ist $(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{8})$. Also ist E_8 die gleichdimensionale Erweiterung von A_8 .

§ 15.

Wir haben nun noch die Frage zu untersuchen, ob die in § 12–14 untersuchten Fälle 1, 2, 3 vielleicht miteinander kombiniert vorkommen können, indem nicht ein Vektor r adjungiert wird, sondern zwei: r, r' , welche verschiedenen Fällen angehören, oder auch zwei solche, welche demselben Fall angehören, aber durch das Vorzeichen von r^* unterschieden sind.

Wenn Fall 1 mit einem anderen Fall oder mit sich selbst kombiniert werden kann, so heißt das, daß A_{n+1} eine gleichdimensionale Erweiterung Σ_{n+1} besitzt. Wie wir wissen, ist das nur für A_7 und A_8 der Fall; die einzigen Erweiterungen E_7 und E_8 haben wir oben schon behandelt.

Wenn Fall 2 mit sich selbst oder mit einem anderen Fall kombiniert wird, so haben wir eine gleichdimensionale Erweiterung von D_{n+1}^+ vor uns. Wir werden nachher (§ 19) sehen, daß es eine solche nur für $n+1 = 8$ gibt und daß E_8 die einzige ist.

Es bleibt nur die Möglichkeit, Fall 3 mit sich selbst zu kombinieren unter Umkehrung des Vorzeichens von r_s . Für $n = 5$ führt diese Umkehrung nicht aus dem System E_6 hinaus, während die Fälle $n = 6$ und $n = 7$ nicht mehr diskutiert werden brauchen, weil E_7 und E_8 schon A_7 und A_8 umfassen.

Damit sind alle Erweiterungen von A_n bestimmt.

§ 16.

Erweiterungen von D_n .

D_n besteht also aus den Vektoren $e_j \pm e_k$. Ein neuer Vektor $r = (r_1, \dots, r_{n+1})$ hat den folgenden Bedingungen zu genügen:

$$(r, r) = 2, \quad r_{n+1} \neq 0, \quad r_1, \dots, r_n \text{ nicht alle } = 0, \\ \pm r_j \pm r_k = \pm 1 \text{ oder } 0 \text{ für alle } j \text{ und } k.$$

Also sind alle r_j ($j = 1, \dots, n$) halb- oder ganzzahlig und ihre Differenzen 0 oder 1. Das gibt zwei Fälle:

Fall 1. Alle r_j ganzzahlig. Ein $r_j = 1$, übrige (bis r_n) = 0. Etwa: $r = (1, 0, \dots, 0, 1)$.

$$r - (e_1 \pm e_k) = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 1),$$

$$r - (e_1 - e_k) - (e_1 + e_k) = (-1, 0, \dots, 0, 1).$$

Man erhält das System D_{n+1} .

§ 17.

Fall 2. Alle $r_j = \pm \frac{1}{2}$ und $n = 4, 5, 6$ oder 7. (Bei Erweiterungen ohne Dimensionserhöhung noch $n = 8$.)

$$r = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{8-n}}{2}\right).$$

$$r - (e_1 + e_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{8-n}}{2}\right), \text{ usw.}$$

In dieser Weise erhält man aus r alle Vektoren derselben Art mit einer geraden Anzahl von $-$ -Zeichen.

Unterfälle:

$n = 4$. $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Führen wir neue Grundvektoren e_i^1 ein durch

$$2e_1^1 = (1, 1, 1, 1, 0)$$

$$2e_2^1 = (1, 1, -1, -1, 0)$$

$$2e_3^1 = (1, -1, -1, 1, 0)$$

$$2e_4^1 = (-1, 1, 1, -1, 0)$$

$$e_5^1 = (0, 0, 0, 0, 1),$$

so ergibt sich das System D_5 .

$$n = 5. \quad r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Die Vektoren $(e_j - e_k)$ ($j, k = 1, 2, 3, 4, 5$) bilden ein Teilsystem A_4 , welches zusammen mit

$$s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ein System A_5 erzeugt. Denn die Komponenten von s parallel und senkrecht zum Raum von G_5 sind:

$$s^0 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right),$$

$$s^* = \left(-\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Mithin ist unsere Σ_6 eine Erweiterung von A_5 , somit entweder A_6 oder E_6 . Da ein zum Raum von A_5 senkrechter Vektor, nämlich r , vorhanden ist, kann es sich nur um E_6 handeln.

$$n = 6. \quad r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Das Teilsystem D_5 von D_6 , welches aus den Vektoren $\pm e_j \pm e_k$ ($j, k = 1, 2, 3, 4, 5$) besteht, bestimmt mit r zusammen ein System E_6 , was man durch Zerlegung von r in Komponenten $\parallel D_5$ und $\perp D_5$ sofort ersieht. Also ist unser Σ_7 eine Fortsetzung von E_6 . Wir werden aber später sehen, daß E_6 nur eine Fortsetzung, nämlich E_7 besitzt (§ 19).

$$n = 7. \quad r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$r + s = (1, 0, \dots, 0, 1).$$

Das System Σ_8 umfaßt also D_8 . So kommen wir zurück auf das Problem, die gleichdimensionalen Erweiterungen von D_8 zu studieren.

§ 18.

Eine Erweiterung Σ_8 von D_8 enthält einen Vektor von der Art

$$r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$$

und damit auch alle Vektoren mit einer geraden Anzahl von $-$ -Zeichen. Diese Vektoren bilden ein System, welches durch Vorzeichenumkehrung einer Koordinate mit E_8 identifiziert werden kann. Der Vektor r kombiniert nicht mit einem Vektor $(\pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2})$ mit einer ungeraden Anzahl von $-$ -Zeichen. Also ist E_8 die einzige gleichdimensionale Erweiterung von D_8 .

Damit sind alle Erweiterungen der Systeme D_n bestimmt. Uns bleibt nur übrig, die Erweiterungen von E_6 , E_7 und E_8 zu bestimmen. Die von E_7 oder E_8 sind zugleich Erweiterungen von A_7 bzw. A_8 , also schon aufgezählt. Bleibt nur E_6 .

§ 19.

Erweiterungen von E_6 . E_6 besteht nach § 17 (siehe unter $n = 5$) aus den Vektoren $\pm e_j \pm e_k$ ($j, k = 1, \dots, 5$) und $\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ mit einer geraden Anzahl von $-$ -Zeichen. Ist r ein neu hinzukommender Vektor, so müssen $r_1, \dots, r_6$ entweder alle $\pm \frac{1}{2}$ oder alle $\pm 1, 0$ sein (vgl. § 16). Das gibt zwei Fälle. Beachtet man noch die Bedingungen

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + \frac{\sqrt{3}}{2}r_6 = \pm 1 \text{ oder } 0$$

und $\sum_1^6 r_i^2 < 2$, so findet man:

Fall 1. $r = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$,

Fall 2. $r' = (1, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$.

Setzt man

$$a = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0),$$

so ist $r = r' + a$, also: wenn r' dem System Σ_7 angehört, so auch r , und umgekehrt. Soweit kommen die beiden Fälle auf das Gleiche hinaus. Von den beiden Vorzeichen bei $\sqrt{3}$ darf man nur eines wählen (welches, ist natürlich gleichgültig), aber nicht beide zugleich. Die Erweiterung von Σ_6 ist demnach völlig eindeutig bestimmt und kann nur E_7 sein.

§ 20.

Somit gibt es vier unendliche Reihen von einfachen Lieschen Gruppen:

A_n = Spezielle lineare Gruppe in $n + 1$ Dimensionen ($n \geq 1$),

B_n = Drehungsgruppe in $2n + 1$ Dimensionen ($n \geq 1$),

C_n = Komplexgruppe in $2n$ Dimensionen ($n \geq 1$),

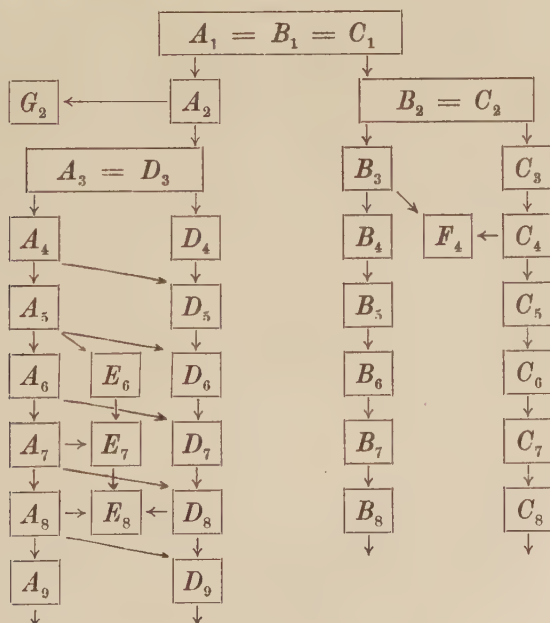
D_n = Drehungsgruppe in $2n$ Dimensionen ($n \geq 3$),

und fünf Ausnahmegruppen:

G_2, F_4, E_6, E_7, E_8

der Gliederzahlen 14, 52, 78, 133, 248.

Die folgende Tafel gibt die Beziehungen zwischen diesen Gruppen an, soweit sie bisher zu Tage getreten sind ($\rightarrow$ heißt Erweiterung des Systems Σ und damit auch der Gruppe):



§ 21.

Die einzigen in unserem Schema noch fehlenden Inklusionsbeziehungen sind die, welche die 60° -Reihen (links) mit den 45° -Reihen (rechts) verknüpfen. Ein System Σ aus den 45° -Reihen enthält Vektoren von zwei verschiedenen Längen, etwa den Längen 1 und $\sqrt{2}$. Will man ein darin enthaltenes System Σ' der 60° -Gruppe erhalten, so muß man entweder alle Vektoren der Länge 1 oder alle der Länge $\sqrt{2}$ weglassen. Alle Vektoren gleicher Länge 1 oder $\sqrt{2}$ bilden zusammen schon ein System Σ' , welches allen Bedingungen 1., 2., 3. des § 1 genügt und nur Winkel von 60° und 90° enthält.

In B_n bilden die Vektoren von der Länge 1 nur ein System von senkrechten Einheitsvektoren e_j ; die der Länge $\sqrt{2}$ dagegen bilden genau das System D_n . In C_n stehen ebenso die Vektoren $2e_j$ von der Länge 2 alle zueinander senkrecht, während die Vektoren der Länge $\sqrt{2}$ wieder das System D_n bilden. In F_4 schließlich bilden sowohl die Vektoren der Länge 1 wie die der Länge $\sqrt{2}$ je ein System D_4 . Also hat man in der Tafel von § 20 nur noch die Pfeile $D_n \rightarrow B_n$, $D_n \rightarrow C_n$ und $D_4 \rightarrow F_4$ hinzuzufügen, um alle Inklusionsbeziehungen vollständig zu haben.

(Eingegangen am 10. November 1932.)

Über den von Laplace postulierten Urkörper.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Vor einiger Zeit gelang es, die Existenz nichthomogener Gleichgewichtsfiguren zu beweisen, die auf ihrer Berandung „singuläre“ Punkte besitzen, d. h. Punkte, in denen die Schwerkraft verschwindet. Die grundlegende Methode, derartige Aufgaben in Angriff zu nehmen, bot eine Arbeit von Herrn Lichtenstein¹⁾, die in der Ebene eine Gleichgewichtskonfiguration behandelt, die aus zwei in einem Punkte zusammenhängenden Körpern besteht. Es folgte dann die Bearbeitung des gleichen Problems im Raume²⁾ und später eine Untersuchung derjenigen Gleichgewichtskonfiguration, die aus einem Zentralkörper und einem mit diesem längs einer Kreislinie zusammenhängenden Ringkörper besteht³⁾.

In dieser Arbeit soll der Fall behandelt werden, in dem es sich lediglich um einen einfach zusammenhängenden Körper mit Rotations-symmetrie handelt, dessen Schwerkraft längs einer Kreislinie auf der Oberfläche verschwindet. Auf dieses Problem, wie übrigens auch auf die vorher erwähnten, hatte Herr Lichtenstein anläßlich einer Vorlesung über kosmogonische Hypothesen im Wintersemester 1928/29 hingewiesen. Die Ausgangskonfiguration ist das Feld der Niveauflächen, die von einer im Koordinatenursprung befindlichen punktförmigen Masse, einer gleichförmigen Rotationsbewegung um die z -Achse und einem festen Außenfeld mit Rotationssymmetrie herrühren. Wie in den früheren Arbeiten wird sich neben der Existenz der singulären Gleichgewichtsfigur in deren Nachbarschaft die Existenz einer linearen Reihe ergeben, nur daß hier natürlich diese sich von der singulären Figur lediglich nach „innen“, d. h. zu kleineren Figuren erstrecken kann.

¹⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Kosmogonische Untersuchungen I, Sächsische Berichte 80, I (1928), S. 35—68.

²⁾ Vgl. K. Maruhn, Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper, Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 300—320.

³⁾ Vgl. K. Maruhn, Über den Laplaceschen Ringkörper, Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 122—142.

Im ersten Teil wird der Existenzbeweis mit der bereits in den anderen Arbeiten verwendeten, von Herrn Lichtenstein in der unter ¹⁾ zitierten Arbeit angegebenen Methode geführt. Von entscheidender Bedeutung sind dabei gewisse Hilfssätze der Potentialtheorie⁴⁾, die vor einiger Zeit von Herrn Lichtenstein zusammengestellt und neu bewiesen wurden. Da zum Teil wörtlich die gleichen Darlegungen wie in den unter ²⁾ und ³⁾ zitierten Arbeiten auftreten würden, können wir uns öfters mit kurzen Hinweisen begnügen.

Im zweiten Teil gelingt der Existenzbeweis auf Grund der Gedankengänge, die Herrn Lichtenstein in seiner letzten Abhandlung über nicht-homogene Gleichgewichtsfiguren zum Ziele führten⁵⁾. Wir verzichten hier, um das Wesentliche besser hervortreten zu lassen, auf das Außenfeld und die Betrachtung der linearen Reihe und begnügen uns mit dem Existenzbeweis für die singuläre Figur. Die Randdichte dieser Gleichgewichtskonfiguration muß bei beiden Beweisen gleich Null angenommen werden.

Erster Teil.

§ 1.

Problemstellung.

Im Koordinatenursprung des Raumes $\bar{x}-\bar{y}-\bar{z}$ möge sich ein punktförmiges Attraktionszentrum der Masse M befinden. Ein weiteres Koordinatenkreuz $x-y-z$, dessen $(x-y)$ -Ebene mit der $(\bar{x}-\bar{y})$ -Ebene und dessen z -Achse mit der $\bar{z}$ -Achse zusammenfällt, rotiere um die $\bar{z}$ -Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

Setzen wir jetzt

$$(1) \quad L = \left(\frac{\kappa M}{\omega_0^2} \right)^{1/3},$$

so ist leicht zu erkennen, daß in den Punkten $P(L, 0)$ und $P_1(-L, 0)$ der $(x-z)$ -Ebene die Schwerkraft verschwindet. Augenscheinlich besitzt das System der Äquipotentialflächen Rotationssymmetrie in bezug auf die z -Achse.

Wir gehen noch einen Schritt weiter. Es möge sich im Raume $x-y-z$ ein zur Ebene $z = 0$ symmetrisches Außenfeld befinden, das überdies Rotationssymmetrie in bezug auf die z -Achse besitze. Sein

⁴⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV. Sächs. Berichte 82 (1931), S. 265–344.

⁵⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Dritte Abhandl.: Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde. Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 481–562.

Potential nimmt in jedem Punkte der $(x-z)$ -Ebene den Wert $\Pi(x, z)$ an. Über die Funktion Π wird folgendes vorausgesetzt:

Es sei b irgendeine Zahl $> L$ und es stelle B einen „rechts“ der Geraden $x = b$ gelegenen, zur x -Achse symmetrischen, einfach zusammenhängenden endlichen Bereich dar. Dann ist, indem wir nur die Halbebene $x \geq 0$ ins Auge fassen,

1. dort $\Pi(x, z)$ außer in B regulär und zur x -Achse symmetrisch,
2. wächst $\Pi(x, z)$ und $\frac{\partial}{\partial x} \Pi(x, z)$ für $z = 0$ in $< 0, b >$ monoton,
3. ist in jedem Punkte mit $z > 0$ $\frac{\partial}{\partial z} \Pi(x, z) < 0$.

Daher ist aus Symmetriegründen für $z < 0$ stets $\frac{\partial \Pi}{\partial z} > 0$, und zwar besitzen in zur x -Achse symmetrisch gelegenen Punkten die Werte von $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ denselben absoluten Betrag. Überdies ist $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ zur x -Achse symmetrisch. Auf der x -Achse verschwinden in allen regulären Punkten $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ und $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}$, auf der z -Achse ist $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ gleich Null. Dies folgt alles aus den angegebenen Symmetrieeigenschaften.

Die Abszisse x_0 des auf der $+x$ -Achse liegenden schwerelosen Punktes bestimmt sich jetzt aus der Gleichung

$$(2) \quad -\frac{\kappa M}{x_0^3} + \omega_0^2 x_0 + \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x_0, 0) = 0.$$

Auscheinlich wird x_0 kleiner als L ausfallen.

Das Gesamtpotential des vorgelegten Schwerfeldes im Punkte $(x, z)^6$,

$$(3) \quad V^{(0)}(x, 0, z) = \frac{\kappa M}{r} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \Pi(x, z), \quad (r^2 = x^2 + z^2)$$

liefert uns

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} &= -\frac{\kappa M x}{r^3} + \omega_0^2 x + \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x, z), & \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} &= -\frac{\kappa M z}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \Pi(x, z); \\ \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial x^2} &= \frac{3\kappa M x^2}{r^5} - \frac{\kappa M}{r^3} + \omega_0^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial z^2} &= \frac{3\kappa M z^2}{r^5} - \frac{\kappa M}{r^3} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Speziell ist im Punkte $(x_0, 0)$

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x^2} &= \frac{2\kappa M}{x_0^3} + \omega_0^2 + \frac{\partial^2 \Pi(x_0, 0)}{\partial x^2} = \alpha_0, & (\alpha_0 > 0), \\ \frac{\partial^2 V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial z^2} &= -\frac{\kappa M}{x_0^3} + \frac{\partial^2 \Pi(x_0, 0)}{\partial z^2} = -\gamma_0, & (\gamma_0 > 0). \end{aligned}$$

⁶⁾ Wegen der Rotationssymmetrie in bezug auf die z -Achse beschränken wir uns von jetzt ab bei allen Betrachtungen auf die $(x-z)$ -Ebene.

Bezeichnen wir jetzt noch mit

$$(6) \quad \bar{C}^{(0)} = \frac{\kappa M}{x_0} + \frac{\omega_0^2 x_0^2}{2} + \Pi(x_0, 0)$$

den Wert von $V^{(0)}$ im Punkte $(x_0, 0)$, so haben wir in der Nachbarschaft dieses Punktes, etwa für $r \leq r_0$ mit $r^2 = (x - x_0)^2 + z^2$, die Entwicklung

$$(7) \quad V^{(0)}(x, 0, z) = \bar{C}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_0 (x - x_0)^2 - \frac{1}{2} \gamma_0 z^2 + O(r^3).$$

Fehlt das Außenfeld, so reduziert sich (7) wegen (1) auf

$$(8) \quad V^{(0)} = \frac{3}{2} (\kappa M \omega_0)^{2/3} + \frac{\omega_0^2}{2} [3(L - x)^2 - z^2] + O(r^3).$$

Es sei jetzt die Niveaufläche

$$V^{(0)}(x, y, z) = \bar{C}^{(0)}$$

mit $\bar{\mathfrak{S}}^{(0)}$ bezeichnet; sie schließe den Körper $\bar{\mathfrak{T}}^{(0)}$ ein. Im Meridianschnitt haben wir entsprechend die Kurve $\bar{S}^{(0)}$, die das Gebiet $\bar{T}^{(0)}$ begrenzt. Wie man sogleich erkennt, besitzt $\bar{S}^{(0)}$ in $(x_0, 0)$ eine Doppeltangente, deren Gleichung

$$(9) \quad \alpha_0 (x - x_0)^2 - \gamma_0 z^2 = 0$$

oder bei Abwesenheit des Außenfeldes

$$(10) \quad 3(L - x)^2 - z^2 = 0$$

lautet.

Wir wenden uns jetzt zum Studium des Gravitationsfeldes des vorgelegten Systems. Die Schwerkraft in Richtung der Normale (ν) einer jeden Niveaufläche beträgt in der $(x - z)$ -Ebene

$$(11) \quad \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}\right)^2} = N > 0.$$

Dieser Ausdruck kann für $0 < x \leq b$ und alle z nur im Punkte $(x_0, 0)$ verschwinden. Wir betrachten jetzt den rechteckigen Bereich

$$\mathfrak{B}: -x_0 \leq x \leq x_0, \quad -d \leq z \leq +d,$$

wobei d so groß gewählt ist, daß die Kurve $\bar{S}^{(0)}$ (abgesehen von den Punkten $(x_0, 0)$ und $(-x_0, 0)$) ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ verläuft. Die zu N gehörige Normalenrichtung weist in ganz $\mathfrak{B}$ (außer in $(x_0, 0)$ und $(-x_0, 0)$) in das Innere der Meridiankurven, da dies z. B. in allen auf der z -Achse (außer $(0, 0)$) gelegenen Punkten sicher der Fall ist und daher auch wegen der Stetigkeit der Normalen in allen anderen Punkten von $\mathfrak{B}$ eintreten muß.

Da nunmehr unter unseren Voraussetzungen auf der Berandung von $\mathfrak{B}$ (außer in $(x_0, 0)$ und $(-x_0, 0)$) $V^{(0)} < \bar{C}^{(0)}$ ausfällt, so sind alle in $\mathfrak{B}$

gelegenen Meridiankurven $V^{(0)} = C^{(0)}$ ($C^{(0)} > \bar{C}^{(0)}$) ineinander geschachtelt; sie umschließen den Punkt O und werden von $\bar{S}^{(0)}$ umschlossen.

Wir fassen jetzt die stetige Schar der Niveauflächen $V^{(0)} = C_0^{(0)}$ ins Auge, wobei $C_0^{(0)}$ alle Werte in $(\bar{C}^{(0)}, C_*^{(0)})$ durchlaufe, unter $C_*^{(0)}$ irgendeine Zahl $> \bar{C}^{(0)}$ verstanden. Wir fragen: Gibt es in der Nachbarschaft einer jeden dieser Figuren eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten von kleiner endlicher Dichte und bilden diese alle eine lineare Reihe?

Es mögen die Ausgangsfiguren mit $\mathfrak{I}_0^{(0)}$, deren Randfläche mit $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ und deren Meridianschnitte mit $T_0^{(0)}$ (Rand $S_0^{(0)}$) bezeichnet werden; entsprechend haben wir bei den gesuchten Körpern $\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{S}_0$, T_0 und S_0 .

Jeder der Körper $\mathfrak{I}_0 + \mathfrak{S}_0$ sei wie $\mathfrak{I}_0^{(0)} + \mathfrak{S}_0^{(0)}$ beschaffen, aber mit inhomogener inkompressibler Flüssigkeit erfüllt. Die Dichte μ sei in ganz $\mathfrak{I}_0 + \mathfrak{S}_0$ stetig, innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden, ganz in $\mathfrak{I}_0$ befindlichen Gebietes $\mathfrak{I}_*$ um O konstant und genüge in $\mathfrak{I}_0 - \mathfrak{I}_*$ der Beziehung

$$\mu(x, y, z; C_0^{(0)}) = \varepsilon \Psi[V(x, y, z) - V(x_0, 0, 0); C_0^{(0)}], \quad (\varepsilon > 0 \text{ konstant}),$$

unter $V(x, y, z)$ das Gesamtpotential der gesuchten Konfiguration verstanden. Die Funktion $\Psi(u; C_0^{(0)})$ existiert für alle $u \geq 0$ und $C_0^{(0)} \geq \bar{C}^{(0)}$, ist dort in bezug auf u und $C_0^{(0)}$ stetig und besitzt überdies eine stetige Ableitung erster Ordnung nach u , die ihrerseits einer H -Bedingung genügt.

Die Dichte soll in $\mathfrak{I}_0 - \mathfrak{I}_*$ gegen $\mathfrak{S}_0$ hin bis zum Werte εc abnehmen; falls $\mathfrak{S}_0$ die singuläre Fläche $\bar{\mathfrak{S}}$ ist, soll die Randdichte gleich Null sein. Wir setzen daher von der Funktion $\Psi(u; C_0^{(0)})$ des weiteren voraus, daß sie bei festgehaltenem $C_0^{(0)}$ mit wachsendem u monoton zunimmt, und es soll, wenn $\mathfrak{R}^{(0)}$ den kleinsten Abstand des Punktes $(x_0, 0)$ von $S_0^{(0)}$ bezeichnet, die Ungleichheitsbeziehung

$$c \leq a [\mathfrak{R}^{(0)}]^{1+\eta} \quad (\eta > 0, a > 0 \text{ konstant})$$

gelten. Es ist ferner

$$c = \Psi(C_0 - \bar{C}; C_0^{(0)})$$

und

$$\Psi(0; \bar{C}^{(0)}) = 0,$$

wobei C_0 der Wert von $V(x, y, z)$ auf $\mathfrak{S}_0$ und $\bar{C} = V(x_0, 0, 0)$ ist.

§ 2.

Sukzessive Approximationen.

Es sei $C_*^{(0)}$ die oben eingeführte Zahl $> C_0^{(0)}$. Die Kurve $V^{(0)} = C_*^{(0)}$ begrenzt ein Gebiet $T_*^{(0)}$ in der Umgebung des Koordinatenursprungs. Der zugehörige Rotationskörper heiße $\mathfrak{I}_*^{(0)}$. Wir denken uns diesen mit einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte $\mu_1 = \varepsilon \Psi(C_*^{(0)} - \bar{C}^{(0)}; C_0^{(0)})$,

das Gebiet $\mathfrak{T}_0^{(0)} - \mathfrak{T}_*^{(0)}$ mit einer inhomogenen unzusammendrückbaren Flüssigkeit der Dichte $\mu_1 = \varepsilon \Psi[V^{(0)}(x, y, z) - \bar{C}^{(0)}; C_0^{(0)}]$ erfüllt.

Es sei $F^{(1)}$ die Resultierende der auf den Punkt $(x_0, 0)$ jetzt wirkenden Gravitationskräfte. Rotiert das System mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = \left(\frac{F^{(1)}}{x_0} \right)^{1/2},$$

so ist der Punkt $(x_0, 0)$ wieder schwerelos.

Wir betrachten nunmehr das Gravitationspotential der neuen Flüssigkeitsmassen

$$\kappa W^{(1)}(x, 0, z; C_0^{(0)}) = \kappa \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu'_1 \cdot \frac{1}{\hat{r}} d\tau' \quad (\hat{r}^2 = (x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2).$$

In einem jeden Punkte (x, z) ist

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} &= \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu'_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\hat{r}} \right) d\tau' = - \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu'_1 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\hat{r}} \right) d\tau' \\ &= \varepsilon c \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)}} \frac{\cos(n', x')}{\hat{r}} d\sigma' + \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)} - \mathfrak{T}_*^{(0)}} \frac{\partial \mu'_1}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\hat{r}} d\tau', \quad (n \text{ Innennormale}). \end{aligned}$$

Es existieren ferner, wie ich früher⁷⁾ gezeigt habe, auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $W^{(1)}$, die außerdem noch einer H -Bedingung genügen, für alle (x, z) in $T_0^{(0)} + S_0^{(0)}$ und $C_*^{(0)} \leq C_0^{(0)} \leq \bar{C}^{(0)}$.

Es sei $V^{(1)}(x, y, z; C_0^{(0)})$ das Gesamtpotential der neuen Konfiguration im Punkte (x, y, z) und $\bar{C}^{(1)}$ der Wert von $V^{(1)}$ im Punkte $(x_0, 0, 0)$. Von der Schar der Niveauflächen $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ (Meridiankurven $S_0^{(1)}$): $V^{(1)} = C_0^{(1)}$ mit $C_0^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)}$ behaupten wir, daß für hinreichend kleine Werte von ε jede Fläche der Schar wie die entsprechende aus der Schar $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ gestaltet ist und dieselben Symmetrieeigenschaften hat. War zuerst $C_0^{(0)} = \bar{C}^{(0)}$, so ist jetzt $C_0^{(1)} = \bar{C}^{(1)}$, d. h. wir erhalten wieder eine singuläre Fläche $\bar{\mathfrak{S}}^{(1)}$ (Meridianschnitt $\bar{S}^{(1)}$) von demselben Charakter wie $\bar{\mathfrak{S}}^{(0)}$.

Neben $\frac{\partial}{\partial x} V^{(1)}(x_0, 0, 0; C_0^{(0)}) = 0$ ist aus Symmetriegründen in $(x_0, 0)$

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x \partial z} = 0.$$

Die anderen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $V^{(1)}$ genügen einer H -Bedingung zum Exponenten $\lambda < 1$. Daher findet sich

$$(13) \quad V^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha_1 (x - x_0)^2 - \frac{1}{2} \gamma_1 z^2 + O(r^2 + \lambda)$$

mit

$$\alpha_1 = \alpha_0 + R_1, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + R_2, \quad R_1, R_2 = O(\varepsilon).$$

⁷⁾ Vgl. I. c. ³⁾, S. 137 ff.

Es sei $\mathfrak{I}_0^{(1)}$ der von $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ begrenzte Körper. Die Niveauflächen $\mathfrak{S}^{(1)}: V^{(1)} = C^{(1)} > C_0^{(1)}$ bilden für hinreichend kleines ε eine Schar ineinander geschachtelter geschlossener Flächen der Klasse Ah , die von $\mathfrak{S}^{(1)}$ umschlossen sind und ihrerseits den Koordinatenursprung einschließen. Natürlich liegt auch hier wieder Rotationssymmetrie in bezug auf die z -Achse vor.

Der Beweis für alle diese Behauptungen ist dem in der unter ²⁾ zitierten Arbeit vollständig analog. Insbesondere läßt sich wie dort erkennen, daß die Ableitung von $V^{(1)}$ in der Normalenrichtung (ν) der Ausgangskonfiguration dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu}$ besitzt. Auf die genaue Durchführung können wir daher hier verzichten.

Die zweite Approximation werden wir jetzt folgendermaßen definieren: Die Niveaufläche $\mathfrak{S}_*^{(1)}: V^{(1)} = C_*^{(1)}$ mit $C_*^{(1)} = C_*^{(0)} + \bar{C}^{(1)} - \bar{C}^{(0)}$ begrenzt ein Gebiet $\mathfrak{I}_*^{(1)}$. Dieses denken wir uns mit einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte

$$\mu_2 = \varepsilon \Psi(C_*^{(1)} - \bar{C}^{(1)}; C_0^{(0)}) = \varepsilon \Psi(C_*^{(0)} - \bar{C}^{(0)}; C_0^{(0)}),$$

das Gebiet $\mathfrak{I}_0^{(1)} - \mathfrak{I}_*^{(1)}$ mit inhomogener inkompressibler Flüssigkeit der Dichte

$$\mu_2 = \varepsilon \Psi(V^{(1)}(x, y, z; C_0^{(0)}) - \bar{C}^{(1)}; C_0^{(0)})$$

erfüllt. Wir werden für das Kraftfeld dieser Massenverteilung zu denselben Resultaten gelangen wie oben. — Dieses Verfahren der sukzessiven Approximationen läßt sich für hinreichend kleine ε ungehindert fortsetzen.

Nun noch einige Bezeichnungen: Es sei $\hat{r}$ der kleinste Abstand des Nullpunktes von $S_*^{(0)}$, und es möge $\hat{R}$ die Kreisfläche $r \leq \frac{1}{2} \hat{r}$ ($r^2 = x^2 + z^2$) sein. Betrachten wir weiter die Winkelräume mit den Scheiteln in $(x_0, 0)$ und $(-x_0, 0)$ um die x -Achse als Halbierende, jeden nach dem Nullpunkt zu mit einem Winkel $2\hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha} > \text{Arctg} \frac{\gamma_0}{\alpha_0}$) geöffnet. $\hat{T}$ sei das Gebiet, das diesen Winkelräumen und zugleich dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehört. Es möge Θ das Gebiet bezeichnen, das entsteht, wenn man aus $\hat{T} - \hat{R}$ alle Punkte entfernt, die von dem Außenrande, gemessen längs den orthogonalen Trajektorien des Ausgangssystems, um weniger als $\alpha^{(0)} r$ entfernt sind. Wir denken uns dabei $\alpha^{(0)} > 0$ so klein gewählt, daß $\bar{T}^{(0)} - T_*^{(0)}$, abgesehen von den Punkten $(x_0, 0)$ und $(-x_0, 0)$, ganz im Innern von Θ enthalten ist und der Abstand eines Punktes auf $S_0^{(0)}$ von dem Außenrande von Θ , wieder längs der orthogonalen Trajektorie gemessen, gewiß $\geq \hat{\sigma} r$ ($\hat{\sigma} > 0$, hinreichend klein) ist.

§ 3.

Konvergenzbeweis.

Wir ordnen beim Übergang von der n -ten zur $(n+1)$ -ten Näherung einem Punkte A_{n-1} in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ immer denjenigen Punkt A_n auf der durch A_{n-1} verlaufenden orthogonalen Trajektorie des Ausgangssystems zu, in dem die Dichte den gleichen Wert hat,

$$\mu_n(A_{n-1}) = \mu_{n+1}(A_n).$$

Wir erhalten so eine topologische Abbildung eines Gebietes $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ auf ein Gebiet $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$. Sie sei definiert durch

$$(14) \quad x_n = x_{n-1} + \xi_{n-1}, \quad z_n = z_{n-1} + \zeta_{n-1}.$$

Die Funktionen ξ_{n-1} und ζ_{n-1} sind in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ erklärte stetige Funktionen von x_{n-1} und z_{n-1} , die dort stetige, einer H -Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen⁸⁾ und überdies folgende Eigenschaften haben:

1. Im Punkte $(x_0, 0)$ ist

$$\xi_{n-1} = \zeta_{n-1} = 0.$$

2. Es gelten die Ungleichheitsbeziehungen

$$(15) \quad \begin{aligned} |\xi_{n-1}|, |\zeta_{n-1}| &\leq \vartheta_1 \Omega r_{n-1} & (r_{n-1}^2 = (x_{n-1} - x_0)^2 + z_{n-1}^2), \\ \left| \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right|, \dots, \left| \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \right| &\leq \vartheta_2 \Omega, \\ \left| \left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right)_1 - \left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right)_2 \right|, \dots, \left| \left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \right)_1 - \left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \right)_2 \right| \\ &\leq \vartheta_3 \Omega d_{12}^{(n-1)\lambda^*} \quad (0 < \lambda^* < 1), \end{aligned}$$

wobei z. B. $\left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe in einem Punkt $(x_{n-1}^{(1)}, z_{n-1}^{(1)})$ bedeutet und

$$d_{12}^{(n-1)} = (x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(2)})^2 + (z_{n-1}^{(1)} - z_{n-1}^{(2)})^2$$

ist⁹⁾. Es sei weiter h_n die Bogenlänge des zwischen (x_{n-1}, z_{n-1}) und (x_n, z_n) gelegenen Kurvenstückes der orthogonalen Trajektorie. Auf

⁸⁾ Liegt die singuläre Figur vor, so genügen die partiellen Ableitungen erster Ordnung keiner H -Bedingung. Im folgenden auftretende H -Bedingungen fallen alsdann auch fort.

⁹⁾ $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sind Konstante, wie später auch $\vartheta_4, \dots$.

dieser sei die Richtung, die von O fortweist, als positiv definiert. Wir haben

$$(16) \quad |h_n| \leq \vartheta_4 \Omega r_{n-1}, \quad \left| \frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}} \right|, \left| \frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}} \right| \leq \vartheta_5 \Omega,$$

$$\left| \left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}} \right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}} \right)_2 \right|, \left| \left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}} \right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}} \right)_2 \right| \leq \vartheta_6 \Omega d_{12}^{(n-1) \lambda*}.$$

Es genügt jetzt, den eigentlichen Konvergenzbeweis nur zu skizzieren, da er beinahe wörtlich mit denen in meinen früheren Arbeiten¹⁰⁾ übereinstimmen würde.

Wir betrachten die Potentiale

$$(17) \quad W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}_0^{(n-1)}} \mu'_n \cdot \frac{1}{\hat{r}_{n-1}} d\tau'_{n-1},$$

$$W^{(n+1)}(x_n, 0, z_n) = \int_{\mathbb{R}_0^{(n)}} \mu'_{n+1} \cdot \frac{1}{\hat{r}_n} d\tau'_n,$$

$$\hat{r}_{n-1}^2 = (x_{n-1} - x'_{n-1})^2 + y_{n-1}'^2 + (z_{n-1} - z'_{n-1})^2,$$

$$\hat{r}_n^2 = (x_n - x'_n)^2 + y_n'^2 + (z_n - z'_n)^2,$$

$$d\tau'_{n-1} = dx'_{n-1} dy'_{n-1} dz'_{n-1}, \quad d\tau'_n = dx'_n dy'_n dz'_n.$$

Nach einer von Herrn Lichtenstein¹¹⁾ entwickelten Methode finden wir für irgendeinen Punkt (x, z) in $\mathfrak{B}$

$$(18) \quad |W^{(n+1)}(x, 0, z) - W^{(n)}(x, 0, z)|,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)}(x, 0, z) - \frac{\partial}{\partial x} W^{(n)}(x, 0, z) \right|,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} W^{(n+1)}(x, 0, z) - \frac{\partial}{\partial z} W^{(n)}(x, 0, z) \right| \leq \vartheta_7 \Omega \varepsilon,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)} \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)} \right)_2 - \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} W^{(n)} \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} W^{(n)} \right)_2 \right] \right|,$$

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial z} W^{(n+1)} \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial z} W^{(n+1)} \right)_2 - \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} W^{(n)} \right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial z} W^{(n)} \right)_2 \right] \right| \leq \vartheta_8 \Omega \varepsilon d_{12}^{*},$$

$$d_{12}^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2.$$

Setzen wir jetzt noch

$$(19) \quad F^{(n)} = \frac{\kappa M}{x_0^2} - \kappa \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_0, 0, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x_0, 0),$$

$$F^{(n+1)} = \frac{\kappa M}{x_0^2} - \kappa \frac{\partial}{\partial x_n} W^{(n+1)}(x_0, 0, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \Pi(x_0, 0),$$

¹⁰⁾ Vgl. I. c. ²⁾ und I. c. ³⁾.

¹¹⁾ Vgl. I. c. ¹⁾ und I. c. ⁴⁾, insbesondere S. 291 ff. und S. 315 ff.

so erhalten wir wegen

$$\omega_n^2 = \frac{1}{a} F^{(n)} \quad \text{und} \quad \omega_{n+1}^2 = \frac{1}{a} F^{(n+1)}$$

$$|\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2| \leq \vartheta_9 \Omega \varepsilon.$$

Es ist weiterhin

$$(20) \quad \begin{aligned} V^{(n)}(x, 0, z) &= \kappa W^{(n)}(x, 0, z) + \frac{\omega_n^2}{2} x^2 + \frac{\kappa M}{r} + \Pi(x, z), \\ V^{(n+1)}(x, 0, z) &= \kappa W^{(n+1)}(x, 0, z) + \frac{\omega_{n+1}^2}{2} x^2 + \frac{\kappa M}{r} + \Pi(x, z). \end{aligned}$$

Wegen (18) und da sich

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)} \right|$$

in der Umgebung von $(x_0, 0)$ wie r ($r^2 = (x - x_0)^2 + z^2$) verhalten, ist

$$(21) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x, 0, z) - \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x, 0, z) \right| \leq \vartheta_{11} \Omega \varepsilon r$$

und

$$(22) \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)}(x, 0, z) - \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)}(x, 0, z) \right| \leq \vartheta_{12} \Omega \varepsilon r.$$

Hieraus folgt sogleich, daß

$$(23) \quad |(V^{(n+1)}(x, 0, z) - V^{(n+1)}(x_0, 0, 0)) - (V^{(n)}(x, 0, z) - V^{(n)}(x_0, 0, 0))| \leq \vartheta_{13} \Omega \varepsilon r^2$$

ist. Ferner genügen $\frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)} - \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}$ und $\frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)} - \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)}$ H -Bedingungen von der in (18) angegebenen Art.

Ohne näher darauf eingehen zu wollen, findet sich jetzt leicht

$$(24) \quad \begin{aligned} \text{Max } |h_{n+1}| &\leq \vartheta^* \varepsilon \text{Max } |h_n|, \\ \text{Max } \left| \frac{\partial}{\partial x} h_{n+1} \right| &\leq \vartheta^* \varepsilon \text{Max } \left| \frac{\partial}{\partial x} h_n \right|, \\ \text{Max } \left| \frac{\partial}{\partial z} h_{n+1} \right| &\leq \vartheta^* \varepsilon \text{Max } \left| \frac{\partial}{\partial z} h_n \right|. \end{aligned}$$

In ganz analoger Weise finden wir

$$(25) \quad \begin{aligned} |(V^{(1)}(x, 0, z) - V^{(1)}(x_0, 0, 0)) - (V^{(0)}(x, 0, z) - V^{(0)}(x_0, 0, 0))| &\leq \vartheta_{14} \varepsilon r^2, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x} V^{(0)} \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(1)} - \frac{\partial}{\partial z} V^{(0)} \right| &\leq \vartheta_{15} \varepsilon r \end{aligned}$$

nebst einer H -Bedingung für die zuletzt genannten Differenzen. Hieraus ergibt sich

$$(26) \quad \begin{aligned} |h_1| &\leq \vartheta_4 \bar{\vartheta} \varepsilon r, \quad \left| \frac{\partial h_1}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial h_1}{\partial z} \right| \leq \vartheta_5 \bar{\vartheta} \varepsilon, \\ \left| \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)_2 \right|, \quad \left| \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_2 \right| &\leq \vartheta_6 \bar{\vartheta} \varepsilon d_{12}^*. \end{aligned}$$

Wegen $\mu_1 = \varepsilon \Psi(V^{(0)} - \bar{C}^{(0)}; C_0^{(0)})$ ist $V^{(1)}$ und somit auch h_1 nebst $\frac{\partial h_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial h_1}{\partial z}$ stetig von $C_0^{(0)}$ abhängig. Das gleiche gilt dann auch, wie man leicht einsieht, für

$$V^{(2)}, V^{(3)}, \dots, h_2, h_3, \dots, \frac{\partial h_2}{\partial x}, \frac{\partial h_3}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_2}{\partial z}, \frac{\partial h_3}{\partial z}, \dots$$

Für hinreichend kleines ε wird sicher $\vartheta^* \varepsilon < \frac{1}{2}$ ausfallen. Wegen (24) konvergieren daher die Reihen

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots, \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_3}{\partial x} + \dots, \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial h_3}{\partial z} + \dots$$

unbedingt und gleichmäßig und haben $h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial z}$ zu Summen, die wiederum stetig von $C_0^{(0)}$ abhängen. Es gilt

$$(27) \quad |h| \leq 2 \vartheta_4 \bar{\vartheta} \varepsilon r, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial z} \right| \leq 2 \vartheta_5 \bar{\vartheta} \varepsilon, \\ \left| \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_2 \right|, \left| \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)_1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)_2 \right| \leq 2 \vartheta_6 \bar{\vartheta} \varepsilon d_{12}^*.$$

Ist weiterhin mit $R^2 = x_0^2 + d^2$

$$(28) \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \text{Min} \left(\frac{\hat{\vartheta}}{2 \vartheta_4 \bar{\vartheta}}, \frac{\hat{t}}{4 \vartheta_4 \bar{\vartheta} R} \right),$$

so ist jede der Figuren $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ ganz in Θ enthalten. Weiterhin konvergiert gleichmäßig:

$$W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}), \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}), \\ \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}), \mu_n(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \quad \text{und} \quad \omega_n$$

entsprechend gegen

$$W(x, 0, z; C_0^{(0)}), \frac{\partial}{\partial x} W(x, 0, z; C_0^{(0)}), \\ \frac{\partial}{\partial z} W(x, 0, z; C_0^{(0)}), \mu(x, 0, z; C_0^{(0)}) \quad \text{und} \quad \omega.$$

Es ergibt sich schließlich

$$V(x, 0, z; C_0^{(0)}) = \frac{\kappa M}{r} + \kappa W(x, 0, z; C_0^{(0)}) + II(x, z) + \frac{\omega^2}{2} x^2,$$

und wir haben die lineare Reihe von Gleichgewichtsfiguren, deren Existenz bewiesen werden sollte, vor uns.

Zweiter Teil.

Ein zweiter Beweis für die Existenz der singulären Gleichgewichtsfigur.

Um das Wesentliche in den folgenden Betrachtungen besser hervortreten zu lassen, befassen wir uns lediglich mit der singulären Figur bei Abwesenheit des Außenfeldes. Die Bezeichnungen werden dabei anders gewählt, um sie denen der Arbeit von Herrn Lichtenstein¹²⁾ anzupassen, die diesem Abschnitt zugrunde liegt.

Als Ausgangskonfiguration $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ (Meridianschnitt $T + S$) gilt die singuläre Niveaulfläche mit

$$S: V(x, 0, z) \equiv \frac{\kappa M}{r} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot (\kappa M \omega)^{2/3},$$

(wobei $r^2 = x^2 + z^2$, ω die Winkelgeschwindigkeit und $x^2 + y^2 = L^2$, $z = 0$ der singuläre Kreis auf der Oberfläche der betrachteten Figur ist), und die in $\mathfrak{T}$ gelegenen Niveaulflächen. Bezeichnen wir mit ω_1 die Winkelgeschwindigkeit der gesuchten Gleichgewichtsfigur, so fragen wir wieder, ob es für passend gewählte Werte von $\omega_1^3 - \omega^3$ eine im wesentlichen wie $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ gestaltete Konfiguration $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1$ (Meridianschnitt $T_1 + S_1$) von nicht verschwindender, hinreichend kleiner Dichte gibt. Das Problem läßt sich nach dem Vorbilde von Herrn Lichtenstein wie folgt anfassen:

Es sei in der $(x-z)$ -Ebene $Q_1(x_1, z_1)$ ein beliebiger Punkt in der Nachbarschaft einer der Niveaulflächen $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}^{13)}$ (Meridianschnitt $S_{\mathfrak{R}}$) des Ausgangsfeldes, und es möge $Q(x, z)$ den Fußpunkt des von Q_1 auf $S_{\mathfrak{R}}$ gefällten Lotes bezeichnen. Der Abstand QQ_1 , positiv in der Richtung der Außennormalen (ν) zu $S_{\mathfrak{R}}$ in Q gerechnet, heiße ζ . Die Richtungskosinus a und c der Außennormalen sind in $T + S$ außer in $P_1(-L, 0)$ und $P(L, 0)$ stetig und haben stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen. In der Umgebung von P und P_1 verhalten sich, wie man leicht nachprüft, $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial z}, \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial z}$ wie $\frac{1}{r}$, ($r^2 = (x - L)^2 + z^2$). Für die kartesischen Koordinaten x_1, z_1 erhalten wir demnach

$$(29) \quad x_1 = x + a\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta.$$

Wir denken uns $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1$ auf $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ derart topologisch abgebildet, daß Niveaulflächen des Gesamtpotentials, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}1}$ (Meridianschnitt $S_{\mathfrak{R}1}$) einander umkehrbar eindeutig entsprechen, ein Punkt Q auf $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ allemal auf den Schnittpunkt Q_1 der Normalen (ν) zu $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ in Q mit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}1}$, und insbesondere die Kreislinie $x^2 + y^2 = L^2$, $z = 0$ auf sich selbst abgebildet wird. $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_1$ soll dieselben Symmetrieeigenschaften wie $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$ haben.

¹²⁾ Vgl. I. c. ⁵⁾.

¹³⁾ $\mathfrak{R}$ bezeichnet den Abstand des Schnittpunktes von $S_{\mathfrak{R}}$ mit der $+x$ -Achse von $P(L, 0)$. Durch $\mathfrak{R}$ ist die Niveaulfläche vollständig festgelegt.

Unser Ziel ist, $\zeta(x, y, z)$ als Ortsfunktion in $\mathfrak{I} - \mathfrak{I}_{\mathfrak{R}_*} + \mathfrak{S} + \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_*}$ zu bestimmen, wobei $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_*}$ eine ganz im Innern von $\mathfrak{I}$ gelegene Niveaulfläche und $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}_*}$ den von ihr umschlossenen Körper bezeichnet. Wir nehmen an, daß ζ symmetrisch in bezug auf die Ebene $z = 0$ ist und Rotations-symmetrie bezüglich der z -Achse besitzt. Wir werden uns daher in unseren Betrachtungen wieder auf die (x, z) -Ebene beschränken können. Es sei weiter angenommen, daß ζ in $T - T_{\mathfrak{R}_*} + S + S_{\mathfrak{R}_*}$ (dem Meridianschnitt von $\mathfrak{I} - \mathfrak{I}_{\mathfrak{R}_*} + \mathfrak{I} + \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_*}$) stetig ist, dort beschränkte und sogar (allerdings eventuell mit Ausschluß der Punkte P und P_1) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und in den Punkten P und P_1 verschwindet. Es ist, unter Ω einen hinreichend kleinen Wert verstanden,

$$(30) \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| \leq \Omega,$$

woraus sogleich

$$(31) \quad |\zeta| \leq \sqrt{2} \Omega r$$

folgt.

Wir betrachten jetzt eine in $\mathfrak{I} + \mathfrak{S}$ erklärte, stetige, allenfalls abteilungsweise stetige, nicht negative Ortsfunktion $\chi(\mathfrak{R})$, die auf jeder Niveaulfläche $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}}$ denselben konstanten Wert annimmt, auf $\mathfrak{S}$ verschwindet und in jedem Stetigkeitsintervalle stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die ihrerseits einer H -Bedingung genügen. Innerhalb von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_*}$ ($0 < \mathfrak{R}_* < L$) soll $\chi(\mathfrak{R}) = \chi(\mathfrak{R}_*)$ konstant sein. Wir verlangen nun, daß auf jeder Niveaulfläche $\mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_1}$ der neuen Flüssigkeitsverteilung die Dichte den Wert $\alpha \chi(\mathfrak{R})$ ($\alpha > 0$, hinreichend klein) annehmen soll. Im folgenden brauchen uns somit nur die Niveaulflächen mit $0 \leq \mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}_*$ zu beschäftigen.

Wie wir wissen, ist in $Q(x, z)$ auf $S_{\mathfrak{R}}$

$$(32) \quad V \equiv \frac{\kappa M}{r} + \omega^2 \frac{x^2}{2} = C(\mathfrak{R}).$$

Durch $C(\mathfrak{R})$ ist angedeutet, daß der konstante Wert von V auf $S_{\mathfrak{R}}$ nur von $\mathfrak{R}$ abhängt. In dem entsprechenden Punkte $Q_1(x_1, z_1)$ auf $S_{\mathfrak{R}_1}$ der neuen Konfiguration gilt

$$(33) \quad V_1 \equiv \frac{\kappa M}{r_1} + \frac{\omega_1^2}{2} x_1^2 + \kappa \alpha W_1(x_1, 0, z_1) = C_1(\mathfrak{R})$$

mit

$$(34) \quad W_1(x_1, 0, z_1) = \int_{\mathfrak{I}_1} \chi'(\mathfrak{R}) \cdot \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1, \quad \varrho_1^2 = (x_1 - x'_1)^2 + y_1'^2 + (z_1 - z'_1)^2, \\ d\tau_1 = dx'_1 dy'_1 dz'_1, \quad r_1^2 = x_1^2 + z_1^2.$$

Aus (32) und (33) folgt

$$(35) \quad \kappa M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} + \kappa \alpha W_1(x_1, 0, z_1) \\ = C_1 - C = \kappa s = \kappa s(\mathfrak{R}).$$

Wir fordern weiterhin, daß im Meridianschnitt der neuen Konfiguration wiederum die Schwerkraft in den Punkten $P(L, 0)$ und $P_1(-L, 0)$ verschwindet. Es muß daher die Beziehung

$$(36) \quad \omega_1^2 L - \frac{\kappa M}{L^2} + \kappa \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) = 0$$

oder aber

$$(37) \quad \omega_1^2 = \frac{\kappa M}{L^2} - \frac{\kappa \alpha}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) = \omega^2 - \frac{\kappa \alpha}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0)$$

bestehen.

Es ist weiter

$$(38) \quad \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} = -\frac{\kappa \alpha x_1^3}{2L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) + \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 - x^2),$$

$$(39) \quad \kappa M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 - x^2) = V(x_1, 0, z_1) - V(x, 0, z) \\ = \zeta \frac{\partial}{\partial v} V(x, 0, z) + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} V(\bar{x}, 0, \bar{z}),$$

wobei der Punkt $(\bar{x}, \bar{z})$ auf (v) zwischen (x_1, z_1) und (x, z) gelegen ist.

Wie man leicht nachprüft, bleibt $\frac{\partial^2}{\partial v^2} V(\bar{x}, 0, \bar{z})$ auch in der Umgebung der Punkte P und P_1 beschränkt.

Mit

$$(40) \quad \psi(x, 0, z) = \frac{\partial}{\partial v} V(x, 0, z)$$

erhalten wir demnach

$$(41) \quad \psi \zeta = \kappa s(\mathfrak{R}) - \kappa \alpha W_1(x_1, 0, z_1) - \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} V(\bar{x}, 0, \bar{z}) \\ + \frac{\kappa \alpha x_1^3}{2L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0).$$

Lassen wir jetzt den Punkt (x, z) gegen $(L, 0)$ rücken, so folgt aus (41) sogleich

$$(42) \quad 0 = \kappa s(\mathfrak{R}) - \kappa \alpha W_1(L, 0, 0) + \frac{1}{2} \kappa \alpha L \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0), \\ W_1(L, 0, 0) = \int_{x_1} \chi' \cdot \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1, \quad \varrho_1^2 = (L - x_1')^2 + y_1'^2 + z_1'^2.$$

Wir setzen nunmehr

$$(43) \quad s(\mathfrak{R}) - \kappa s(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^2 h \mathfrak{f}(\mathfrak{R}),$$

unter $\mathfrak{f}(\mathfrak{R})$ eine vorgegebene, nebst ihrer Ableitung stetige Funktion von $\mathfrak{R}$ und unter h einen hinreichend kleinen Parameter verstanden. Somit folgt aus (41), (42) und (43) alles in allem

$$(44) \quad \psi \zeta = \kappa \cdot \mathfrak{R}^2 h \mathfrak{f}(\mathfrak{R}) - \kappa \alpha (W_1(x_1, 0, z_1) - W_1(L, 0, 0)) \\ - \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} V(\bar{x}, 0, \bar{z}) + \frac{\kappa \alpha (x_1^2 - L^2)}{2L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0).$$

Es ergibt sich nun¹⁴⁾

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left[W_1(x_1, 0, z_1) - \frac{x_1^3}{2L} \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) \right] \right| \\
 &= \left| \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(x_1, 0, z_1) - \frac{x_1}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) \right| \\
 (45) \quad & \leq \left| \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(x_1, 0, z_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) \right| \cdot |L - x_1| \leq \beta_1 (1 + \Omega) r_1, \\
 & \left| \frac{\partial}{\partial z_1} W_1(x_1, 0, z_1) \right| \leq \beta_2 (1 + \Omega) r_1,
 \end{aligned}$$

woraus dann sogleich

$$(46) \quad \left| W_1(x_1, 0, z_1) - W_1(L, 0, 0) - \frac{x_1^3 - L^3}{2L} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(L, 0, 0) \right| \leq \beta_3 (1 + \Omega) r_1^2$$

folgt. Bezeichnen wir zur Abkürzung den innerhalb der Betragstriche linkerhand stehenden Ausdruck mit $\Xi(x_1, z_1)$, so findet sich wegen (45) und

$$(47) \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial z_1}{\partial z} \right| \leq 1 + \beta_4 \Omega, \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| \leq \beta_5 \Omega,$$

$$(48) \quad r_1^2 = r^2 + 2a(x - L)\zeta + 2cz\zeta + \zeta^2 \leq (1 + \beta_6 \Omega) r^2,$$

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & \left| \frac{\partial}{\partial x} \Xi(x_1, z_1) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z} \Xi(x_1, z_1) \right| \leq \beta_7 (1 + \Omega) r, \\
 & |\Xi(x_1, z_1)| \leq \beta_8 (1 + \Omega) r^2.
 \end{aligned}$$

Setzen wir weiter für die rechte Seite der Integro-Differentialgleichung (44) $X\{\zeta\}$, so ist für $h \leq h_0$, h_0 hinreichend klein,

$$\begin{aligned}
 & |X\{\zeta\}| \leq \beta_9 (h_0 + \alpha + \alpha \Omega + \Omega^2) r^2, \\
 (50) \quad & \left| \frac{\partial}{\partial x} X\{\zeta\} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z} X\{\zeta\} \right| \leq \beta_{10} (h_0 + \alpha + \alpha \Omega + \Omega^2) r^{15}.
 \end{aligned}$$

Es sei jetzt $\dot{\zeta}$ eine ganz wie ζ beschaffene Ortsfunktion in $T - T_{\mathfrak{A}_*} + S + S_{\mathfrak{A}_*}$ mit

$$(51) \quad \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} \right| \leq \Omega, \quad |\dot{\zeta}| \leq \sqrt{2} \Omega r,$$

und es möge

$$(52) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \dot{\zeta}) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z} (\zeta - \dot{\zeta}) \right| \leq \mathcal{O}, \quad |\zeta - \dot{\zeta}| \leq \sqrt{2} \mathcal{O} r, \quad \mathcal{O} \leq 2 \Omega$$

¹⁴⁾ Vgl. loc. cit. 4) S. 318 ff.

¹⁵⁾ Es läßt sich leicht nachprüfen, daß sich $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial \nu^3} \right]$ in der Umgebung von P und P_1 wie $\frac{1}{r}$ verhält, desgleichen $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^3 V}{\partial \nu^3} \right]$.

gelten. Nunmehr findet sich nach dem Vorgehen von Herrn Lichtenstein¹⁶⁾ mit $\dot{x}_1 = x + a \dot{\xi}$, $\dot{z}_1 = z + c \dot{\xi}$

$$(53) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \Xi(x_1, z_1) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \dot{\Xi}(\dot{x}_1, \dot{z}_1) \right|, \\ & \left| \frac{\partial}{\partial z_1} \Xi(x_1, z_1) - \frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} \dot{\Xi}(\dot{x}_1, \dot{z}_1) \right| \leq \beta_{11} \bar{O} r, \\ & |\Xi(x_1, z_1) - \dot{\Xi}(\dot{x}_1, \dot{z}_1)| \leq \beta_{12} \bar{O} r^2. \end{aligned}$$

Eine leichte Umrechnung liefert dann

$$(54) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x} (\Xi(x, z) - \dot{\Xi}(\dot{x}, \dot{z})) \right|, \\ & \left| \frac{\partial}{\partial z} (\Xi(x, z) - \dot{\Xi}(\dot{x}, \dot{z})) \right| \leq \beta_{13} (1 + \Omega) \bar{O} r, \\ & |\Xi(x, z) - \dot{\Xi}(\dot{x}, \dot{z})| \leq \beta_{14} (1 + \Omega) \bar{O} r^2. \end{aligned}$$

Alles in allem haben wir

$$(55) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x} (X\{\zeta\} - X\{\dot{\zeta}\}) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z} (X\{\zeta\} - X\{\dot{\zeta}\}) \right| \leq \beta_{15} (\alpha + \alpha \Omega + \Omega) \bar{O} r, \\ & |X\{\zeta\} - X\{\dot{\zeta}\}| \leq \beta_{16} (\alpha + \alpha \Omega + \Omega) \bar{O} r^2. \end{aligned}$$

Die Beziehungen (50) und (55) sichern uns, wie Herr Lichtenstein¹⁷⁾ gezeigt hat, die Existenz der gesuchten Lösung. Hierbei ist es wesentlich, zu bemerken, daß sich die Funktion $\psi(x, 0, z)$ in der Umgebung des Punktes P wie r verhält und $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ dort durchaus beschränkt sind. Dies alles läßt sich leicht nachprüfen.

Wir haben somit die Gleichgewichtsfigur vor uns, deren Existenz bewiesen werden sollte.

¹⁶⁾ Vgl. l. c. 4), S. 318 ff. und l. c. 5), S. 499 ff.

¹⁷⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin, 1931, S. 6 ff.

Über die Stetigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktion bei inkommensurablen Partialschwingungen.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde die Frage aufgeworfen, ob die Verteilungsfunktion einer aus unendlich vielen inkommensurablen Partialschwingungen bestehenden reellwertigen fastperiodischen Funktion stetig ist, wie das auf Grund der Bohr-Jessenschen Untersuchungen über die Riemannsche Zetafunktion zu erwarten wäre. Zur Beantwortung dieser Frage sind a. a. O. zwei verschiedene Wege in Vorschlag gebracht worden, die aber bei näherer Betrachtung sich als ungangbar erweisen²⁾. Im nachstehenden wird nun gezeigt, daß die Behandlung des Stetigkeitsproblems sich höchst einfach gestaltet, wenn man nicht von allgemeinen Theorien, sondern direkt von der a. a. O. bewiesenen statistischen Unabhängigkeit der Partialschwingungen ausgeht.

Wir bezeichnen durch $\sigma(x)$ eine Verteilungsfunktion:

$$0 = \sigma(-\infty) \leq \sigma(x_1) \leq \sigma(x_2) \leq \sigma(+\infty) = 1; \quad -\infty < x_1 < x_2 < +\infty$$

und durch $\omega(\delta) = \omega(\delta; \sigma)$ ihren (für $\delta > 0$ erklärten) sogenannten Stetigkeitsgrad, das ist die untere Grenze (> 0) derjenigen Zahlen α , für welche die Ungleichung

$$|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq \alpha$$

stets eine Folge der Ungleichung

$$|x_1 - x_2| \leq \delta$$

ist. Da eine durchweg stetige Verteilungsfunktion, wie leicht zu sehen, auch gleichmäßig stetig ist, so ist σ dann und nur dann überall stetig,

¹⁾ A. Wintner, Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen. Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 618—629.

²⁾ Der zweite Weg deshalb, weil die Bedingungen für eine konvexe Faltung nur scheinbar erfüllt sind, der erste aber deshalb, weil die Schoenbergsche Methode außer der Kenntnis der Momente *ganzzahliger* Ordnung die explizite Beherrschung eines transzendenten Interpolationsproblems voraussetzt.

wenn der Stetigkeitsgrad bei unbegrenzt abnehmendem δ gegen Null konvergiert. — Es gilt nun der Satz, daß die Stetigkeitsgrade zweier Verteilungsfunktionen durch den statistischen Faltungsprozeß

$$(1) \quad \varrho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(x-y) d\sigma_2(y)$$

nicht verschlechtert werden:

$$(2) \quad \omega(\delta; \varrho) \leq \min(\omega(\delta; \sigma_1), \omega(\delta; \sigma_2)).$$

Daraus folgt nicht nur, daß für die Stetigkeit von ϱ die Stetigkeit auch nur von einer der partiellen Verteilungsfunktionen σ genügt, es folgt vielmehr auch, daß die Stetigkeit sogar bei einer unendlich oftmaligen Wiederholung des Faltungsprozesses nicht verlorengehen kann: Der Faltungsprozeß übt entweder eine glättende Wirkung auf die Verteilungsfunktionen aus oder läßt deren Stetigkeitsgrad schlimmstenfalls unverändert. Eine numerische Illustration dieses allgemeinen Sachverhalts wird durch die Sommerfeldsche Behandlung des Gaußschen Fehlergesetzes geliefert³⁾.

Wegen (1) gilt

$$|\varrho(x_1) - \varrho(x_2)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma_1(x_1 - y) - \sigma_1(x_2 - y)| d\sigma_2(y),$$

also für $|x_1 - x_2| \leq \delta$ wegen

$$|(x_1 - y) - (x_2 - y)| = |x_1 - x_2| \leq \delta$$

offenbar auch

$$|\varrho(x_1) - \varrho(x_2)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\delta; \sigma_1) d\sigma_2(y) = \omega(\delta; \sigma_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma_2(y) = \omega(\delta; \sigma_1),$$

d. h. es gilt

$$\omega(\delta; \varrho) \leq \omega(\delta; \sigma_1),$$

womit (2) bereits bewiesen ist, da (1) bei Vertauschung von σ_1 und σ_2 bekanntlich unverändert bleibt (partielle Integration).

Baltimore, den 15. Januar 1933.

³⁾ A. Sommerfeld, Über die Hauptschnitte eines polydimensionalen Würfels, Bull. Calcutta Math. Soc. 20 (1930), S. 221—226, insbesondere S. 225.

(Eingegangen am 23. Januar 1933.)

On Strong Summability for any positive order.

Von

C. E. Winn in Kairo.

I understand that the notion of strong summability (of order unity) was first put forward by M. Fekete¹⁾ who was led to frame his definition by a result of Hardy and Littlewood "sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable"²⁾. The former defined $\sum u_n$ as strongly summable to a sum s when $\sum_{v=0}^n |s_v - s| = o(n)$, s_v denoting $\sum_{i=0}^v u_i$. Acting on his suggestion, I have extended the scope of strong summability to positive orders in general, according to the definition that follows.

We denote by $S_n^{(r)}$ Cesàro's partial sum of order r , where $r > -1$, and by $A_n^{(r)}$ Cesàro's coefficient namely $\binom{n+r}{n}$. Then writing

$$s_n^{(r)} = S_n^{(r)} / A_n^{(r)}$$

we say that $\sum u_n$ is strongly summable for a positive order k to a sum s — or that $\sum u_n$ converges to s [Ck] — provided that

$$\sum_{v=0}^n |s_v^{(k-1)} - s| = o(n).$$

That ordinary summability does not involve strong summability of the same order is seen from the following example.

Consider $u_n = (-1)^n A_n^{(k)}$ where $k > -1$. Here

$S_n^{(k)} = \sum_{v=0}^n (-1)^v A_{n-v}^{(k)} A_v^{(k)} = \text{coefficient of } x^n \text{ in } (1-x)^{-k-1} (1+x)^{-k-1}$
or $(1-x^2)^{-k-1}$, i. e. $A_{n/2}^{(k)}$ if n is even, or zero if n is odd.

In the former case

$$s_n^{(k)} = A_{n/2}^{(k)} / A_n^{(k)} = \frac{1}{2^k} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

¹⁾ Math. És Termész. Ért. 1916, p. 763 et seq, where the author applies the properties of strongly summable series to the case of Fourier series.

²⁾ Compt. rend., 28 avril 1913.

Moreover

$$S_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^n S_\nu^{(k)} = A_{n/2}^{(k+1)}$$

if n is even, or $A_{\frac{n-1}{2}}^{(k+1)}$ if n is odd. Thus in either case $s_n^{(k+1)}$ tends to $\frac{1}{2^{k+1}}$. Nevertheless $\sum_{\nu=0}^n \left| s_\nu^{(k)} - \frac{1}{2^{k+1}} \right|$ is not of order $o(n)$ so that $\sum u_n$ does not converge $[Ck+1]$, although as we shall see from II it converges $[Ck+2]$.

I note here a connection between strong summability and absolute summability as defined by Fekete³⁾ for positive integral orders, $\sum u_n$ being absolutely summable for order k according to this definition, when $\sum |s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)}|$ converges. The definition can be adopted without change for non-integral and also negative values of k , and it can be readily shewn that absolute summability implies strong summability of the same positive order⁴⁾. I hope to consider some questions on absolute summability of a general order in a subsequent note.

In my present investigations I prove certain properties of strong summability analogous to those of ordinary summability, including two multiplication theorems given by Fekete⁵⁾ for unit order. Later I introduce the notion of strong oscillation — a term chosen on account of certain analogies between it and ordinary oscillation (C). With the above notation we say that $\sum u_n$ oscillates (strongly) $[Ck]$ when

$$\sum_{\nu=0}^n |s_\nu^{(k-1)}| = o(n). \quad (k > 0)$$

It is possible to construct series which oscillate strongly and converge ordinarily (C) for the same order, without converging strongly for this order. Thus consider the series $\sum u_n$ for which

$$s_n = (-1)^n \quad \text{for } 2^{2p} < n \leq 2^{2p+1}, \quad (p = 1, 3, \dots)$$

$$s_n = n^{1/2} \quad \text{for } n = 2^{2p};$$

otherwise

$$s_n = 0.$$

We have $0 \leq S_n^{(1)} \leq n^{1/2}$, so that $s_n^{(1)} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Also

$$\sum_{n=0}^{2^{2p}} |s_n| = \sum_{i=1}^p 2^i + \sum_{i=1}^{p-1} 2^{2i} = 2^{p+1} - 2 + \frac{1}{3}(2^{2p} - 4),$$

³⁾ Math. És Termész. Ért. 1911, p. 719 et seq. Absolute summability was also treated by E. Kogbetliantz in Bull. Darboux 49 (1925).

⁴⁾ Prove by Fekete loc. cit. for the case $k = 1$.

⁵⁾ Math. És Termész. Ért. (a) (1911), p. 722, 1^o; (b) (1916), p. 768, VI. The second theorem is stated by the author without proof.

whilst

$$\sum_{n=0}^{2^{2p+1}} |s_n| = \sum_{i=1}^p 2^i + \sum_{i=1}^p 2^{2i} = 2^{p+1} - 2 + \frac{1}{3}(2^{2p+2} - 4).$$

Thus

$$\frac{1}{2^{2p}} \sum_{n=0}^{2^{2p}} |s_n| \rightarrow \frac{1}{3} \text{ as } p \rightarrow \infty,$$

whilst

$$\frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{n=0}^{2^{2p+1}} |s_n| \rightarrow \frac{2}{3} \text{ as } p \rightarrow \infty.$$

Hence

$$\sum_{r=0}^n |s_r| = O(n) \text{ but } \neq o(n),$$

i. e. $\sum u_n$ oscillates [C 1], whilst converging (C 1), but not [C 1].

We come now to some properties of strong summability.

I. If $\sum u_n$ converges [C k] then it converges (C k) to the same sum s ($k > 0$).

For putting

$$\sigma_n = |s_n^{(k-1)} - s|$$

we have

$$\sum \sigma_n = o(n);$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n A_v^{(k-1)} \sigma_v &= A_n^{(k-1)} \sum_{v=0}^n \sigma_v - \sum_{v=1}^n A_v^{(k-2)} \sum_{\mu=0}^{v-1} \sigma_\mu, \\ &= O(n^{k-1}) \cdot o(n) + \sum_{v=1}^n O(v^{k-2}) \cdot o(v), \\ &= o(n^k). \end{aligned}$$

Therefore

$$\left| \sum_{v=0}^n A_v^{(k-1)} s_v^{(k-1)} - s \sum_{v=0}^n A_v^{(k-1)} \right| = o(n^k),$$

or

$$\left| \sum_{v=0}^n S_v^{(k-1)} - s A_n^{(k)} \right| = o(n^k).$$

Hence

$$\left| \frac{S_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} - s \right| = o(1); \text{ i. e. } s_n^{(k)} \rightarrow s \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

II. If $\sum u_n$ converges (C k-1) then it converges [C k] to the same sum s ($k > 0$).

For we have $\sigma_n = o(1)$, whence $\sum_{r=0}^n \sigma_r = o(n)$.

III. If $\sum u_n$ converges [C k] then it converges [C k + l] to the same sum ($k > 0, l > 0$).

Lemma I. If

$$\sum_{r=1}^n \alpha_r = o(n) \quad (\alpha_r \geq 0)$$

then

$$\sum_{v=1}^n v^p \alpha_v = o(n^{p+1}) \text{ for } p > -1.$$

For we have

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n v^p \alpha_v &= \sum_{v=1}^{n-1} (v^p - \overline{v+1}^p) (\alpha_1 + \cdots + \alpha_v) + n^p (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} O(v^{p-1}) \cdot o(v) + n^p \cdot o(n) \\ &= o(n^{p+1}). \end{aligned}$$

Similarly, if

$$\sum_{v=1}^n \alpha_v = O(n),$$

then

$$\sum_{v=1}^n v^p \alpha_v = O(n^{p+1}) \text{ for } p > -1.$$

Lemma II. If

$$\sum_{\mu=1}^n \alpha_\mu = O(n)$$

and

$$\sum_{v=1}^n \beta_v = o(n) \quad (\alpha_\mu \geq 0, \beta_v \geq 0),$$

then

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n \frac{\mu^p v^q \alpha_\mu \beta_v}{(\mu+v)^{p+q+1}} = o(n) \text{ for } p > -1, q > -1.$$

Since $\frac{\mu^p v^q}{(\mu+v)^{p+q+1}}$ decreases as either p or q increases, it will suffice to establish the result for $p+q < -1$. Then we have

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n \frac{\mu^p v^q \alpha_\mu \beta_v}{(\mu+v)^{p+q+1}} &\leq (2n)^{-1-p-q} \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n \mu^p v^q \alpha_\mu \beta_v \\ &= (2n)^{-1-p-q} \sum_{\mu=1}^n \mu^p \alpha_\mu \sum_{v=1}^n v^q \beta_v \\ &= O(n^{-1-p-q}) \cdot O(n^{1+p}) o(n^{1+q}) \text{ by Lemma I} \\ &= o(n). \end{aligned}$$

Similarly if $\sum_{v=1}^n \beta_v = O(n)$ the above double sum is $O(n)$. Also, putting $\alpha_\mu = 1$, we obtain, when $\sum_{v=1}^n \beta_v = o(n)$ or $O(n)$,

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n \frac{\mu^p v^q \beta_v}{(\mu+v)^{p+q+1}} = o(n) \text{ or } O(n) \text{ respectively.}$$

To prove III we first note that the addition of a constant to the series does not affect its strong summability⁶⁾, so that we may take the sum as zero without loss of generality.

Accordingly

$$\sum_{n=0}^N |s_n^{(k-1)}| = o(N),$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |s_n^{(k+l-1)}| &= \sum_{n=0}^N \left| \frac{s_n^{(k+l-1)}}{A_n^{(k+l-1)}} \right| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{v=0}^n \frac{A_{n-v}^{(l-1)} A_v^{(k-1)} |s_v^{(k-1)}|}{A_n^{(k+l-1)}} \\ &\leq \sum_{\mu=0}^N \sum_{v=0}^N \frac{A_\mu^{(l-1)} A_v^{(k-1)}}{A_{\mu+v}^{(k+l-1)}} |s_v^{(k-1)}| \quad (\mu = n - v) \\ &\leq |s_0^{(k-1)}| + \sum_{v=1}^N \frac{A_v^{(k-1)}}{A_v^{(k+l-1)}} |s_v^{(k-1)}| + \sum_{\mu=1}^N \frac{A_\mu^{(l-1)}}{A_\mu^{(k+l-1)}} |s_0^{(k-1)}| \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^N \sum_{v=1}^N \frac{A_\mu^{(l-1)} A_v^{(k-1)}}{A_{\mu+v}^{(k+l-1)}} |s_v^{(k-1)}| \\ &\leq K_0 + K_1 \sum_{v=1}^N \frac{|s_v^{(k-1)}|}{v^l} + K_2 \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{\mu^k} \\ &\quad + K_3 \sum_{\mu=1}^N \sum_{v=1}^N \frac{\mu^{l-1} v^{k-1}}{(\mu+v)^{k+l-1}} |s_v^{(k-1)}| \\ &= O(1) + o(N) + O(N^{1-\vartheta}) + o(N), \text{ where } 0 < \vartheta < 1 \\ &= o(N) \text{ by Lemma II.} \end{aligned}$$

From II and III follows the analogue of Hardy's theorem⁷⁾, namely:

IV. If $\sum u_n$ converges $[Ck]$ and $u_n = O(1/n)$, then the series converges $[C\delta]$ ($k > \delta > 0$).

For $\sum u_n$ converges (Ck) by I; and since $u_n = O(1/n)$ the series converges $(C\delta - 1)$, and hence $[C\delta]$ by II⁸⁾.

V. If $\sum u_n$ converges to s $[Ck]$ ⁹⁾ and $\sum v_n$ converges to t (Cl) , ($k > 0$, $l \geq 0$) then $\sum w_n \equiv \sum (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0)$ converges to st $(Ck+l)$.

First suppose $s = 0$. We have

$$(1-x)^{-k-l-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(l)} x^n \quad (|x| < 1),$$

where $T_n^{(l)}$ is the partial sum of order l for $\sum v_n$.

⁶⁾ For, if the first term be increased, we know that $s_n^{(k-1)}$, and therefore the sum, is increased by the same amount.

⁷⁾ P. L. M. S. 1912.

⁸⁾ This proof was pointed out to me by Dr. Fekete.

⁹⁾ If $\sum u_n$ converges $(Ck-1)$ this result is immediately deducible from Cesàro's multiplication theorem.

Hence the partial sum of order $k + l$ for the product series is given by the coefficient of x^n , namely

$$P_n^{(k+l)} = \sum_{v=0}^n S_v^{(k-1)} T_{n-v}^{(l)},$$

and since

$$|T_n^{(l)}| < K A_n^{(l)},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} |P_n^{(k+l)}| &< \sum_{v=0}^n A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)} |s_v^{(k-1)}| \\ &\leq \sum_{v=0}^{n-1} |A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} - A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)}| \sum_{i=0}^v |s_i^{(k-1)}| \\ &\quad + A_n^{(k-1)} A_0^{(l)} \sum_{i=0}^n |s_i^{(k-1)}|. \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)} - A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)} &= A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)} - A_v^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} - A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l-1)} \\ &= A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v}^{(l)} \left(1 - \frac{v+1}{v+k}\right) - A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l-1)}. \end{aligned}$$

Hence we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} |P_n^{(k+l)}| &< \sum_{v=0}^{n-1} \left| \frac{k-1}{v+k} A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} - A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l-1)} \right| o(v) \\ &\quad + O(n^{k-1}) \cdot o(n) \\ &\leq \sum_{v=0}^{n-1} \varepsilon_v A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} + \sum_{v=0}^{n-1} \delta_v v A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l-1)} + o(n^k), \end{aligned}$$

where ε_v and δ_v are positive quantities tending to zero as v tends to infinity. Choosing v_0 such that $\varepsilon_v < \varepsilon$ for $v > v_0$ we have

$$\sum_{v=0}^{n-1} \varepsilon_v A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} < \sum_{v=0}^{v_0} \varepsilon_v A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} + \varepsilon \sum_{v=v_0+1}^{n-1} A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)}.$$

For $v \leq v_0$, $\varepsilon_v A_{v+1}^{(k-1)}$ is less than a fixed quantity, while $A_{n-v-1}^{(l)} \leq A_n^{(l)}$; the first sum is therefore $O(n^l)$ and the second sum is less than

$$\varepsilon \sum_{v=-1}^{n-1} A_{v+1}^{(k-1)} A_{n-v-1}^{(l)} = \varepsilon A_n^{(k+l)}.$$

Thus the first member of (1) is $o(n^{k+l})$. Similarly the second member is equal to

$$k \sum_{v=1}^{n-1} \delta_v A_{v-1}^{(k)} A_{n-v}^{(l-1)} = o(n^{k+l}).$$

Hence $P_n^{(k+l)} = o(n^{k+l})$ and $\sum w_n$ converges to zero ($Ck+l$).

Next suppose $s \neq 0$, and put $u'_0 = u_0 - s$ and $u'_n = u_n$ ($n > 0$), so that $\sum u'_n$ converges to zero [Ck]. Then the corresponding product series $\sum w'_n$ converges to zero ($Ck+l$) by the proof above.

Moreover since

$$w'_n = w_n - s v_n, \quad \sum w_n = \sum w'_n + s \sum v_n.$$

But $\sum v_n$ converges to t ($Ck+l$) by the consistency theorem for ordinary summability.

Hence $\sum w_n$ converges to st ($Ck+l$).

In the first part of the above proof we have only used the fact that $T_n^{(l)} = O(n^l)$, which holds when $\sum v_n$ oscillates (Cl). Accordingly when $s = 0$ the result is still valid. When $s \neq 0$ we use the consistency theorem for oscillation in the second part of the proof, obtaining:

V A. If $\sum u_n$ converges [Ck] and $\sum v_n$ oscillates (Cl) then $\sum w_n$ oscillates ($Ck+l$).

Assuming furthermore that absolute summability implies strong summability of like order to the same sum, we obtain the following result:

If $\sum u_n$ converges absolutely (Ck) to s and $\sum v_n$ converges to t — or oscillates (Cl), then $\sum w_n$ converges to st — or oscillates ($Ck+l$)¹⁰.

VI. If $\sum u_n$ converges to s [Ck] and $\sum v_n$ converges to t [Cl]¹¹ then $\sum w_n$ converges to st [$Ck+l$] ($k > 0$, $l > 0$).

Suppose first that $s = 0$. We have

$$(1-x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n (1-x)^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(l-1)} x^n,$$

whence

$$: P_n^{(k+l-1)} = \sum_{v=0}^n S_v^{(k-1)} T_{n-v}^{(l-1)};$$

and

$$p_n^{(k+l-1)} = \frac{P_n^{(k+l-1)}}{A_n^{(k+l-1)}} = \frac{1}{A_n^{(k+l-1)}} \sum_{v=0}^n A_v^{(k-1)} A_{n-v}^{(l-1)} s_v^{(k-1)} t_{n-v}^{(l-1)},$$

where

$$t_{n-v}^{(l-1)} = \frac{T_{n-v}^{(l-1)}}{A_{n-v}^{(l-1)}}.$$

¹⁰ See reference to absolute summability in introduction.

¹¹ If $\sum u_n$ converges ($Ck-1$) and $\sum v_n$ converges ($Cl-1$), this result follows at once from II and Cèsaro's multiplication theorem. This and the note under V are illustrated by the following case: $u_n = (-1)^n A_n^{(k)}$, $v_n = (-1)^n A_n^{(l)}$ giving $w_n = (-1)^n A_n^{(k+l-1)}$. See the first introductory example and the remarks following X B.

Hence

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |p_n^{(k+l-1)}| &\leq \sum_{\mu=0}^N \sum_{\nu=0}^N \frac{A_\nu^{(k-1)} A_\mu^{(l-1)} |s_\nu^{(k-1)}| |t_\mu^{(l-1)}|}{A_{\mu+\nu}^{(k+l-1)}}, \quad (\mu = n - \nu) \\ &\leq |s_0^{(k-1)} t_0^{(l-1)}| + K \sum_{\mu=1}^N \frac{|t_\mu^{(l-1)}|}{\mu^k} + K_1 \sum_{\nu=1}^N \frac{|s_\nu^{(k-1)}|}{\nu^l} \\ &\quad + K_2 \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \frac{\nu^{k-1} \mu^{l-1} |s_\nu^{(k-1)}| |t_\mu^{(l-1)}|}{(\mu + \nu)^{k+l-1}}. \end{aligned}$$

Using lemmas I and II we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |p_n^{(k+l-1)}| &= O(1) + O(N^{1-\vartheta}) + o(N) + o(N), \\ &\quad \text{if } \vartheta \leq k \text{ and } o < \vartheta < 1, \\ &= o(N). \end{aligned}$$

Hence $\sum w_n$ converges to zero $[Ck + l]$.

By an argument parallel to that of V we can prove, using III, that if $s \neq o$, $\sum w_n$ converges to st $[Ck + l]$.

We now obtain three results on strong oscillation $[Ck]$ by the methods of I, II and III, introducing O in place of o in the demonstration and writing $s = o$.

VII. If $\sum u_n$ oscillates $[Ck]$, then it also oscillates $(Ck) \cdot (k > o)$.

VIII. If $\sum u_n$ oscillates $(Ck - 1)$, then it also oscillates $[Ck]$.

IX. If $\sum u_n$ oscillates $[Ck]$, then it also oscillates $[Ck + l] \cdot (l > o)$.

We cannot however deduce from strong oscillation of a given order the strong summability of a higher order, any more than for ordinary summation. In fact Hardy and Wedderburn¹²⁾ proved that if $u_n = (-1)^{n+1}$ when n is of the form $2^p + p - 1$ and otherwise vanishes, then $\sum u_n$ (which is an oscillating series) is summable for no order however great.

Similarly, since $\sum_{\nu=1}^n |s_\nu| \leq n$, this series oscillates $[C1]$, but is strongly summable for no order in virtue of I. In this connection we have the following analogue of Andersen's theorem¹³⁾.

X. If $\sum u_n$ oscillates $[Ck]$ and converges $[Ck + 1]$ then it converges $[Ck + \delta]$ ($k > 0$, $\delta > 0$).

We may suppose $\delta < 1$, as otherwise the result is an immediate consequence of III. And without loss of generality we may suppose that

¹²⁾ Quarterly Journal 1907, p. 276.

¹³⁾ Studier over Cesàro's summabilitetsmetode (Copenhagen 1921), p. 56—59. I have here followed broadly the lines of Andersen's proof.

Σu_n converges to zero sum $[Ck + 1]$. Then it is required to shew that, given $\varepsilon > 0$, we can choose N_0 so that

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |s_n^{(k+\delta-1)}| < \varepsilon \quad \text{for } N > N_0,$$

or what amounts to the same,

$$(1) \quad \frac{1}{N} \sum_{n=4}^N |s_n^{(k+\delta-1)}| < \varepsilon \quad \text{for } N > N_0.$$

The left-hand member is equal to

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=4}^N \frac{1}{A_n^{(k+\delta-1)}} \left| \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(\delta-1)} S_\nu^{(k-1)} \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=4}^N \frac{1}{A_n^{(k+\delta-1)}} \left| \sum_{\nu=0}^m A_\nu^{(\delta-1)} S_{n-\nu}^{(k-1)} \right| \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=4}^N \frac{1}{A_n^{(k+\delta-1)}} \left| \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{n-\nu}^{(\delta-1)} S_\nu^{(k-1)} \right| = \frac{1}{N} (\Sigma_1 + \Sigma_2) \end{aligned}$$

say; here m (which depends on n) is at our future disposal.

First take $k + \delta \geq 1$.

We have

$$\Sigma_1 \leq \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{m}{n-m}}^{\mu + \nu \leq N} \frac{A_\nu^{(\delta-1)} A_\mu^{(k-1)}}{A_{\mu+\nu}^{(k+\delta-1)}} |s_\mu^{(k-1)}|. \quad (\mu = n - \nu)$$

Now

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{m}{n-m}} \frac{A_\nu^{(\delta-1)}}{A_{\mu+\nu}^{(k+\delta-1)}} &< K_1 \left(\frac{m\mu}{n-m} \right)^\delta \mu^{1-k-\delta} \\ &= K_1 \left(\frac{m}{n-m} \right)^\delta \mu^{1-k} \end{aligned}$$

(K_1 depending on k and δ). Therefore

$$\frac{1}{N} \Sigma_1 < \frac{K_2}{N} \text{Max}_{4 \leq n \leq N} \left\{ \left(\frac{m}{n-m} \right)^\delta \right\} \sum_{\mu=1}^N |s_\mu^{(k-1)}| < K_3 \text{Max}_{4 \leq n \leq N} \left\{ \left(\frac{m}{n-m} \right)^\delta \right\},$$

since Σu_n oscillates $[Ck]$.

We choose $m = \left[\frac{\eta n}{1+\eta} \right]$ where $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{3K_3} \right)^{1/\delta}$, so that, for $n \geq 4$,

$$(2) \quad \left(\frac{m}{n-m} \right)^\delta < \frac{\varepsilon}{3K_3} \quad \text{and} \quad \frac{1}{N} \Sigma_1 < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Moreover by decreasing ε , if necessary, we can ensure that $\frac{\eta}{1+\eta} < \frac{1}{2}$.

Next take $k + \delta < 1$.

We have

$$\sum_{0 \leq v \leq \frac{m}{n-m} \mu} \frac{A_v^{(\delta-1)}}{A_{\mu+v}^{(k+\delta-1)}} < K'_1 \left(\frac{m\mu}{n-m} \right)^\delta \left(\frac{n\mu}{n-m} \right)^{1-k-\delta} \\ = K'_1 \left(\frac{m}{n} \right)^\delta \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{k-1} \mu^{1-k}.$$

Hence

$$\frac{1}{N} \Sigma_1 < \frac{K'_2}{N} \text{Max}_{4 \leq n \leq N} \left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^\delta \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{k-1} \right\} \sum_{\mu=1}^N |s_\mu^{(k-1)}| \\ < K'_3 \text{Max}_{4 \leq n \leq N} \left\{ \left(\frac{m}{n} \right)^\delta \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{k-1} \right\}.$$

But, provided that $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, we have

$$\left(\frac{m}{n} \right) \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{\delta}} < \frac{m}{n} \left\{ 1 + \frac{1-k}{\delta} \left(1 - \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{\delta}-1} \right\} \\ < \frac{m}{n} \left(1 + \frac{1-k}{\delta} 2^{\frac{1-k}{\delta}+1} \right) = \lambda \frac{m}{n}, \text{ say.}$$

Accordingly we choose $m = \left[\frac{n}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{3K_3} \right)^{1/\delta} \right]$, where $\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{3K_3} \right)^{1/\delta}$ may be supposed $< \frac{1}{2}$ on our decreasing ε , if necessary. Then in this case also, for $n \geq 4$,

$$(2a) \quad \frac{1}{N} \Sigma_1 < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Meanwhile in both cases, if we take $m \leq n - 3^{14}$,

$$\Sigma_2 = \sum_{n=4}^N \frac{1}{A_n^{(k+\delta-1)}} \left| \sum_{v=0}^{n-m-2} A_{n-v}^{(\delta-2)} S_v^{(k)} + A_{m+1}^{(\delta-1)} S_{n-m-1}^{(k)} \right| \\ \leq \sum_{n=4}^N \frac{A_{m+1}^{(\delta-1)} A_{n-m-1}^{(k)}}{A_n^{(k+\delta-1)}} |s_{n-m-1}^{(k)}| + \sum_{\substack{4 \leq \mu+v \leq N \\ \mu \geq \frac{m+2}{n-m-2}}} \frac{|A_\mu^{(\delta-2)}| |A_v^{(k)}|}{A_{\mu+v}^{(k+\delta-1)}} |s_v^{(k)}| \\ = \Sigma_3 + \Sigma_4, \text{ say.}$$

In Σ_3 the coefficient of $|s_{n-m-1}^{(k)}|$ is of order $\left(\frac{m+1}{n} \right)^{\delta-1} \left(1 - \frac{m+1}{n} \right)^k$, which is less than a finite number depending on ε , if m is again subjected to one of the conditions above, according as $k+\delta \geq 1$ or $k+\delta < 1$. Further, since $m = [\varepsilon_1 n]$, where $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$, it is clear that $n-m-1$ cannot assume the same integral value more than twice. Hence

$$\Sigma_3 < K_4 \sum_{n=4}^N |s_{n-m-1}^{(k)}| \leq 2 K_4 \sum_{n=4}^N |s_n^{(k)}|.$$

¹⁴) Here we see the reason for considering the summation in (1) from $n = 4$.

And, since Σu_n converges $[Ck+1]$ to zero sum, we can find N_1 for which

$$(3) \quad \frac{1}{N} \Sigma_3 < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad \text{when } N > N_1.$$

Finally, as regards Σ_4 , we have, for $\nu > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu \equiv \frac{m+2}{n-m-\nu}}^{N-1} \frac{|A_{\mu}^{(\delta-2)}|}{A_{\mu+\nu}^{(k+\delta-1)}} &< K_5 \left(\frac{m+2}{n-m-2} \nu \right)^{\delta-1} \left(\frac{n\nu}{n-m-2} \right)^{1-k-\delta}, \text{ if } k+\delta \geq 1, \\ &= K_5 \left(\frac{m+2}{n} \right)^{\delta-1} \left(\frac{n-m-2}{n} \right)^k \nu^{-k} < K_6 \nu^{-k}; \end{aligned}$$

and

$$< K_5 \left(\frac{m+2}{n-m-2} \right)^{\delta-1} \nu^{\delta-1} N^{1-k-\delta}, \quad \text{if } k+\delta < 1.$$

For $\nu = 0$ we obtain

$$\sum_{\mu=1}^N \frac{A_{\mu}^{(\delta-2)}}{A_{\mu}^{(k+\delta-1)}} = \sum_{\mu=1}^N O(\mu^{-k-1}) = O(1).$$

Therefore

$$\Sigma_4 = O(1) + K_8 \sum_{\nu=1}^N |s_{\nu}^{(k)}|, \quad \text{if } k+\delta \geq 1,$$

or

$$O(1) + K_9 N^{1-k-\delta} \sum_{\nu=1}^N \nu^{k+\delta-1} |s_{\nu}^{(k)}|, \text{ if } k+\delta < 1.$$

In the former case we can make $\frac{1}{N} \Sigma_4 < \frac{1}{3} \varepsilon$ by taking $N > N_2$, since Σu_n converges $[Ck+1]$ to zero sum, whilst in the latter case, by using Lemma I, we get the same result for $N > N'_2$. Combining with (2) or (2a) and (3) we obtain (1) where N_0 is the greater of N_1 and N_2 or N'_2 .

From the above we can readily deduce the following:

XA. *If Σu_n oscillates $[Ck]$ and converges $[Ck+l]$ then the series converges $[Ck+\delta]$ ($k > 0, l > 0, \delta > 0$).*

We may suppose $\delta < l$, as otherwise the result follows from III.

If $l \leq 1$ the series converges $[Ck+1]$, and we apply X. Otherwise Σu_n oscillates $[Ck+l-1]$ by IX and therefore it converges $[Ck+l-1+\delta]$ by X, if $0 < \delta < 1$. Now, taking $\delta' = 1-\delta < l-1$ we ensure that Σu_n oscillates also $[Ck+l-1-\delta']$ by IX, and therefore converges $[Ck+l-1]$ by X. When $l \leq 2$ this reduces to the first case. Otherwise we repeat the argument so as to obtain convergence $[Ck+l-2]$ etc. until the order reached is $\leq k+1$, when the first case applies.

XB. *If Σu_n oscillates $[Ck]$ and converges $[Ck']$ then the series converges $[Ck+\delta]$ ($k > 0, k' > -1, \delta > 0$).*

For by II Σu_n converges $[Ck'+1]$ and we apply XA.

We note that XA is merely a deduction from Andersen's theorem, if Σu_n oscillates $(Ck - 1)$ and converges $(Ck + l - 1)$, as then the series is convergent $(Ck + \delta - 1)$. This is so in the first introductory example where Σu_n oscillates (Ck) and converges $(Ck + 1)$, while its convergence $[Ck + \delta + 1]$ is inferred from its convergence $(Ck + \delta)$. In the second example however Σu_n oscillates $[C1]$ but not $(C0)$, while it converges $(C1)$. We thus require XB to establish its convergence $[C_1 + \delta]$.

The counterpart of IV for oscillation $[Ck]$, depending on a similar result for oscillation $(Ck)^{15}$, is as follows:

XI. If Σu_n oscillates $[Ck]$, and $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, then the series oscillates $[C\delta]$ ($k > \delta > 0$).

Corresponding to V and VI we obtain the following results for strong oscillation, introducing O in place of o in the demonstration:

XII. If Σu_n oscillates $[Ck]$ and Σv_n converges or oscillates (Cl) then Σw_n oscillates $(Ck + l)$.

XIII. If Σu_n oscillates $[Ck]$ and Σv_n converges or oscillates $[Cl]$ then Σw_n oscillates $[Ck + l]$.

¹⁵⁾ The latter depends on the relation

$$s_n^{(k)} - s_n^{(k-1)} = \frac{1}{k A_n^{(k)}} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{(k-1)} v u_v = O(1); \quad (k > 0)$$

see Hardy P. L. M. S. vol. VIII, 2nd series, p. 304.

(Eingegangen am 4. Februar 1932.)

Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.

Von

Julius v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

Unter einer *Kurve* verstehen wir hier eine geschlossene ebene Elementarkurve, die keine geraden Stücke und keine Winkelpunkte hat. Diese Kurve ist aus einer endlichen Anzahl von konvexen Bögen zusammengesetzt. Die Klasse bzw. der Klassenindex der Kurve ist die größte bzw. kleinste Anzahl von Tangenten, die aus einem Punkte der Ebene an die Kurve gezogen werden können. Dementsprechend definiert man die Ordnung bzw. den Index der Kurve.

Eine Kurve n -ter Klasse ist vom Maximalklassenindex, wenn sie den Klassenindex $n - 2$ hat.

Bilden die Punkte der Ebene, aus denen nur $n - 2$ Tangenten an die Kurve C n -ter Klasse vom Maximalklassenindex gezogen werden können, k zusammenhängende Gebiete $T_1, T_2, \dots, T_k$ mit den Zusammenhängen $p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_k + 1$, so definiert man das Geschlecht der Kurve C durch die Gleichung

$$(1) \quad p = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1.$$

Ist $k = 1$, so ist die Kurve irreduzibel. Ist aber $k > 1$, so zerfällt sie in k irreduzible Kurven $C_1, C_2, \dots, C_k$. Die Kurve C_h ($h = 1, 2, \dots, k$) besteht aus den Zügen der Kurve C , von denen das Gebiet T_h begrenzt wird¹⁾.

¹⁾ J. v. Sz. Nagy, Über Kurven vom Maximalklassenindex. Über Kurven vom Maximalindex, Math. Ann. 89 (1923), S. 32—75; 90 (1924), S. 152—153. Diese Arbeit wird im folgenden unter A zitiert werden.

Bezeichnet m die Ordnung der Kurve C , r die Anzahl der Spitzen erster Art, t bzw. w die Anzahl der Doppeltangenten bzw. der Wendetangenten ($w = 0$ oder 1), so bestehen die Relationen ²⁾

$$r = n - 2 + 2p, \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - w,$$

$$(2) \quad m \leq M = 2n - 2 + 2p - w = n + r - w = n(n-1) - 2t - 3w.$$

Wir haben schon gezeigt, daß es Kurven n -ter Klasse M -ter Ordnung vom Maximalklassenindex gibt ³⁾. Jetzt wollen wir beweisen, daß M die Maximalordnung der Kurven n -ter Klasse m -ter Ordnung vom Maximalindex ist.

Die Annahme, daß die von uns betrachteten Kurven (der projektiven Ebene) vom Maximalklassenindex Elementarkurven sind, d. h. daß sie aus endlich vielen konvexen Bögen darstellbar sind, ist unwesentlich. Jede Kurve vom Maximalindex ist nämlich eine Elementarkurve ⁴⁾. Ähnlicherweise ist jede Kurve vom Maximalklassenindex, die keine Winkelpunkte und keine Strecke hat, eine Elementarkurve, weil ihre Duale eine Elementarkurve vom Maximalindex ist.

Die von uns betrachteten Kurven vom Maximalklassenindex sind im allgemeinen keine algebraischen Kurven. Doch stimmen die Relationen (2) mit den Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen der ebenen reellen algebraischen Kurven n -ter Klasse, m -ter Ordnung, vom Geschlecht p überein, wenn sie nur einfache Singularitäten und keine isolierte Singularitäten haben.

Die erste Gleichung von (2) ist im wesentlichen die Kleinsche Relation zwischen den Singularitäten der reellen algebraischen Kurven ohne isolierte Singularitäten. Die zweite Gleichung ist die bekannte Clebschsche Gleichung für das Geschlecht der Kurven. Die Ungleichung von (2) drückt aus, daß die Realitätsordnung m einer algebraischen Kurve n -ter Klasse höchstens der algebraischen Ordnung M gleich ist. Diese algebraische Ordnung M ist durch eine der Plückerschen Formeln bestimmt.

Entsprechende Relationen bestehen auch für die Kurven vom Maximalindex.

²⁾ J. v. Sz. Nagy, Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximalklassenindex, Math. Ann. **100** (1928), S. 164–178; Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Ann. **100** (1928), S. 179–187; Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Zeitschr. **35** (1931), S. 80–92. Diese drei Arbeiten werden im folgenden unter B, C bzw. D zitiert werden. Vgl. auch die in der Fußnote ³⁾ der Arbeit D angedeuteten ungarischen Arbeiten des Verfassers.

³⁾ Arbeit D.

⁴⁾ O. Haupt, Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., München, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1925, S. 6–7.

2. Über die Gebietseinteilung der Kugel durch gewisse sphärische Kurven.

Für den Beweis der Ungleichung von (2) benötigen wir einige topologische Sätze über gewisse sphärische Kurven.

Es sei Γ_1 (bzw. Γ_2) eine einzügige geschlossene Kurve auf der Kugel K , die im Punkte 0 einen $2\mu_1$ -fachen (bzw. $2\mu_2$ -fachen) Punkt mit verschiedenen Tangenten hat und die sich außerhalb des Punktes 0 nicht schneidet. Wir nehmen noch an, daß die Kurven Γ_1 und Γ_2 einander außerhalb von 0 nicht schneiden, in 0 verschiedene Tangenten haben und von jedem Hauptkreise der Kugel in endlicher Anzahl von Punkten getroffen werden.

Der Punkt 0 zerteilt die Kurve Γ_1 (bzw. Γ_2) in $2\mu_1$ (bzw. $2\mu_2$) einfach geschlossene Kurven, Schleifen. Diese $2\mu_1 + 2\mu_2$ Schleifen zerteilen die Kugel in $2\mu_1 + 2\mu_2 + 1$ Gebiete, die sich durch zwei Farben α und β so färben lassen, daß je zwei benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.

Die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Kurven Γ_1 und Γ_2 mit einem Hauptkreise der Kugel ist nämlich gerade. (Die Kurve K wird von einem Hauptkreise in zwei Halbkugeln K_1 und K_2 geteilt. Die Kurve Γ_1 oder Γ_2 kehrt so oft von K_2 in K_1 zurück, so oft sie von K_1 in K_2 geht.) Die gemeinsamen Punkte eines Hauptkreises mit den Kurven Γ_1 und Γ_2 bestimmen eine gerade Anzahl von Strecken. Diese Strecken lassen sich also durch zwei Farben so färben, daß benachbarte Strecken von verschiedener Farbe seien. Läßt man einen so gefärbten Hauptkreis um einen seiner Diameter umdrehen, so färben die mit der Farbe α bzw. β gefärbten Strecken die Gebiete der Kugel mit entsprechenden Farben.

Die Randbögen je eines der $2\mu_1 + 2\mu_2 + 1$ Gebiete sind entweder alle Schleifen der einer Kurve Γ_1 oder Γ_2 , oder gehören teils der Kurve Γ_1 und teils der Kurve Γ_2 an.

Hat ein Gebiet, dessen Randbögen alle auf einer der Kurven Γ_1 und Γ_2 liegen, die Farbe α , so bekommt jedes Gebiet, das nur zu der einen Kurve gehörige Randbögen hat, wieder die Farbe α . Jene Gebiete aber, die auf beiden Kurven Γ_1 und Γ_2 wenigstens je einen Randbogen haben, sind alle von der anderen Farbe β .

Zum Beweis dieser Behauptung projizieren wir die Kugel K vom Punkte 0 aus auf die Ebene ε , von der die Kugel im Gegenpunkte von 0 berührt wird. Die Projektionen der Kurven Γ_1 und Γ_2 sind ebene Kurven C_1 und C_2 , die keinen mehrfachen Punkt und keinen Schnittpunkt haben. Diese ebenen Kurven C_1 und C_2 sind paar, weil sie von der unendlich fernen Geraden der projektiven Ebene ε in $2\mu_1$ bzw. $2\mu_2$ Punkten geschnitten werden. Die paaren Kurven C_1 und C_2 zerteilen

also die Ebene ε in drei Gebiete. Färbt man das von beiden Kurven C_1 und C_2 berandete ebene Gebiet mit der Farbe β , so können wir die anderen zwei Gebiete mit der Farbe α färben. Daraus folgt unsere Behauptung, weil die entsprechenden Punkte der Kugel K und der Ebene ε in Gebieten derselben Farben liegen.

Bezeichnet ξ' bzw. η' die Anzahl der Gebiete der Kugel von der Farbe α bzw. β , so besteht offenbar die Gleichung

$$\xi' + \eta' = 2\mu_1 + 2\mu_2 + 1.$$

Zur Bestimmung der Zahlenwerte von ξ' und η' wenden wir in einem β -farbigen Gebiete T der Kugel einen Querschnitt q an, von dem ein Punkt P_1 der Kurve Γ_1 mit einem Punkte P_2 von Γ_2 verbunden wird. Dieser Querschnitt q zerteilt das (einfach zusammenhängende) Gebiet T in zwei Gebiete und verbindet in ein α -farbiges Gebiet jene zwei Gebiete, die mit T an den Schleifen benachbart sind, wo der Punkt P_1 bzw. P_2 liegt. Ist nun ξ bzw. η die Anzahl der α -farbigen bzw. β -farbigen Gebiete der Kugel nach der Anwendung des Querschnittes q , so bestehen die Gleichungen

$$(3) \quad \xi = \xi' - 1 \quad \text{und} \quad \eta = \eta' + 1.$$

Nach entsprechender Deformation der zwei Ufer des Querschnittes q vereinigen sich die Kurven Γ_1 und Γ_2 in eine einzügige Kurve Γ , die im Punkte 0 einen $2\mu = 2\mu_1 + 2\mu_2$ -fachen Punkt mit verschiedenen Tangenten besitzt und außerhalb von 0 keinen mehrfachen Punkt hat. Die Kurve Γ besteht aus 2μ Schleifen.

Ist $2\mu = 2$, so ist offenbar $\xi = 2$ und $\eta = 1$, oder $\xi = 1$ und $\eta = 2$. Wir werden beweisen, daß die Differenz $\xi - \eta$ auch im Falle $2\mu > 2$ entweder $+1$ oder -1 ist.

Die 2μ Schleifen der Kurve zerteilen die Kugelfläche in $2\mu + 1$ Gebiete. Es gibt offenbar unter diesen Gebieten wenigstens ein Gebiet G , dessen Grenze aus einer einzigen Schleife S der Kurve Γ besteht. Ist G' jenes mit G nicht benachbarte Gebiet, dessen Grenze die auf Γ mit S benachbarten zwei Schleifen S_1 und S_2 enthält, so haben die Gebiete G und G' dieselben Farben. (Die Schleifen S_1 und S_2 können nur dann zusammenfallen, wenn $2\mu = 2$ ist.) Von dem Gebiete G ausgehend, gelangt man nämlich um den 2μ -fachen Punkt 0 nach einer geraden Anzahl (2μ) von Überschreitungen der Schleifen in das Gebiet G' .

Wir bezeichnen mit P_1 bzw. P_2 einen Punkt der Schleife S_1 bzw. S_2 und verbinden diese Punkte im Gebiete G' durch einen einfachen Bogen γ . Ersetzen wir die offene Kurve P_1OP_2 , die aus den Stücken P_1O und P_2O der Schleife S_1 bzw. S_2 und aus der Schleife S besteht, durch den Bogen γ , so erhalten wir aus der Kurve Γ eine neue geschlossene Kurve Γ'' , die im Punkte 0 nur einen $2\mu - 2$ -fachen Punkt hat.

Dieses Verfahren, das im folgenden kurz eine Brücke genannt wird, verkleinert die Anzahl der α - und β -farbigen Gebiete um je Eins. Statt der gleichfarbigen Gebiete G und G' tritt nur ein Gebiet derselben Farbe auf, das ein Teilgebiet von G' ist. Die Brücke vereinigt die Gebiete G_1 und G_2 , die mit G' an den Randschleifen S_1 und S_2 benachbart sind, in ein Gebiet, dessen Farbe von der Farbe des Gebietes G' abweicht. Dieses Gebiet enthält auch das andere Teilgebiet von G' . Das Gebiet G vergrößert das benachbarte Gebiet G'' . Man sieht unschwer ein, daß die Gebiete G_1 und G_2 im Falle $2\mu > 2$ nicht zusammenfallen können. Außer den Gebieten G , G' , G'' , G_1 und G_2 werden die übrigen Gebiete der Kugelfläche durch die Brücke nicht verändert.

Ist $2\mu - 2 > 2$, so kann man auch auf die Kurve Γ' eine Brücke anwenden. Durch $\mu - 1$ Brücken geht die Kurve Γ in eine Kurve $\Gamma^{(\mu-1)}$ über, die im Punkte 0 einen Doppelpunkt hat. Die Differenz $\xi - \eta$ zwischen den Anzahlen der α - und β -farbigen Gebiete wird von keiner Brücke verändert, sie ist also $+1$ oder -1 .

Aus der Gleichung $\xi + \eta = 2\mu + 1$ folgt, daß entweder

$$(4_1) \quad \xi = \mu + 1 \quad \text{und} \quad \eta = \mu,$$

oder

$$(4_2) \quad \xi = \mu \quad \text{und} \quad \eta = \mu + 1$$

sind.

Für die Zahlen ξ' und η' bestehen die Gleichungen

$$\xi' = \xi + 1 \quad \text{und} \quad \eta' = \eta - 1,$$

wenn ein Gebiet der Kugelfläche, dessen Randschleifen alle zu einer der Kurven Γ_1 und Γ_2 gehören, die Farbe α hat. In diesem Falle sind also entweder

$$(5_1) \quad \xi' = \mu + 2 = \mu_1 + \mu_2 + 2 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu - 1 = \mu_1 + \mu_2 - 1,$$

oder

$$(5_2) \quad \xi' = \mu + 1 = \mu_1 + \mu_2 + 1 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Hat aber ein Gebiet der Kugelfläche, dessen Rand wenigstens je eine Schleife der Kurven Γ_1 und Γ_2 enthält, die Farbe α , so wendet man den Querschnitt in einem α -farbigen Gebiete an. Dann bestehen die Gleichungen

$$\xi' = \xi - 1 \quad \text{und} \quad \eta' = \eta + 1.$$

In diesem Falle sind also entweder

$$(6_1) \quad \xi' = \mu = \mu_1 + \mu_2 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu + 1 = \mu_1 + \mu_2 + 1,$$

oder

$$(6_2) \quad \xi' = \mu - 1 = \mu_1 + \mu_2 - 1 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu + 2 = \mu_1 + \mu_2 + 2.$$

3. Über die Färbung der Kurve Γ und des Kurvenpaares Γ_1 und Γ_2 .

Die Kugelfläche wird von den 2μ Schleifen der Kurve Γ bzw. der Kurven Γ_1 und Γ_2 in $2\mu + 1$ bzw. in $2\mu + 1 = 2\mu_1 + 2\mu_2 + 1$ Gebiete geteilt, von denen je zwei (längs einer Randschleife) benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben. Wird ein α -farbiges Gebiet als *Fundamentalgebiet* gewählt, so lassen sich die 2μ Schleifen der Kurve mit den Farben α und β auf folgende Weise färben.

Die Randschleifen des Fundamentalgebietes werden alle mit der Farbe α gefärbt. Den übrigen Randschleifen der β -farbigen Gebiete, die dem Fundamentalgebiete (längs der α -farbigen Randschleifen des Fundamentalgebietes) benachbart sind, wird die Farbe β zugeordnet. Diese β -farbigen Schleifen gehören auch dem Rande α -farbiger Gebiete an, deren übrige Randschleifen mit der Farbe β gefärbt werden.

Setzt man dieses Verfahren fort, so bekommt jede Schleife eine eindeutig bestimmte Farbe.

Bedeutet x bzw. y die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Schleifen der Kurve Γ und haben x' und y' entsprechende Bedeutungen für das Kurvenpaar Γ_1, Γ_2 , so bestehen die Gleichungen

$$(7) \quad x = \eta \quad \text{und} \quad y = \xi - 1 \quad \text{bzw.} \quad x' = \eta' \quad \text{und} \quad y' = \xi' - 1.$$

Mit Ausnahme des Fundamentalgebietes hat nämlich jedes Gebiet eine einzige Randschleife, deren Farbe von seiner Farbe abweicht, und jede Schleife gehört dem Rande eines Gebietes an, dessen Farbe von ihrer Farbe verschieden ist.

Auf Grund der Gleichungen (4_1) , (4_2) , (5_1) , (5_2) , (6_1) bzw. (6_2) bestehen also die entsprechenden Gleichungen

$(4'_1)$	$x = \mu$	und	$y = \mu,$
$(4'_2)$	$x = \mu + 1$	„	$y = \mu - 1,$
$(5'_1)$	$x' = \mu_1 + \mu_2 - 1$	„	$y' = \mu_1 + \mu_2 + 1,$
$(5'_2)$	$x' = \mu_1 + \mu_2$	„	$y' = \mu_1 + \mu_2,$
$(6'_1)$	$x' = \mu_1 + \mu_2 + 1$	„	$y' = \mu_1 + \mu_2 - 1,$
$(6'_2)$	$x' = \mu_1 + \mu_2 + 2$	„	$y' = \mu_1 + \mu_2 - 2.$

4. Geschlossene Kurven in den gleichfarbigen Gebieten der Kugelfläche.

Wir betrachten die $2\mu + 1$ Gebiete, in welche die Kugelfläche von der Kurve Γ geteilt wird. Unter diesen Gebieten haben μ Gebiete die eine Farbe, die übrigen $\mu + 1$ aber die andere Farbe. Die Gesamtheit der α - bzw. β -farbigen Gebiete wird im folgenden Bereich B_α bzw. B_β genannt werden.

Eine geschlossene Kurve K_α liegt in B_α , wenn sie außerhalb von 0 keine Punkte im Innern oder am Rande der β -farbigen Gebiete hat. Der Punkt 0 ist im allgemeinen Falle ein mehrfacher Punkt der Kurve K_α . Die Kurve K_α kann auch andere mehrfache Punkte haben. Entsprechend definiert man die geschlossenen Kurven K_β im Bereich B_β .

Eine Kurve K_α oder K_β wird *in bezug auf 0 unpaar* oder kurz *unpaar* genannt werden, wenn sie in 0 eine ungerade Multiplizität hat. Im anderen Falle ist sie (in bezug auf 0) *paar*.

Besteht B_α aus μ (und nicht aus $\mu + 1$) Gebieten, so können wir beweisen, daß es im B_α auch unpaare Kurven K_α gibt und daß die geschlossenen Kurven K_β (in B_β) alle paar sind.

Für den Beweis nehmen wir an, daß die Kurve $\bar{K}_\alpha$ unpaar ist. Es seien $G, G', G'', \dots$ die α -farbigen Gebiete von B_α . Wir nehmen für den allgemeinen Beweis an, daß das Gebiet G von einer einzigen Schleife begrenzt wird, und daß man von G ausgehend in G' gelangt, wenn man den Punkt 0 hindurchschreitet.

Wir wenden auf die Kurve Γ im Gebiete G' eine Brücke γ an, wie im zweiten Paragraphen. Der einfache Bogen γ teilt das Gebiet G' in zwei Teilgebiete. Das in 0 mit G zusammenhängende Teilgebiet von G' sei G'_0 genannt.

Es ist klar, daß jede in den Gebieten G und G'_0 liegende geschlossene Kurve K_α (in bezug auf 0) paar ist. Ähnlicherweise kann man leicht einsehen, daß die Multiplizität, die eine in den Gebieten G und G'_0 liegende offene Kurve in 0 hat, wenn ihre beiden Endpunkte auf γ liegen, eine gerade Zahl ist.

Hat die unpaare Kurve $\bar{K}_\alpha$ in den Gebieten G und G'_0 liegende Bögen, so ziehen wir sie in B_α durch den Bogen γ hinaus. Durch diese Deformation geht die Kurve $\bar{K}_\alpha$ in eine geschlossene Kurve $\bar{K}'_\alpha$ über, die (in bezug auf 0) wieder unpaar ist.

Die Brücke γ führt die Kurve Γ in eine Kurve Γ' , den Bereich B_α in B'_α über. Dieser Bereich von B'_α ist ein Teil von B_α , weil die Gebiete von B_α und B'_α — ausgenommen die Gebiete G und G'_0 , die aus B'_α fehlen — zusammenfallen. Die Anzahl derjenigen Gebiete, deren Ränder von je einer Schleife bestehen, ist für B'_α um eins weniger als diejenige für B_α .

Die Kurve $\bar{K}'_\alpha$ ist nicht nur in B_α , sondern auch in B'_α unpaar. Ist ξ_1 bzw. η_1 die Anzahl der Gebiete in B'_α bzw. B'_β , so ist $\xi_1 - \eta_1 = \xi - \eta$, (wie es im zweiten Paragraphen gezeigt wurde).

Enthält auch der Bereich B'_α wenigstens ein Gebiet, dessen Grenze aus einer einzigen Schleife der Kurve Γ' besteht, so läßt sich das vorige Verfahren fortsetzen. So können wir aus B_α endlich einen noch unpaare

Kurven enthaltenden Teilbereich $B_\alpha^{(k)}$ erhalten, von dem jedes Gebiet von mehreren Schleifen der entsprechenden Kurve $\Gamma^{(k)}$ begrenzt wird. Bezeichnet ξ_k bzw. η_k die Anzahl der Gebiete von $B_\alpha^{(k)}$ bzw. $B_\beta^{(k)}$, so ist $\xi_k - \eta_k = \xi - \eta$.

Wir wählen ein α -farbiges Gebiet von $B_\alpha^{(k)}$ als Fundamentalgebiet und färben die Schleifen der Kurve $\Gamma^{(k)}$ so, wie im vorigen Paragraphen gesagt wurde. Bezeichnet x_k bzw. y_k die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Schleifen von $\Gamma^{(k)}$, so sind

$$x_k = \eta_k, \quad y_k = \xi_k - 1 \quad \text{und} \quad x_k - y_k = \eta_k - \xi_k + 1 = \eta - \xi + 1.$$

Das Fundamentalgebiet hat nur α -farbige Randschleifen, die übrigen α -farbigen Gebiete haben je eine β -farbige Randschleife, sie haben aber wenigstens je eine α -farbige Randschleife, weil ihre Ränder wenigstens zwei Schleifen enthalten. Daraus folgt die Ungleichung $x_k - y_k > 0$. Auf Grund der Gleichungen (4₁') und (4₂') bzw. (4₁) und (4₂) besteht also die Gleichung

$$\eta - \xi + 1 = x_k - y_k = 2$$

bzw. die Gleichung

$$\xi = \eta - 1 = \mu.$$

Damit haben wir bewiesen, daß es im Bereiche B_α (in bezug auf 0) unpaare Kurven nur dann geben kann, wenn B_α nur aus μ Gebieten besteht.

5. Über die einzügigen paaren Kurven vom Maximalklassenindex.

Ist C eine einzügige paare Kurve (ohne Wendepunkt) n -ter Klasse m -ter Ordnung vom Maximalklassenindex, so können wir annehmen, daß sie von einer Geraden g in $m = 2\mu$ voneinander verschiedenen Punkten geschnitten wird.

Gäbe es nämlich auf jeder Geraden g , von der die Kurve in m Punkten getroffen wird, zusammenfallende Schnittpunkte, so könnte man die Kurve C durch geeignete stetige Deformationen⁵⁾, von denen die Klasse, der Klassenindex und die Ordnung (sowie das Geschlecht, die Anzahl der Spitzen und diejenige der Doppeltangenten) nicht verändert werden, in eine Kurve C' überführen, die von der Geraden g in $m = 2\mu$ verschiedenen Punkten getroffen wird⁶⁾. Wir nehmen noch an, daß die Gerade g mit der unendlichfernen Geraden zusammenfällt. Die Spitzen der Kurve C liegen also alle im Endlichen.

⁵⁾ Diese Deformationen wurden von uns in der Arbeit B (S. 165—166) definiert und Deformationen α und β genannt.

⁶⁾ Wäre nämlich die Kurve C in dem gewöhnlichen Punkte P von der Geraden g berührt, so könnte man den genug kleinen konvexen Bogen, Elementarbogen der Kurve, der den Punkt P in sich enthält, durch Deformationen α so

Ist K eine Kugel, von der die Ebene ε der Kurve C berührt wird, und ist O der Gegenpunkt des Berührungspunktes, so erhalten wir durch stereographische Projektion vom Punkte O aus auf der Kugel eine Kurve Γ . Die Kurve Γ hat nämlich im Punkte O einen $m = 2\mu$ -fachen Punkt mit verschiedenen Tangenten und schneidet sich außerhalb von O nicht. Es ist leicht einzusehen, daß es möglich ist, auf der Kugel um den Mittelpunkt O mit einem genug kleinen sphärischen Halbmesser einen Kreis κ zu beschreiben, so daß die Kurve Γ von κ und von jedem konzentrischen kleineren Kreise der Kugel in $2m$ verschiedenen Punkten getroffen werde.

Daraus folgt, daß man in der Ebene ε einen Kreis k so beschreiben kann, daß die Kurve C von k und von jedem konzentrischen größeren Kreise der Ebene in $2m$ verschiedenen Punkten getroffen wird. Die Spitzen von C liegen also alle im Innern des Kreises. Die Kurve kann von k und von den konzentrischen größeren Kreisen nicht berührt werden.

Die Ebene wird von der Kurve C vom Maximalklassenindex in zwei Gebiete geteilt. Aus den Punkten des einen Gebietes kann man die konvexe Seite der Elementarbögen der Kurve erreichen, aus den Punkten des anderen Gebietes die konkave Seite. Daraus folgt, daß die in den Kreis k fallenden m Bögen $b_1, b_2, \dots, b_m$ der Kurve C den Kreis k in $m+1$ einfach geschlossene Gebiete zerteilen, so daß man aus den Punkten je eines Gebietes entweder die konvexe Seite oder die konkave Seite der Bögen b_i erreichen kann, die am Rande des betreffenden Gebietes liegen.

Die Bögen $b_1, b_2, \dots, b_m$ haben, wie die Kurve C , außer Spitzen erster Art und außer Doppeltangenten keine andere Punkt- oder Tangentensingularität. Wir werden beweisen, daß ein Bogen b_i , der keine Spitze hat, ein Elementarbogen ist.

ausdehnen, daß die so erhaltene Kurve C' von der Geraden g in der Nähe von P in zwei verschiedenen Punkten getroffen würde.

Wäre der Punkt P der Geraden g ein Selbstberührungspunkt der Kurve, so könnte man die in P sich berührenden konvexen Bögen der Kurve voneinander abtrennen, indem man die in P zusammenfallenden Schnittpunkte oder Berührungspunkte der zwei Elementarbögen mit der Geraden g (je nachdem die Elementarbögen von g in P geschnitten oder berührt werden) durch Deformationen α an der Geraden g in entgegengesetzten Richtungen verschiebt.

Wäre der Punkt P der Geraden g eine Spitze der Kurve, so wäre er ein doppelter oder ein dreifacher Schnittpunkt der Geraden, je nachdem die Kurve C in P von g nicht berührt bzw. berührt wird. In beiden Fällen kann man auf die zwei genug kleinen Elementarbögen, von denen in P die Spitze gebildet wird, geeignete Deformationen β anwenden, wodurch die in P zusammenfallenden Schnittpunkte an der Geraden g voneinander getrennt werden. Nach diesen Deformationen weicht die Spitzentangente von der Geraden g natürlich ab.

A. Kneser⁷⁾ hat bewiesen, daß ein Bogen ohne Punkt singularität ein Elementarbogen oder eine Möbiussche Spirale bzw. eine Möbiussche Doppelspirale ist, je nachdem er keine Doppeltangente bzw. wenigstens eine Doppeltangente hat. Wird ein Endpunkt dieser Bögen ein äußerer bzw. innerer Endpunkt genannt, wenn seine Endtangente außerhalb des betreffenden Endpunktes mit dem Bogen keinen gemeinsamen Punkt bzw. wenigstens noch einen gemeinsamen Punkt hat, so hat ein Elementarbogen zwei äußere Endpunkte. Eine Spirale hat einen äußeren und einen inneren Endpunkt, eine Doppelspirale hat zwei innere Endpunkte. Jede Doppelspirale läßt sich in zwei einfache Spiralen zerschneiden.

Für den Beweis des Satzes, daß der Bogen b_i ohne Spitze ein Elementarbogen ist, müssen wir zeigen, daß seine (am Rande von k liegenden) Endpunkte P_i und Q_i äußere Endpunkte sind.

Ist p_i die Endtangente von b_i im Punkte P_i , so geht der Bogen b_i vom Punkte P_i in der Richtung des in k hineingehenden Halbstrahles der Tangente p_i aus. Wäre also P_i ein innerer Endpunkt, so würde der Bogen b_i von p_i geschnitten und fiele der erste Schnittpunkt, wenn man diesen Punkt an dem Bogen b_i von P_i ab zählt, auf den anderen Halbstrahl von p_i . Dies ist aber unmöglich, weil der Bogen b_i außerhalb des Kreises k keinen Punkt hat. Aus ähnlichem Grunde ist auch Q_i kein innerer Endpunkt. Der Bogen b_i ist also ein Elementarbogen.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Wenn man aus den Punkten des Gebietes, das im Kreise k von den Bögen b_i und b_h begrenzt wird, die Bögen b_i und b_h an ihrer konkaven Seite erreichen kann, so hat wenigstens einer der Bögen Spitze.

Hätte nämlich keiner der Bögen b_i und b_h eine Spitze, so wären beide Elementarbögen. Wir werden zeigen, daß dies unmöglich ist.

Wir bezeichnen die Endpunkte des Bogens b_i bzw. b_h mit P_i und Q_i bzw. P_h und Q_h . Wir nehmen aber an, daß $P_i P_h Q_h Q_i$ eine Aufeinanderfolge der vier Punkte am Kreise ist. Diese Annahme ist erlaubt, weil die Punktpaare $P_i Q_i$ und $P_h Q_h$ am Kreise k einander nicht trennen. In dieser Bezeichnung liegt der Schnittpunkt R der Geraden $P_i Q_i$ und $P_h Q_h$ außerhalb von k .

Ist der Kreisbogen $\widehat{P_i P_h}$ kleiner als $\widehat{Q_i Q_h}$, so liegt der Punkt R im Endlichen und die Strecken $R P_i$, $R P_h$ und der Kreisbogen $\widehat{P_i P_h}$ begrenzen ein endliches Gebiet $\bar{G}$. Sind die Kreisbögen $\widehat{P_i P_h}$ und $\widehat{Q_i Q_h}$ gleich, so ist das Gebiet $\bar{G}$ ein Teil eines parallelen Streifens.

Sind p_i und p_h die Endtangente von b_i bzw. b_h im Punkte P_i bzw. P_h , so schneiden sie einander in einem in $\bar{G}$ liegenden Punkte P

⁷⁾ A. Kneser, Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, Math. Ann. 41 (1893), S. 349–376. Vgl. § 6, 8, 9 und 11.

und bilden samt dem Kreisbogen $\widehat{P_i P_h}$ (der nicht größer als der Kreisbogen $\widehat{Q_i Q_h}$ ist) ein dreieckiges endliches Gebiet $\bar{G}_0$.

Wir bezeichnen den von P_i bzw. P_h ausgehenden und außerhalb von k liegenden Bogen der Kurve C , dessen anderer Endpunkt am Kreise k der Punkt R_i bzw. R_h ist, mit γ_i bzw. γ_h . (Es ist nicht ausgeschlossen, daß die Bögen γ_i und γ_h zusammenfallen.)

Der Bogen γ_i geht im Punkte P_i in das Gebiet $\bar{G}_0$ hinein. Er muß aber von dort an einer der endlichen Strecken PP_i und PP_h austreten. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich einen mit k konzentrischen größeren Kreis, von dem der singularitätenfreie Bogen γ_i nicht getroffen würde. Es gäbe also auch einen mit k konzentrischen größeren Kreis, von dem der Bogen γ_i berührt würde, was unmöglich ist.

Der Bogen γ_i kann nur Doppeltangenten-Singularitäten haben, er ist also entweder Elementarbogen, oder Spirale, oder Doppelspirale. Er kann aber in keinem Falle die Strecke PP_i schneiden. Ist γ_i ein Elementarbogen, so schneidet er in keinem Punkte die Endtangente p_i , um so weniger ihre Strecke PP_i . Ist γ_i eine Spirale oder Doppelspirale und ist S von P_i ausgehend der erste Schnittpunkt des Bogens γ_i mit der Tangente p_i , so liegen die Punkte S und P vom Punkte P_i in den entgegengesetzten Seiten an der Geraden p_i . Der Bogen γ_i kann also nur dann den Punkt S enthalten, wenn er die Strecke PP_h schneidet.

Wären also die Bögen b_i und b_h Elementarbögen, so müßte die Strecke PP_i bzw. PP_h von dem Bogen γ_h bzw. γ_i in einem Punkte S_h bzw. S_i geschnitten werden. Dann müßten die Bögen γ_i und γ_h einander schneiden, weil die Punktpaare $P_i S_i$ und $P_h S_h$ am Rande des einfachgeschlossenen Gebietes $\bar{G}_0$ einander abtrennen. Dies ist aber unmöglich, weil die Kurve C vom Maximalklassenindex keinen Doppelpunkt hat.

Aus diesem Widerspruch folgt der bereits ausgesprochene Satz.

6. Der Beweis des Satzes über die Ordnung der paaren einzügigen Kurven vom Maximalklassenindex.

Wir bezeichnen, wie im vorigen Paragraphen, mit C eine einzügige Kurve n -ter Klasse $m = 2\mu$ -ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p , die von der unendlichfernen Geraden in $m = 2\mu$ verschiedenen Punkten geschnitten wird, und mit k einen (genug großen) Kreis der Ebene der Kurve C , so daß die Kurve C von k und von den konzentrischen größeren Kreisen in $2m = 4\mu$ verschiedenen Punkten getroffen werde.

Das Innere des Kreises wird also von der Kurve C in $m + 1 = 2\mu + 1$ Gebiete geteilt. Wir färben ein Gebiet von diesen $m + 1$ Gebieten mit

der Farbe α bzw. β , je nachdem man aus einem Punkte des Gebietes die konvexe bzw. konkave Seite der Kurve erreichen kann. Setzt man die Färbung in der Ebene über den Kreis k fort, so erhält man das zusammenhängende Gebiet G_α bzw. G_β der Ebene, aus dessen Punkten die konvexe bzw. konkave Seite der Kurve erreicht werden kann.

Das Geschlecht der Kurve C ist Null oder Eins, je nachdem das Gebiet G_β (aus dessen Punkten an die Kurve C nur $n - 2$ Tangenten gezogen werden können) einfach bzw. zweifach zusammenhängend ist⁸⁾. Der Zusammenhang des Gebietes G_α ist Zwei im ersten und Eins im zweiten Falle.

Ist K eine Kugel, von der die Ebene der Kurve C im Mittelpunkt des Kreises k berührt wird, ist O der Gegenpunkt dieses Berührungspunktes auf der Kugel, und projiziert man vom Punkte O aus die Kurve C auf die Kugel, so erhält man auf der Kugel eine Kurve, die im vorigen mit Γ bezeichnet wurde.

Jedem der innerhalb des Kreises k liegenden $2\mu + 1$ ebenen Gebiete entspricht je ein Gebiet der Kugel und umgekehrt. Wir färben die entsprechenden Gebiete der Ebene und der Kugel mit gleicher Farbe. Die Anzahl der α -farbigen Gebiete innerhalb des Kreises k ist also μ bzw. $\mu + 1$, je nachdem der Bereich B_α auf der Kugel aus μ bzw. $\mu + 1$ Gebieten besteht, oder je nachdem der Bereich B_α in bezug auf O unpaare Kurven enthält oder nicht enthält.

Die stereographische Projektion führt den Bereich B_α in das zusammenhängende Gebiet G_α und die in bezug auf O unpaaren Kurven der Kugelfläche in die unpaaren Kurven der Ebene über. Eines der ebenen Gebiete G_α und G_β enthält also unpaare Kurven, sein Zusammenhang ist also Zwei. Das andere Gebiet ist einfach zusammenhängend.

Ist also μ bzw. $\mu + 1$ die Anzahl der α -farbigen ebenen Gebiete im Kreise k , so ist die Kurve C vom Geschlecht Null bzw. Eins, weil das Gebiet G_α zweifach bzw. einfach zusammenhängend ist.

Die Anzahl der Spitzen der Kurve C ist $r = n - 2 + 2p$ ⁹⁾. Die Spitzen liegen alle im Kreise k . Es gibt zwei Fälle: der Rand jedes α -farbigen Gebietes innerhalb des Kreises enthält wenigstens eine Spitze, oder es gibt wenigstens ein α -farbiges Gebiet, dessen Rand keine Spitze enthält. In beiden Fällen ist $\xi - 1 \leq r$. Es ist klar, daß in dem ersten Falle auch die Ungleichung $\xi \leq r$ besteht. Wir müssen also die Ungleichung $\xi - 1 \leq r$ nur für den zweiten Fall beweisen.

In dem zweiten Falle gibt es ein α -farbiges Gebiet im Kreise k , dessen Rand keine Spitze enthält. Wir wählen dieses Gebiet als Funda-

⁸⁾ Vgl. die Arbeiten B und C.

⁹⁾ B, S. 164—165.

mentalgebiet und färben die m Bögen der Kurve C , die im Kreise k liegen, so, wie wir die entsprechenden Schleifen der Kurve Γ auf der Kugel gefärbt haben.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen folgt nun die Ungleichung $y = \xi - 1 \leq r$, weil jeder β -farbige Bogen der Kurve C wenigstens eine Spitze enthalten muß.

Diese Behauptung ist klar für die β -farbigen Bögen der β -farbigen ebenen Gebiete, die dem Fundamentalgebiete benachbart sind, weil man aus den Punkten dieser Gebiete die zu C gehörigen Randbögen an den konkaven Seiten erreichen kann und weil die α -farbigen Randbögen dieser β -farbigen Gebiete nach der Annahme keine Spitze enthalten. Man kann aber die Richtigkeit der Behauptung auch für andere β -farbige Randbögen leicht einsehen, wenn man die α -farbigen Gebiete, die den betreffenden Bogen von den Bögen des Fundamentalgebietes abtrennen, samt ihren Randbögen aus dem Kreise k entfernt.

Damit ist die Ungleichung $\xi - 1 \leq r = n - 2 + 2p$ bewiesen.

Hat nun die Kurve C das Geschlecht Null bzw. Eins, so ist $\xi = \mu$ bzw. $\xi = \mu + 1$. Daraus folgt die Ungleichung

$$\xi - 1 = \mu - 1 \leq r = n - 2 + 2p = n - 2,$$

wenn $p = 0$ ist, und die Ungleichung

$$\xi - 1 = \mu \leq r = n - 2 + 2p = n,$$

wenn $p = 1$ ist.

In beiden Fällen ist also

$$m = 2\mu \leq 2n - 2 + 2p.$$

Damit ist unser Satz für einzügige Kurven vom Maximalklassenindex bewiesen.

7. Zweizügige paare Kurven vom Maximalklassenindex.

Es sei C eine zweizügige paare Kurve vom Maximalklassenindex. Ihre Züge C_1 und C_2 sind wieder paare Kurven vom Maximalklassenindex. Wir bezeichnen mit n, n_1, n_2 die Klassen, mit m, m_1, m_2 die Ordnungen, mit r, r_1, r_2 die Anzahlen der Spitzen, mit p, p_1, p_2 die Geschlechter der Kurven C, C_1 bzw. C_2 .

Wir können annehmen, daß die Kurve C von der unendlichfernen Geraden in $m = 2\mu = 2\mu_1 + 2\mu_2$ verschiedenen Punkten geschnitten wird, von denen $2\mu_1 (\leq m_1)$ bzw. $2\mu_2 (\leq m_2)$ auf den Zug C_1 bzw. C_2 fallen. Wäre nämlich dies nicht der Fall, so könnte man die Kurve C durch Projektion und durch stetige Deformationen, von denen die charakteristischen Zahlen der Kurven C, C_1, C_2 nicht verändert werden,

in eine Kurve C' überführen, für welche die obige Annahme in Erfüllung geht.

Wir bezeichnen, wie im vorigen Paragraphen, mit k einen genug großen Kreis, so daß er und die konzentrischen größeren Kreise die Kurve C in $2m = 4\mu$, die Kurve C_1 bzw. C_2 in $4\mu_1$ bzw. $4\mu_2$ Punkten treffen. Die Existenz dieses Kreises k sieht man ebenso ein wie im vorigen Paragraphen.

Die $m = 2\mu = 2\mu_1 + 2\mu_2$ Bögen der Kurve C , die im Kreise k liegen, teilen den Kreis k in $m + 1$ einfach zusammenhängende Gebiete. Aus den Punkten eines dieser Gebiete kann man entweder nur die konvexen oder nur die konkaven Seiten der Kurve C erreichen. Wir färben ein Gebiet des Kreises k mit der Farbe α bzw. β , je nachdem man aus einem Punkte des Gebietes die konvexe bzw. konkave Seite der Kurve erreichen kann. Wir bezeichnen mit ξ' bzw. η' die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Gebiete im Kreise k .

Ist K eine Kugel, von der die Ebene der Kurve C im Mittelpunkte des Kreises k berührt wird, und projiziert man die Kurve von dem Gegenpunkte des Berührungspunktes der Ebene und der Kugel, so erhält man ein Kurvenpaar $\Gamma_1\Gamma_2$ auf der Kugelfläche.

Jedem der $2\mu_1 + 2\mu_2 + 1$ Gebiete, in welche die Kugelfläche von Γ_1 und Γ_2 geteilt wird, entspricht nach der stereographischen Projektion wechselseitig eindeutig ein Gebiet des Kreises k . Haben zwei entsprechende Gebiete des Kreises und der Kugelfläche gleiche Farben, so haben je zwei entsprechende Gebiete dieselben Farben.

Von einem α -farbigen Gebiete (als Fundamentalgebiete) ausgehend, lassen sich die im Kreise k liegenden m Bögen der Kurve C mit den Farben α und β so färben wie die Schleifen des Kurvenpaares $\Gamma_1\Gamma_2$ im dritten Paragraphen.

Ist x' bzw. y' die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Bögen der Kurve C oder die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Schleifen des Kurvenpaares $\Gamma_1\Gamma_2$, so sind die Zahlen x' und y' durch die Gleichungen (5₁), (5₂), (6₁) bzw. (6₂) bestimmt.

Hat das ebene Fundamentalgebiet nur an einer der Kurven C_1 und C_2 Randbögen, so bestehen die Gleichungen (5₁) oder (5₂). Im entgegengesetzten Falle bestehen die Gleichungen (6₁) oder (6₂).

Setzt man also die Färbung der Ebene über den Kreis k fort, so hat das Gebiet, das von den beiden Zügen der Kurve C begrenzt wird, in den Fällen, wo die Gleichungen (5₁) oder (5₂) bzw. (6₁) oder (6₂) bestehen, die Farbe β bzw. α . Dieses Gebiet ist entweder zweifach oder dreifach zusammenhängend, weil es durch einen Querschnitt, von dem ein Punkt der Kurve C_1 mit einem Punkte von C_2 verbunden wird, in ein ein-

fach bzw. zweifach zusammenhängendes Gebiet verwandelt wird, je nachdem das erhaltene Gebiet keine unpaaren Kurven hat bzw. unpaaren Kurven enthält.

Die Kurve C ist irreduzibel bzw. reduzibel, je nachdem die Punkte der Ebene, aus denen man die konkave Seite der Kurve erreichen kann, ein Gebiet bzw. zwei Gebiete bilden¹⁰⁾. Die Kurve C ist also irreduzibel bzw. reduzibel, je nachdem die β -farbigen Punkte der Ebene ein Gebiet oder zwei Gebiete bilden.

Ist also die Kurve C irreduzibel, so hat sie das Geschlecht 2 oder 1, je nachdem das β -farbige Gebiet der Ebene dreifach bzw. zweifach zusammenhängend ist. Ist aber die Kurve C reduzibel, so ist wenigstens eines der zwei β -farbigen Gebiete der Ebene einfach zusammenhängend. Das andere β -farbige Gebiet hat den Zusammenhang Eins oder Zwei, je nachdem es keine unpaaren Kurven bzw. unpaare Kurven enthalten kann. Im ersten Falle ist die Kurve C vom Geschlecht -1 , im zweiten Falle ist sie vom Geschlecht 0 ¹¹⁾.

Zwischen den Zahlen x' und y' bestehen die Relationen (5_1) , (5_2) , (6_1) bzw. (6_2) , je nachdem die Kurve C vom Geschlechte 2, 1, 0 bzw. -1 ist, wie wir es beweisen wollen.

Man kann nämlich die Kurven Γ_1 und Γ_2 durch einen Querschnitt q auf der Kugelfläche in eine Kurve Γ vereinigen. Dieser Querschnitt verläuft in einem β - bzw. α -farbigen Gebiete der von Γ_1 und Γ_2 geteilten Kugelfläche, je nachdem die Kurve C irreduzibel bzw. reduzibel ist. Ist ξ bzw. η die Anzahl der α - bzw. β -farbigen Gebiete nach der Anwendung des Querschnittes, so sind

$\xi' = \xi + 1$ und $\eta' = \eta - 1$, bzw. $\xi' = \xi - 1$ und $\eta' = \eta + 1$ je nachdem die Kurve C irreduzibel bzw. reduzibel ist. Ist nun $\eta < \xi$, so enthält der aus η β -farbigen Gebieten bestehende Bereich B_β der Kugelfläche in bezug auf 0 unpaare Kurven, im entgegengesetzten Falle enthält der Bereich B_α unpaare Kurven (in bezug auf 0).

Die stereographische Projektion q' des Querschnittes q auf die Ebene verläuft in dem β - bzw. α -farbigen Gebiete der Ebene, wenn C irreduzibel bzw. reduzibel ist. Wir erhalten nach der Anwendung des Querschnittes q' ein α -farbiges und ein β -farbiges Gebiet in der Ebene. Das β -farbige Gebiet ist zweifach und das α -farbige Gebiet ist einfach zusammenhängend, wenn $\eta < \xi$ ist. Im Falle $\xi < \eta$ ist das β -farbige Gebiet einfach und das andere Gebiet zweifach zusammenhängend.

Daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

¹⁰⁾ A, S. 62—67.

¹¹⁾ A, S. 69—71.

8. Über die Ordnung der zweizügigen paaren Kurven vom Maximalklassenindex.

Die Spitzen der zweizügigen Kurve C vom Maximalklassenindex liegen alle innerhalb des Kreises k . In diesem Kreise liegen $2\mu_1$ Bögen der Kurve C_1 und $2\mu_2$ Bögen der Kurve C_2 . Auf Grund des Beweises im fünften Paragraphen sieht man den folgenden Satz auch für zweizügige Kurven leicht ein:

Sind b_i und b_h zwei Bögen der Kurve C im Kreise k , und erreicht man aus einem Punkte der Kreisfläche beide Bögen an den konkaven Seiten, so hat die Kurve C wenigstens auf dem einen Bogen Spitzen.

Die α -farbigen Gebiete des Kreises k enthalten an ihren Grenzen jeden der $2\mu_1 + 2\mu_2$ Bögen der Kurve C einmal.

Es gibt zwei Fälle, entweder liegt wenigstens eine Spitze auf dem Rande jedes α -farbigen Gebietes des Kreises k , oder es gibt ein α -farbiges Gebiet, dessen Rand keine Spitze enthält. Im zweiten Falle wählen wir dieses Gebiet als Fundamentalgebiet und färben die im Kreise k liegenden $m = 2\mu_1 + 2\mu_2$ Bögen der Kurve C so, wie es im dritten Paragraphen gesagt wurde. Aus dem vorher ausgesprochenen Satze folgt also, daß jeder β -farbige Bogen wenigstens eine Spitze enthalten muß. Daraus folgt die Ungleichung $r \geq y' = \xi' - 1$. Im ersten Falle besteht offenbar auch die Ungleichung $r \geq y'$. In beiden Fällen besteht also die Ungleichung

$$y' = \xi' - 1 \leq r = n - 2 + 2p.$$

Aus dieser Ungleichung und aus den Gleichungen (5₁), (5₂), (6₂') und (6₁') kann die Ungleichung

$$m = 2\mu_1 + 2\mu_2 = 2n - 2 + 2p$$

leicht gefolgert werden.

a) Ist nämlich die Kurve C irreduzibel und vom Geschlechte Zwei, so ist

$$2y' = 2(\mu_1 + \mu_2 + 1) = m + 2 \leq 2r = 2n + 4,$$

woraus

$$m \leq 2n - 2 + 4 = 2n - 2 + 2p = M$$

ist.

b) Ist die irreduzible Kurve C vom Geschlechte Eins, so ist

$$2y' = 2(\mu_1 + \mu_2) = m \leq 2r = 2n,$$

woraus die Ungleichung

$$m \leq 2n - 2 + 2p = M$$

folgt.

c) Ist ferner die Kurve C reduzibel und vom Geschlechte -1 , so ist

$$2y' = 2(\mu_1 + \mu_2 - 2) = m - 4 \leq 2r = 2n - 8,$$

woraus

$$m \leq 2n - 2 + 2p = M$$

ist.

d) Ist endlich die Kurve reduzibel und vom Geschlechte Null, so ist

$$2y' = 2(\mu_1 + \mu_2 - 1) = m - 2 \leq 2r = 2n - 4,$$

woraus wieder die Ungleichung

$$m \leq 2n - 2 + 2p$$

folgt.

Bezeichnet man die virtuelle Ordnung, d. h. die höchst erreichbare Ordnung der Kurve C , C_1 bzw. C_2 , wenn ihre Klasse und ihr Geschlecht gegeben ist, mit M , M_1 bzw. M_2 , so sind

$$M = 2n - 2 + 2p, \quad M_1 = 2n_1 - 2 + 2p_1, \quad M_2 = 2n_2 - 2 + 2p_2$$

und besteht die Gleichung

$$M = M_1 + M_2 - 2 \quad \text{bzw.} \quad M = M_1 + M_2,$$

je nachdem die zweizügige Kurve C vom Maximalklassenindex irreduzibel bzw. reduzibel ist. Zwischen den virtuellen Ordnungen der Kurve C und ihrer Züge C_1 und C_2 besteht also dieselbe Relation wie zwischen den Klassen.

Ist nämlich die Kurve C irreduzibel, so sind

$$n = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{und} \quad p = p_1 + p_2,$$

woraus

$$\begin{aligned} M &= 2n - 2 + 2p = (2n_1 - 2 + 2p_1) + (2n_2 - 2 + 2p_2) - 2 \\ &= M_1 + M_2 - 2 \end{aligned}$$

ist.

Ist die Kurve C reduzibel so bestehen die Gleichungen

$$n = n_1 + n_2 \quad \text{und} \quad p = p_1 + p_2 - 1,$$

woraus

$$M = 2n - 2 + 2p = (2n_1 - 2 + 2p_1) + (2n_2 - 2 + 2p_2) = M_1 + M_2$$

ist.

9. Über die Ordnung der mehrzügigen Kurven vom Maximalklassenindex.

Ist C eine beliebige paare Kurve n -ter Klasse m -ter Ordnung vom Maximalklassenindex, so beweisen wir die Ungleichung

$$m \leq M = 2n - 2 + 2p.$$

Wir beweisen diesen Satz zuerst für irreduzible Kurven. Für den Beweis nehmen wir an, daß der Satz für eine mehrzügige irreduzible Kurve C' nicht besteht, d. h. $m \geq 2n + 2p$ ist.

Die irreduzible Kurve C' vom Geschlechte p besteht aus p Zügen vom Geschlechte Eins und außerdem entweder aus keinem oder aus einem Zuge vom Geschlechte Null¹².

Besteht die Kurve C' aus den p Zügen $C_1, C_2, \dots, C_p$ vom Geschlechte Eins und aus keinem Zuge vom Geschlechte Null, bezeichnen $n_1, n_2, \dots, n_p, m_1, m_2, \dots, m_p; M_1, M_2, \dots, M_p$ bzw. $p_1, p_2, \dots, p_p$ ($p_1 = p_2 = \dots = p_p = 1$) die Klassen, Ordnungen, virtuelle Ordnungen bzw. die Geschlechter der Züge, und sind

$$M_h = 2n_h - 2 + 2p_h = 2n_h \quad (h = 1, 2, \dots, p),$$

so besteht zwischen den Klassenindizes der irreduziblen Kurve C und ihrer Züge die Gleichung

$$n - 2 = (n_1 - 2) + (n_2 - 2) + \dots + (n_p - 2) = n_1 + n_2 + \dots + n_p - 2p.$$

Wäre also

$$m \geq 2n + 2p,$$

so wäre

$$\begin{aligned} m &\geq 2n + 2p = 2(n_1 + n_2 + \dots + n_p - 2p + 2) + 2p \\ &\geq (M_1 - 2) + (M_2 - 2) + \dots + (M_p - 2) + 4. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann aber nur dann bestehen, wenn es in der Ebene der Kurve C' eine Gerade g gibt, von der wenigstens zwei Züge in so vielen Punkten getroffen werden wie ihre virtuellen Ordnungen. Dies ist aber nach den Resultaten des vorigen Paragraphen unmöglich, weil je zwei Züge einer irreduziblen Kurve vom Maximalklassenindex eine zweizügige irreduzible Kurve bilden¹³).

Hat die irreduzible Kurve C' vom Geschlechte p außer den Zügen $C_1, C_2, \dots, C_p$ vom Geschlechte Eins noch einen Zug C_0 , dessen Klasse, Ordnung, virtuelle Ordnung bzw. Geschlecht n_0, m_0, M_0 bzw. p_0 ist, so ist $p_0 = 0$ und $M_0 = 2n_0 - 2 + 2p_0 = 2n_0 - 2$.

Wegen der Irreduzibilität der Kurve C besteht die Gleichung

$$\begin{aligned} n - 2 &= (n_0 - 2) + (n_1 - 2) + \dots + (n_p - 2) \\ &= n_0 + n_1 + \dots + n_p - 2p - 2. \end{aligned}$$

Wäre nun $m \geq 2n + 2p$, so wäre

$$m \geq (M_0 - 2) + (M_1 - 2) + \dots + (M_p - 2) + 4.$$

Die Gerade g , von der die Kurve C in m Punkten getroffen würde, träfe also wenigstens zwei Züge in so vielen Punkten wie ihre virtuelle Ordnungen. Dies ist aber aus demselben Grunde unmöglich wie im vorigen Falle.

¹²) C, S. 180.

¹³) A, S. 68.

Daraus folgt, daß die Ungleichung $m \leq 2n - 2 + 2p$ für jede irreduzible paare Kurve vom Maximalklassenindex besteht.

Ist die paare Kurve C reduzibel und zerfällt in k irreduzible Kurven, deren Klassen, Ordnungen, virtuelle Ordnungen bzw. Geschlechter $n_1, n_2, \dots, n_k; m_1, m_2, \dots, m_k; M_1, M_2, \dots, M_k$ bzw. $p_1, p_2, \dots, p_k$ sind, so bestehen die Relationen

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_k, & p &= p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1, \\ m_h &\leq M_h = 2n_h - 2 + 2p_h \quad (h = 1, 2, \dots, k) \\ m &\leq m_1 + m_2 + \dots + m_k. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} m &\leq 2(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - 2 + 2(p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1) \\ &\leq 2n - 2 + 2p. \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung $m \leq 2n - 2 + 2p$ auch für reduzible paare Kurven vom Maximalklassenindex gerechtfertigt. Für die Ordnung m der unpaaren Kurven n -ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p haben wir die Ungleichung $m \leq M = 2n - 2 + 2p - w$ bewiesen, wo w ($= 1$) die Anzahl der Wendetangenten bedeutet¹⁴⁾. Es gilt also für jede Kurve vom Maximalklassenindex die vorige Ungleichung ($w = 0$ oder 1).

Ersetzt man in der Ungleichung von m das Geschlecht p durch seinen Wert aus der Gleichung

$$r = n - 2 + 2p \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - w,$$

wo r bzw. d die Anzahl der Spitzen bzw. Doppeltangenten der Kurve bedeutet, so erhält man auch die Ungleichungen

$$m \leq M = n + r - w = n(n-1) - 2d - 3w.$$

Damit ist der in der Einleitung ausgesprochene Satz über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex bewiesen.

Wir beweisen auch den folgenden Satz:

Zwischen den virtuellen Ordnungen einer Kurve vom Maximalklassenindex und ihrer Züge besteht dieselbe Relation wie zwischen den Klassen.

Hat nämlich die Kurve n -ter Klasse vom Maximalklassenindex C k Züge $C_1, C_2, \dots, C_k$, w Wendetangenten und r Spitzen, und bedeutet n_h, M_h, r_h bzw. w_h die Klasse, die virtuelle Ordnung, die Anzahl der Spitzen bzw. die Anzahl der Wendetangenten für den Zug C_h ($h = 1, 2, \dots, k$), so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2 + \dots + r_k, & w &= w_1 + w_2 + \dots + w_k \quad (= 0 \text{ oder } 1), \\ M &= n + r - w, & M_h &= n_h + r_h - w_h. \end{aligned}$$

¹⁴⁾ D, S. 91.

Besteht also die Gleichung

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k - 2q \quad (0 \leq q \leq k-1)$$

zwischen den Klassen der Kurven $C, C_1, C_2, \dots, C_k$, so besteht auch die Gleichung

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_k - 2q.$$

10. Über die algebraischen Kurven vom Maximalklassenindex.

Wir bezeichnen mit C^* eine algebraische Kurve vom Maximalklassenindex, deren Realitätsklasse und algebraische Klasse dieselbe Zahl n ist. Bezeichnen p^*, m^*, r^*, t^*, w^* bzw. p, m, r, t, w die entsprechenden charakteristischen Zahlen der Kurve C^* vom algebraischen bzw. Realitäts-Gesichtspunkte aus, so bestehen offenbar die Relationen

$$p^* \leq p, \quad m^* \geq m, \quad r^* \geq r, \quad t^* \geq t, \quad w^* \geq w.$$

Wir beweisen, daß $p^* = p$ ist. Für den Beweis konstruieren wir die zur Kurve C^* gehörige Klein-Riemannsche Fläche¹⁵⁾. Nach dieser Konstruktion läßt man jeder Tangente von C^* einen reellen Punkt entsprechen, nämlich den Berührungspunkt, wenn die Tangente reell ist, ihren einzigen reellen Punkt, wenn sie imaginär ist. Die so erhaltenen ∞^2 Punkte bilden eine geschlossene zweiblättrige Fläche F , die Klein-Riemannsche Fläche der Kurve C^* . Ist T das Gebiet, aus dessen Punkten zwei imaginäre (und $n - 2$ reelle) Tangenten an C^* gehen, so besteht die Fläche F aus zwei aufeinandergelegten kongruenten Gebieten T , die längs der Züge von C^* und längs der eventuellen Wendetangente miteinander zusammenhängen.

Die Fläche F ist zusammenhängend, wenn die Kurve C^* algebraisch irreduzibel ist, sie zerfällt in k in sich zusammenhängende geschlossene Flächen, wenn C in k algebraisch irreduzible Kurven zerfällt. Aus der Beziehung der Fläche F und des Gebietes T folgt, daß die Anzahl der in sich zusammenhängenden (geschlossenen bzw. offenen) Flächen, in welche die Fläche F bzw. das Gebiet T zerfällt, dieselbe ist. Daraus folgt der Satz:

Die Begriffe der Irreduzibilität und Reduzibilität vom algebraischen und vom Realitäts-Gesichtspunkte aus stimmen für die algebraischen Kurven vom Maximalklassenindex, deren Realitäts- und algebraische Klasse dieselbe Zahl ist, überein.

Für eine irreduzible Kurve C^* haben wir die Gleichung $p^* = p$ schon bewiesen¹⁶⁾. Man kann aber diesen Satz auch auf Grund der Beziehung zwischen der Fläche F und T rechtfertigen.

¹⁵⁾ F. Klein, Math. Ann. 7 (1874), S. 558; 9 (1876), S. 476; 10 (1876), S. 365, 398; 11 (1878), S. 293.

¹⁶⁾ B, S. 165, 178.

Der Zusammenhang der Fläche F ist nach Klein $2p^* + w$, weil die Kurve C^* keine isolierten Singularitäten hat. Das Gebiet T ist $p + 1$ -fach zusammenhängend, der Zusammenhang der aus zwei Gebieten T zusammengeklebten Fläche F ist also $2p + w$. Aus der Gleichung $2p^* + w = 2p + w$ folgt also, daß $p^* = p$ ist.

Zerfällt nun die Kurve in die irreduziblen (algebraischen) Kurven $C_1^*, C_2^*, \dots, C_k^*$, so hat die Kurve C_h dasselbe algebraische und Realitäts-geschlecht $p_h^* = p_h$ ($h = 1, 2, \dots, k$). Auf Grund der Gleichungen $p^* = p_1^* + p_2^* + \dots + p_k^* - k + 1$ und $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$ folgt die Gleichung $p^* = p$ auch für reduzible Kurven C^* .

Aus den für die zwei Geschlechter bestehenden Gleichungen

$$p^* = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t^* - w^*, \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - w$$

folgen also die Relationen $t^* = t$ und $w^* = w$ (≤ 1).

Die Anzahl der reellen Spitzen der Kurve C^* läßt sich auf Grund der bekannten Kleinschen Relation¹⁷⁾ zwischen den reellen Singularitäten der algebraischen Kurven bestimmen. Diese Relation ist

$$m^* + w = n + r,$$

weil die Kurve C^* keine isolierten Singularitäten hat. Daraus folgen die Relationen

$$r = m^* - n + w = M - n + w = n + 2p - 2,$$

$$m \leq m^* = M = n(n-1) - 2t - 3w.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die für jede Kurve vom Maximal-klassenindex bestehenden Relationen (2) für das Geschlecht, für die virtuelle Ordnung bzw. für die Anzahl der Spitzen mit der Clebschschen Relation, mit der entsprechenden Plückerschen Formel bzw. mit der Kleinschen Relation zwischen den reellen Singularitäten der algebraischen Kurven übereinstimmen, wenn diese algebraischen Kurven nur reelle Tangenten-singularitäten und keine isolierten Singularitäten haben.

¹⁷⁾ F. Klein, Math. Ann. 10, (1876), S. 199; C. Juel, Skandinav. Math. Kongreß 1925, S. 119–126 (1926).

(Eingegangen am 29. März 1932.)

Nichtkommutative Algebra.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Die Hauptsätze der kommutativen Algebra sind bekanntlich in der galoisschen Theorie enthalten, der die Theorie der Abspaltungs- und Zerfällungskörper vorausgeht, d. h. der Körper, die ausreichen, damit ein vorgegebenes Polynom einen Linearfaktor abspaltet, bzw. ganz in Linearfaktoren zerfällt.

Die entsprechenden Teile der Algebra entwickele ich hier im Nichtkommutativen, insbesondere im Hyperkomplexen. Und zwar arbeite ich dabei prinzipiell mit nichtkommutativen Methoden, der Darstellung in nichtkommutativen Körpern. Zum Schluß zeige ich, wie die oben genannten Sätze der kommutativen Algebra sich ganz parallel laufend mit Darstellung in kommutativen Körpern begründen lassen.

Die zugrunde liegende Darstellungstheorie — der eine kurze Automorphismentheorie vorausgeht (§ 1) — bedeutet eine Fortentwicklung der auf der Theorie der Darstellungsmoduln beruhenden¹⁾. Insbesondere betrachte ich neben der direkten Darstellung die reziproke — wobei sich die eine auf die andere zurückführen läßt —, die jetzt vermöge des reziproken Darstellungsmoduls erzeugt wird. Der Vorteil ist, daß der reziproke Darstellungsmodul — also ein Doppelmodul — sich auch auffassen läßt als einseitiger Modul nach einem Erweiterungsring (§ 2). Dadurch wird die Darstellung in nichtkommutativen Körpern zurückgeführt auf die Idealtheorie im Erweiterungsring; die irreduziblen Darstellungsklassen entsprechen den irreduziblen Idealklassen des Erweiterungsringes, in genauer Analogie zu den Tatsachen, die bei der Darstellung hyperkomplexer Systeme in ihrem kommutativen Koeffizientenbereich für das System selbst gelten (§ 3 und 4).

Von hier aus ergeben sich die Struktursätze für Matrizenringe über nichtkommutativen Körpern vermöge der Bemerkung (§ 5), daß *jeder Unter- ring eine Darstellung durch diesen Körper, bzw. eine reziproke Darstellung*

¹⁾ E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 641—692, zit. Darstellungstheorie. Vgl. die Wiedergabe bei van der Waerden, Moderne Algebra II.

durch den reziprok isomorphen Körper bedeutet. Dieser reziprok isomorphe Körper bildet ein erstes Analogon zu minimalem Abspaltungs- und Zerfällungskörper im Kommutativen, insofern als er alle reziproken Darstellungen ersten Grades vermittelt und bei endlichem Rang nach dem Zentrum — der bisher nicht vorausgesetzt war — auch eine volle Zerfällung in direkte Summanden vom Rang 1. Das ergibt die galoissche Theorie für Körper (§ 6) und drückt zugleich die Tatsache aus (§ 7), daß reziprok isomorphe Divisionsalgebren (Körper endlichen Ranges nach dem Zentrum) inverse Klassen in der R. Brauerschen Gruppe der Algebrenklassen erzeugen. Eine zweite Begründung der galoisschen Theorie, die allgemeiner für einfache Systeme gilt (im Text vorangeht), ist fast unmittelbare Folge eines Satzes über vertauschbare Unterringe, der selbst fast direkt an die vorangeschickte Automorphismenbetrachtung anknüpft.

Bis hierher verlaufen die Betrachtungen rein nichtkommutativ. Aber auch die Fragestellung nach den *kommutativen* Zerfällungskörpern wird nichtkommutativ behandelt vermöge der Darstellung des Zerfällungskörpers durch die Divisionsalgebra nach der in § 5 vorausgeschickten Bemerkung (§ 7). Den Schluß bildet die oben erwähnte Übertragung auf das Kommutative (§ 8) und die Theorie der Zerfällungskörper für beliebige Systeme (§ 9), womit zugleich der Zusammenhang mit der üblichen Darstellungstheorie im Kommutativen gegeben ist.

Auf diese Darstellungstheorie im Kommutativen — und auf die „irrationalen“ Faktorensysteme — hat R. Brauer die Theorie der Zerfällungskörper gegründet²⁾. Wegen dieser kommutativen Begründung muß er — ebenso wie später Albert — das Zentrum als vollkommenen Körper annehmen, eine nach der nichtkommutativen Begründung unnötige Einschränkung. Mit derselben Einschränkung, ebenfalls mit Darstellungstheorie im Kommutativen haben — nach Kenntnis meiner galoisschen Theorie für nichtkommutative Körper — R. Brauer und K. Shoda die Theorie weiter entwickelt: R. Brauer gab den oben erwähnten Satz über vertauschbare Unterringe, K. Shoda unabhängig die volle Theorie auch für halbeinfache Systeme³⁾.

²⁾ Vgl. unsere gemeinsame Note: Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen. Sitz. Ber. d. Preuß. Ak. d. Wiss. 1927, S. 221—228. (Die Anmerkung auf S. 222 enthält einen „Rechenschaftsbericht“. Die Hauptsätze sind unabhängig und fast gleichzeitig entstanden.) Vgl. weiter R. Brauer, Über Systeme hyperkomplexer Zahlen, § 3. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 79—107. A. A. Albert hat die Sätze später unabhängig wiedergefunden.

³⁾ R. Brauer, Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, § 2. Journ. f. Math. **166** (1932), S. 241—252. K. Shoda, Über die galoissche Theorie der halbeinfachen hyperkomplexen Systeme. Math. Ann. **107** (1932), S. 252—258. Diese Resultate hatte auch J. Levitzki entwickelt.

Schließlich sei erwähnt, daß sich — für den Fall der Körper — eine kurze Darstellung bei van der Waerden II findet (§ 128), im Anschluß an meine Vorlesung vom Sommer 1928, wo ich zum erstenmal über diese Fragen vorgetragen hatte. Die Darstellung von van der Waerden bringt eine Reihe von Vereinfachungen gegenüber dieser Vorlesung, die ich zum Teil in einer zweiten Vorlesung (Winter 1929/30)⁴⁾, zum Teil erst hier übernommen und weitergeführt habe. Insbesondere stammt die Übertragung der hyperkomplexen Beweismethode der galoisschen Theorie aufs Kommutative (§ 8) erst aus der zweiten Vorlesung, wo der nichtkommutative Beweis (§ 6, 3.) wesentlich gegenüber der ersten Vorlesung vereinfacht war. Der Satz über vertauschbare Unterringe (§ 5) und die darauf fußende zweite Beweismethode der nichtkommutativen galoisschen Theorie (§ 6, 1. u. 2.) ist erst nach der zweiten Vorlesung nach Kenntnis von R. Brauer (Anm. ³⁾) und van der Waerden § 128 hinzugekommen; in § 5, 3. sind aber wesentlich geringere Endlichkeitsvoraussetzungen als dort.

Gewisse Schlußweisen der ersten Vorlesung — Methode der Durchschnittsbildung von Differenzenidealen — haben, obwohl komplizierter, den Vorteil, sich auf Systeme von unendlichem Rang und auf ganzzahlige Systeme übertragen zu lassen⁵⁾. Für kommutative ganzzahlige Systeme kommt man so zu dem Zusammenhang von Idealdifferentiation und Differente⁶⁾, worauf ich gelegentlich genauer eingehen werde.

Ihre Hauptanwendung findet die Theorie der Zerfällungskörper in der Theorie der verschränkten Produkte und ihrer Faktorensysteme, die selbst wieder die Grundlage zahlentheoretischer Anwendung ergeben; hierauf wird hier nicht mehr eingegangen⁷⁾.

⁴⁾ Die erste Vorlesung ist von G. Köthe, die zweite von M. Deuring gearbeitet.

⁵⁾ Die Methode ist im wesentlichen wiedergegeben bei G. Köthe, Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum § 5, Math. Ann. **105** (1931), S. 15—39. Vgl. auch Anm. ¹⁰⁾. Diese Durchschnittsmethode ist jetzt ersetzt durch die fast triviale Tatsache (§ 4, 1.) — die erst van der Waerden bemerkte —, daß die zweiseitigen Ideale zu den invarianten Moduln gehören. Dadurch läßt sich alles durch die einfachere direkte Summenzerlegung begründen, was aber bei unendlichem Rang und im ganzzahligen Fall versagt.

⁶⁾ Vgl. Vortrag in Prag, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **39** (1930), S. 17, (schräge Paginierung).

⁷⁾ Die Theorie der verschränkten Produkte ist in der zweiten Vorlesung entwickelt; sie ist — mit kleinen Abänderungen, um die hier gegebene Theorie nicht voraussetzen zu müssen — wiedergegeben bei H. Hasse: Theory of cyclic algebras over an algebraic numberfield, Kap. II. Transactions of the Amer. Math. Soc. **34** (1932), S. 171—214. Eine stärker an die Vorlesung anschließende Darstellung wird in einem Bericht von M. Deuring in den „Ergebnissen der Mathematik“ erscheinen.

§ 1.

Automorphismen, Moduln und Doppelmoduln.

Die Darstellungstheorie auf Grund der Darstellungsmoduln beruht bekanntlich (vgl. auch § 2) auf der Theorie des Automorphismenrings abelscher Gruppen mit oder ohne Operatoren. Die dabei implizit zugrunde liegenden Schlußweisen — Beziehungen zwischen Abbildung und Rechengesetzen — sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, in ein paar einfachen Sätzen formuliert werden.

1. Multiplikative Abbildung. Assoziativgesetz. Sei vorerst $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ohne Operatoren, $\mathfrak{A}$ ihr *absoluter Automorphismenbereich*, d. h. das System aller Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ in sich. $\mathfrak{A}$ ist multiplikativ abgeschlossen, da das Produkt $\sigma\tau$ durch

$$(1) \quad g(\sigma\tau) = (g\sigma)\tau \text{ mit } g \text{ in } \mathfrak{G} \text{ und } \sigma, \tau \text{ in } \mathfrak{A}$$

definiert ist und offenbar dem Assoziativgesetz genügt.

$\mathfrak{G}$ wird bekanntlich zu einer Gruppe mit Operatoren, wenn eine Menge $\mathfrak{B}$ von Symbolen $\Theta, H, \dots$ gegeben ist derart, daß die Verknüpfungen $g\Theta, gH, \dots$ zu eindeutig definierten Elementen aus $\mathfrak{G}$ führen und Automorphismen (Homomorphismen in sich) von $\mathfrak{G}$ erzeugen — $(g \cdot h)\Theta = g\Theta \cdot h\Theta$ —; es existiert also eine *eindeutige* (im allgemeinen nicht umkehrbar eindeutige) *Abbildung* von $\mathfrak{B}$ auf eine Untermenge $\bar{\mathfrak{B}}$ des absoluten Automorphismenbereichs $\mathfrak{A}$. Die oben erwähnte Schlußweise lautet hier so:

Ist der Operatorenbereich $\mathfrak{B}$ multiplikativ abgeschlossen, so ist die eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\bar{\mathfrak{B}}$ dann und nur dann eine multiplikativ-homomorphe, wenn die (1) entsprechende Assoziativrelation

$$(1a) \quad g(\Theta H) = (g\Theta)H \text{ für } g \text{ in } \mathfrak{G} \text{ und } \Theta, H \text{ in } \mathfrak{B} \text{ erfüllt ist.}$$

Entsprechend ist reziproker Homomorphismus definiert, wenn es sich um Linksoperatoren handelt.

Denn die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\bar{\mathfrak{B}}$ ist gegeben durch $g\Theta = g\sigma$ für alle g aus $\mathfrak{G}$, also auch durch $(g\Theta)H = (g\sigma)\tau = g(\sigma\tau)$, so daß (1a) notwendig und hinreichend für multiplikative Homomorphie wird. Daß Linksoperatoren reziproken Homomorphismus erzeugen, kommt daher, daß die links geschriebenen Automorphismen $\sigma^*g, \tau^*\sigma^*g$ von *rechts nach links* zu lesen sind: $\tau^*\sigma^*g = g\sigma\tau$, Operatoren dagegen immer von links nach rechts.

2. Operatorhomomorphe Abbildung. Ist $\mathfrak{G}$ Gruppe mit Operatoren, so wird die Operatorhomomorphie bekanntlich definiert durch

$$(2) \quad (g\Theta)\sigma = (g\sigma)\Theta \text{ bzw. } (2^*) \quad (\Theta g)\sigma = \Theta(g\sigma),$$

also durch kommutative Verbundenheit bzw. durchlaufendes Assoziativgesetz. Daraus ergibt sich nach der Schlußweise von 1. — Abbildung

auf den Automorphismenbereich — für zwei verschiedene Operatorenbereiche:

Sind zwei Operatorenbereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mit Elementen $\Theta, H, \dots$ bzw. $\bar{\Theta}, \bar{H}, \dots$ gegeben, so erzeugen dann und nur dann die $\mathfrak{C}$ -Elemente $\mathfrak{B}$ -Automorphismen und dann zugleich die $\mathfrak{B}$ -Elemente $\mathfrak{C}$ -Automorphismen, wenn die Bereiche kommutativ mit $\mathfrak{G}$ verbunden, bzw. das durchlaufende Assoziativgesetz erfüllt ist:

$$(2a) \quad (g\Theta)\bar{H} = (g\bar{H})\Theta, \quad (2a^*) \quad (\Theta g)\bar{H} = \Theta(g\bar{H}).$$

3. Moduln und Doppelmoduln nach Ringen. Ein *Rechtsmodul* $\mathfrak{M}$ nach einem Ring $\mathfrak{R}$ ist bekanntlich definiert als eine additive abelsche Gruppe mit den Elementen aus $\mathfrak{R}$ als Rechtsoperatoren, wobei neben der Assoziativrelation (1a) und neben der die Operatoren definierenden Relation $(g+h)\Theta = g\Theta + h\Theta$ noch die Distributivrelation (3a)

$$g(\Theta + H) = g\Theta + gH$$

erfüllt ist; entsprechendes gilt für Linksmoduln.

Unter den *Doppelmoduln* sind zwei Arten zu unterscheiden: Rechtsmoduln nach zwei Ringen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ werden als Doppelmoduln bezeichnet, wenn außer den für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ einzeln geltenden Verknüpfungen (1a, 3a) noch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ vermöge (2a) kommutativ mit $\mathfrak{M}$ verbunden sind; $\mathfrak{R}$ -Links-, $\mathfrak{S}$ -Rechts-Moduln heißen Doppelmoduln, wenn (2a*), das durchlaufende Assoziativgesetz, zu den anderen Verknüpfungen hinzukommt.

Die Bedeutung dieser Verknüpfungen ergibt sich daraus, daß im Fall der abelschen Gruppen der absolute Automorphismenbereich einen Ring, den absoluten Automorphismenring bildet⁸⁾. Im einzelnen ergibt die Abbildungsschlußweise:

Ist der Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ einer (additiv geschriebenen) abelschen Gruppe $\mathfrak{M}$ ein Ring, so ist die eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf eine Untergruppe $\bar{\mathfrak{R}}$ des absoluten Automorphismenrings dann und nur dann ringhomomorph, wenn $\mathfrak{M}$ Rechtsmodul nach $\mathfrak{R}$ — also (1a) und (3a) erfüllt ist — reziprok ringhomomorph bei Linksmoduln.

Ist $\mathfrak{M}$ Rechtsmodul nach den Ringen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, so wird $\mathfrak{M}$ dann und nur dann Doppelmodul — (2a) —, wenn $\mathfrak{R}$ sich auf einen Unterring des $\mathfrak{S}$ -Automorphismenringes und dann zugleich $\mathfrak{S}$ auf einen Unterring des $\mathfrak{R}$ -Automorphismenrings ringhomomorph abbilden läßt. Ist $\mathfrak{M}$ Rechtsmodul nach $\mathfrak{S}$, Linksmodul nach $\mathfrak{R}$, so bedeutet Doppelmodul — (2a*) — die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf einen Unterring des $\mathfrak{R}$ -Automorphismenrings, die reziprok homomorphe von $\mathfrak{R}$ auf einen Unterring des $\mathfrak{S}$ -Automorphismenrings.

⁸⁾ Bei nichtabelschen Gruppen handelt es sich um einen „verallgemeinerten“ Ring, vgl. dazu eine in den Math. Annalen erscheinende Arbeit von H. Fitting. [Math. Annalen 107, S. 514—542.]

Die letzte Aussage ergibt eine Präzisierung von bekannten Folgerungen: 1) Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement, so ist $\mathfrak{R}$ direkt isomorph — nicht nur homomorph — zu seinem Automorphismenring als $\mathfrak{R}$ -Linkssmodul; reziprok isomorph zu seinem Automorphismenring als $\mathfrak{R}$ -Rechtsmodul. Denn das durchlaufende Assoziativgesetz (2a*) ist erfüllt, also gilt die Homomorphieaussage. Die Existenz des Einselements ergibt jeden Automorphismus in der Form $e \rightarrow a$ aus $\mathfrak{R}$, also gilt Isomorphie und $\mathfrak{R}$ erschöpft den $\mathfrak{R}$ -Automorphismenring.

2) Ist $\mathfrak{R}$ voller Matrizenring über einem im allgemeinen nichtkommutativen Körper A

$$\mathfrak{R} = \Sigma c_{ik} A = \Sigma A c_{ik},$$

so wird A reziprok isomorph dem Automorphismenkörper der einfachen Rechtsideale, direkt isomorph dem Automorphismenkörper der einfachen Linksideale.

Denn jedes einfache Rechtsideal wird operatorisomorph einem A -Links- und $\mathfrak{R}$ -Rechtsmodul, A erschöpft die $\mathfrak{R}$ -Automorphismen; entsprechend für Linksideale.

4. Übergang von Rechts-Doppelmodul zu einseitigem Modul nach Produktring. Auf diesem Übergang beruht wesentlich die Bedeutung des Rechts-Doppelmoduls.

Satz: Ist $\mathfrak{M}$ Rechtsmodul nach einem Ring $\mathfrak{I}$, der zwei elementweise miteinander vertauschbare Unterringe $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ enthält, so läßt sich $\mathfrak{M}$ auch auffassen als Doppelmodul nach $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Liegt umgekehrt ein Doppelmodul nach $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ vor, existiert ein Produktring $\mathfrak{I}$, in dem $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar sind, so läßt sich $\mathfrak{M}$ auch als Rechtsmodul nach $\mathfrak{I}$ auffassen derart, daß die Verknüpfung nach $\mathfrak{I}$ Fortsetzung der gegebenen nach $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ ist.

Die erste Aussage folgt daraus, daß $\mathfrak{I}$, sich nach Definition homomorph auf einen Unterring $\bar{\mathfrak{I}}$ des absoluten Automorphismenrings abbilden läßt, wobei $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ in elementweise vertauschbare Unterringe $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ übergehen. Das bedeutet aber gerade die den Doppelmodul charakterisierende Relation (2a).

Ist umgekehrt $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Doppelmodul (Rechtsmodul) vorgegeben, so lassen sich wieder $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ homomorph auf elementweise vertauschbare Unterringe $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ des absoluten Automorphismenrings abbilden. Im absoluten Automorphismenring existiert zu $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ der Produktring⁹⁾ $\bar{\mathfrak{I}}$,

⁹⁾ Produktring heißt also nur: der aus zwei Ringen mit gemeinsamem Ober- ring erzeugte Ring, das Produkt braucht nicht direkt zu sein. — Daß bei vorgegebenem Durchschnitt nicht stets ein Produktring zu existieren braucht, zeigt das folgende Beispiel: Sei $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen, sei gesetzt: $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}[x]$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{o}[y]$ mit $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$, so daß also $\mathfrak{o}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, wenn zwischen x und y keine Verknüpfung festgesetzt. Liegen aber $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in einem gemeinsamen Oberring, so kommt: $(2x - 1)y - x(2y - 1) = 0$, also $x = y$. Es gibt also keinen Produktring mit Durchschnitt $\mathfrak{o}$.

welcher wegen der elementweisen Vertauschbarkeit aus allen Elementen der Form $\sum \bar{r}_i \bar{s}_i + \bar{r} + \bar{s}$ besteht (besitzen $\bar{\mathfrak{R}}, \bar{\mathfrak{S}}$ Einselemente, so fallen die Zusatzglieder $\bar{r}, \bar{s}$ fort). Existiert nun auch ein Produktring $\mathfrak{T}$, in dem $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar sind, so besteht dieser entsprechend aus allen Elementen der Form $\sum r_i s_i + r + s$. Die Homomorphismen $\mathfrak{R} \rightarrow \bar{\mathfrak{R}}, \mathfrak{S} \rightarrow \bar{\mathfrak{S}}$ lassen sich also durch die Zuordnung

$$\sum r_i s_i + r + s \rightarrow \sum \bar{r}_i \bar{s}_i + \bar{r} + \bar{s}$$

zu einem Homomorphismus $\mathfrak{T} \rightarrow \bar{\mathfrak{T}}$ ergänzen; also wird die Verknüpfung $m(\sum r_i s_i + r + s) = \sum (m r_i) s_i + m r + m s$ eindeutig und definiert nach § 1, 3. einen $\mathfrak{T}$ -Modul, der den gegebenen $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Modul umfaßt.

§ 2.

Reziproke und direkte Darstellung.

1. Linearformenmoduln. Der Übergang von der in § 1 entwickelten Theorie zur Darstellungstheorie beruht auf der Spezialisierung der dortigen Moduln auf Linearformenmoduln und auf der Betrachtung ihrer Automorphismenringe.

Ein $\mathfrak{S}$ -Rechtsmodul $\mathfrak{M}$ — wo $\mathfrak{S}$ Ring mit Einselement — heißt Linearformenmodul in $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{M}$ direkte Summe von n eingliedrigen $\mathfrak{S}$ -Moduln: $\mathfrak{M} = m_1 \mathfrak{S} + \dots + m_n \mathfrak{S}$ derart, daß $m_i \mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{S}$ operatorisomorph ist, daß also aus $m_i s = 0$ stets $s = 0$ folgt. Es ergibt sich, daß $\mathfrak{S}$ sich nicht nur homomorph, sondern isomorph auf einen Unterring des absoluten Automorphismenrings abbilden läßt.

Satz 1. Ist $\mathfrak{M}$ Linearformenmodul in $\mathfrak{S}$, so wird der $\mathfrak{S}$ -Automorphismenring $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ reziprok isomorph — nicht nur homomorph — dem Ring $\bar{\mathfrak{A}}$ aller n -reihigen Matrizen in $\mathfrak{S}$.

Ein beliebiger $\mathfrak{S}$ -Automorphismus α von $\mathfrak{M}$ ist vollständig beschrieben durch die Zuordnung $m_i \rightarrow \bar{m}_i = m_i \alpha$; denn daraus folgt nach Definition

$$\sum m_i s_i \rightarrow \sum \bar{m}_i s_i = \sum (m_i \alpha) s_i = \sum (m_i s_i) \alpha.$$

Ist nun in Matrixschreibweise

$$(m_1 \alpha, \dots, m_n \alpha) = (m_1, \dots, m_n) A,$$

so gibt — wenn α alle Automorphismen durchläuft — die Zuordnung $\alpha \rightarrow A$ eine eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$. Denn da $\mathfrak{M}$ als Linearformenmodul vorausgesetzt wurde, ist A durch α eindeutig bestimmt, und jede Matrix A vom n -ten Grad in $\mathfrak{S}$ erzeugt einen Automorphismus; es folgt ferner: $\alpha + \beta \rightarrow A + B$, $\alpha \beta \rightarrow BA$, letzteres nach $(m_1 \alpha \beta, \dots, m_n \alpha \beta) = (m_1, \dots, m_n) A \beta = (m_1, \dots, m_n) \beta A$ [wegen $m s \beta = m \beta s$] $= (m_1, \dots, m_n) BA$.

2. Darstellung und Darstellungsmodul. Versteht man unter reziproker bzw. direkter Darstellung n -ten Grades des Ringes $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ einen

reziproken bzw. direkten Ringhomomorphismus von $\mathfrak{R}$ in einen Unterring des Ringes aller n -reihigen Matrizen in $\mathfrak{S}$, so läßt Satz 1 auch die Fassung zu:

Satz 1'. Der Automorphismenring $\mathfrak{A}$ eines Linearformenmoduls n -ten Grades in $\mathfrak{S}$ läßt eine isomorphe (treue) reziproke Darstellung durch den vollen Matrizenring $\overline{\mathfrak{A}}$ aller n -reihigen Matrizen in $\mathfrak{S}$ zu.

Von hier aus ergeben sich die für die direkten Darstellungen üblichen Sätze auch für reziproke.

Definition. Ein Linearformenmodul $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{S}$ heißt reziproker Darstellungsmodul von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{M}$ Doppelmodul nach $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ und zugleich $\mathfrak{R}$ - und $\mathfrak{S}$ -Rechtsmodul — direkter Darstellungsmodul, wenn $\mathfrak{M}$ Doppelmodul und zugleich $\mathfrak{R}$ -Links-, $\mathfrak{S}$ -Rechtsmodul ist.

Satz 2. Jeder reziproke bzw. direkte Darstellungsmodul erzeugt eine Klasse äquivalenter reziproker bzw. direkter Darstellungen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$, und alle reziproken bzw. direkten Darstellungen werden so erzeugt.

Sei vorerst $\mathfrak{M}$ reziproker Darstellungsmodul. Nach § 1, 3. wird dann $\mathfrak{R}$ direkt homomorph abbildbar auf einen Unterring $\overline{\mathfrak{R}}$ des $\mathfrak{S}$ -Automorphismenringes von $\mathfrak{M}$; nach § 2, Satz 1' läßt $\overline{\mathfrak{R}}$ eine reziproke (treue) Darstellung zu, die also auch reziproke Darstellung von $\mathfrak{R}$ wird. Liegt umgekehrt eine reziproke Darstellung $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*$ vor, so ergibt diese durch Zusammensetzung mit dem reziproken Isomorphismus von $\mathfrak{R}^*$ zu einem Unterring $\overline{\mathfrak{R}}$ des $\mathfrak{S}$ -Automorphismenringes einen direkten Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$; also wird $\mathfrak{M}$ zu einem $\mathfrak{R}$ -Modul, und zwar zu einem Doppelmodul, also Darstellungsmodul nach § 1, 3. Übergang zu anderen $\mathfrak{S}$ -Basen gibt die Klasse äquivalenter Darstellungen.

Handelt es sich um direkten Darstellungsmodul, so wird $\mathfrak{R}$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$ reziprok homomorph abgebildet. Die Zusammensetzung mit der reziproken Darstellung von $\overline{\mathfrak{R}}$ ergibt also eine direkte von $\mathfrak{R}$. Umgekehrt folgt aus einer direkten Darstellung eine reziprok homomorphe Abbildung auf $\overline{\mathfrak{R}}$; danach wird $\mathfrak{M}$ zu einem direkten Darstellungsmodul nach § 1, 3.

Bemerkung. Natürlich lassen sich die beiden Arten von Darstellungen aufeinander zurückführen: Eine direkte Darstellung von $\mathfrak{R}$ ist eine reziproke des zu $\mathfrak{R}$ reziproken Ringes und umgekehrt. Eine andere Zurückführung besteht im Übergang von $\mathfrak{S}$ zu einem reziproken Ring und Ersetzung der Matrizen durch die Transponierten. Das entspricht dem Übergang von einem $\mathfrak{R}$ -Links-, $\mathfrak{S}$ -Rechtsmodul zu einem $\mathfrak{R}$ - und $\mathfrak{S}$ -Linksmodul.

3. Übergang vom reziproken Darstellungsmodul zum Modul nach Erweiterungsring. Der Vorzug des reziproken Darstellungsmoduls beruht vor allem auf dem nach § 1, 4. möglichen Übergang zum

Erweiterungsring. Für den hier vorliegenden Spezialfall — $\mathfrak{M}$ Linearformenmodul nach $\mathfrak{S}$ — handelt es sich also um den Übergangssatz für Darstellungsmoduln:

Ist $\mathfrak{M}$ Rechtsmodul nach einem Ring $\mathfrak{I}$, der zwei elementweise vertauschbare Unterringe $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ enthält derart, daß $\mathfrak{M}$ Linearformenmodul nach $\mathfrak{S}$ wird, so läßt sich $\mathfrak{M}$ auch auffassen als reziproker Darstellungsmodul von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{S}$.

Liegt umgekehrt ein reziproker Darstellungsmodul von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{S}$ vor, existiert ein Produktring $\mathfrak{I}$, in dem $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ elementweise vertauschbar sind, so läßt sich $\mathfrak{M}$ auch als $\mathfrak{I}$ -Modul auffassen derart, daß die $\mathfrak{I}$ -Verknüpfung Fortsetzung der gegebenen $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Verknüpfung ist.

In der Darstellungstheorie wesentlich verwandt wird die

Folgerung aus dem Übergangssatz für Darstellungsmoduln.

Ist $\mathfrak{M}$ reziproker Darstellungsmodul von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ und zugleich $\mathfrak{I}$ -Modul mit $\mathfrak{I}$ als Produktring, so ist $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Isomorphismus von $\mathfrak{M}$ zu einem Modul $\mathfrak{N}$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{I}$ -Isomorphismus. Jeder Klasse isomorpher $\mathfrak{I}$ -Moduln entspricht also eine reziproke Darstellungsklasse von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ und umgekehrt.

Die Verbindung dieser Sätze mit § 1, 2. und 3. ergibt den für das Folgende grundlegenden Zusammenhang zwischen den mit einer Darstellung vertauschbaren Matrizen und den $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Automorphismen.

Satz über vertauschbare Matrizen.

Ist $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*$ eine reziproke Darstellung n -ten Grades von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$, bedeutet $\mathfrak{B}^*$ den Ring aller mit $\mathfrak{R}^*$ elementweise vertauschbaren Matrizen (n -ten Grades in $\mathfrak{S}$), so ergibt $\mathfrak{B}^*$ eine reziprokisomorphe Darstellung der $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Automorphismen — also derjenigen $\mathfrak{S}$ -Automorphismen, die zugleich $\mathfrak{R}$ -Automorphismen sind — des erzeugenden Darstellungsmoduls oder auch, falls der Produktring $\mathfrak{I}$ existiert, der $\mathfrak{I}$ -Automorphismen.

Es sei $\mathfrak{B}$ der Ring aller $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Automorphismen von $\mathfrak{M}$. Als Unter-ring des $\mathfrak{S}$ -Automorphismenrings $\mathfrak{A}$ läßt $\mathfrak{B}$ eine reziprok isomorphe Darstellung in $\mathfrak{S}$ zu. Nach § 1, 2. und 3. besteht $\mathfrak{B}$ aus allen solchen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, die kommutativ mit $\mathfrak{R}$ verbunden sind, also der Relation (2a) genügen. $\mathfrak{B}$ besteht demnach aus der Gesamtheit derjenigen Automorphismen, die elementweise vertauschbar mit denjenigen aus $\mathfrak{R}$ sind, wo $\mathfrak{R}$ das Bild von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{A}$ bedeutet. Da es sich bei der Darstellung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R}$ um reziproke Isomorphie, nicht nur Homomorphie, handelt, ist das die zu beweisende Tatsache.

Bemerkung. Die $\mathfrak{R}$ -, $\mathfrak{S}$ -Automorphismen bedeuten eine Zuordnung $m_i \rightarrow m'_i$ derart, daß vermöge der m_i die gleiche Darstellung $\mathfrak{R}^*$ entsteht; dabei brauchen die m'_i nicht notwendig eine $\mathfrak{S}$ -Basis von $\mathfrak{M}$ zu liefern, entsprechend der Tatsache, daß die Matrizen aus $\mathfrak{B}^*$ nicht notwendig

umkehrbar sind. „Darstellung“ ist, wenn die Summe $\sum m'_i \mathfrak{S}$ nicht mehr direkt ist, im übertragenen Sinn zu verstehen:

$$(m'_1, m'_2, \dots, m'_n) a = (m'_1, \dots, m'_n) A$$

bleibt richtig, aber A ist nicht mehr eindeutig durch a bestimmt.

Eine weitere Bemerkung zum Übergangssatz ist die folgende: Die Diagonalmatrizen $E \cdot s$ liefern eine *direkt isomorphe* Darstellung von $\mathfrak{S}$, die „identische“ von $\mathfrak{S}$. Daß es sich hier um *direkten* Isomorphismus handelt, folgt daraus, daß der $\mathfrak{S}$ -Automorphismenring von $\mathfrak{M}$ einen zu $\mathfrak{S}$ reziprok isomorphen Unterring besitzt, um dessen reziproke Darstellung es sich handelt. Denn jeder eingliedrige Summand $m_i \mathfrak{S}$ von $\mathfrak{M}$ ist zu $\mathfrak{S}$ als Rechtsmodul operatorisomorph, sein $\mathfrak{S}$ -Automorphismenring also zu $\mathfrak{S}$ reziprok isomorph (§ 1, 3., Folgerung 1).

Die durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ eindeutig definierte Zuordnung von $\mathfrak{T}$ zu Matrizen in $\mathfrak{S}$ ist also *keine Darstellung des Ringes $\mathfrak{T}$* , sondern die *Erweiterung der reziproken Darstellung von $\mathfrak{R}$ zu einer nach $\mathfrak{S}$ operatorhomomorphen*: $\sum r_i s_i \rightarrow \sum R_i s_i$. Insbesondere ist also die reziproke Darstellung von $\mathfrak{R}$ zugleich *operatorhomomorph in bezug auf den im Zentrum von $\mathfrak{R}$ gelegenen Durchschnitt $[\mathfrak{R}, \mathfrak{S}]$ von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$* .

§ 3.

Moduln in bezug auf einen Körper.

Im folgenden wird es sich nur um Darstellungen in im allgemeinen nichtkommutativen Körpern handeln; es sollen daher einige einfache Sätze über Linearformenmoduln nach einem Körper zusammengestellt werden.

1. Normalbasis eines Untermoduls nach gegebener Basis des vollen Moduls. — Sei A Körper und $\mathfrak{R} = x_1 A + \dots + x_n A$ Linearformenmodul vom Rang n ; sei weiter $\mathfrak{Q} = z_1 A + \dots + z_l A$ Untermodul vom Rang $l \leq n$. Die z_i heißen *Normalbasis nach x* , wenn sie von der Form sind:

$$z_i = x_i - (x_{l+1} \alpha_{i, l+1} + \dots + x_n \alpha_{i, n}) \quad (i = 1, \dots, l).$$

Jeder Modul $\mathfrak{Q}$ besitzt, nach geeigneter Numerierung der x , eine *Normalbasis*.

Denn nach geeigneter Numerierung kommt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{Q} + x_{l+1} A + \dots + x_n A$$

und somit

$$x_i \equiv x_{l+1} \alpha_{i, l+1} + \dots + x_n \alpha_{i, n} \quad (\mathfrak{Q}) \quad (i = 1, \dots, l).$$

Die l Elemente $z_i = x_i - (x_{l+1} \alpha_{i, l+1} + \dots)$ liegen also in $\mathfrak{Q}$ und erschöpfen $\mathfrak{Q}$, da sie zusammen mit $x_{l+1}, \dots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{R}$ bilden.

2. Erweiterungsmodul. Sei wieder A Körper, P Unterkörper. Ein A -Modul $\mathfrak{N}$ vom Rang n heißt *Erweiterungsmodul* eines P -Moduls $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_A$ —, wenn $\mathfrak{M}$ Untermodul gleichen Ranges von $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{M} = y_1 P + \dots + y_n P$, so wird also $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_A = y_1 A + \dots + y_n A$. Umgekehrt existiert zu jedem P -Modul $\mathfrak{M} = y_1 P + \dots + y_n P$ bis auf Modulisomorphie eindeutig der Erweiterungsmodul $\mathfrak{M}_A$. Denn der Modul $\bar{y}_1 A + \dots + \bar{y}_n A$ enthält einen zu $\mathfrak{M}$ isomorphen Untermodul $\bar{\mathfrak{M}}$, der mit $\mathfrak{M}$ identifiziert werden kann.

Folgerung a). Sind $z_1, \dots, z_t$ in bezug auf P linear-unabhängige Elemente aus $\mathfrak{M}$, so sind sie auch linear-unabhängig nach A in $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_A$ (denn sie lassen sich zu einer Basis von $\mathfrak{M}$ und damit von $\mathfrak{N}$ ergänzen). Jeder P -Modul $\mathfrak{I} = z_1 P + \dots + z_t P$ aus $\mathfrak{M}$ erzeugt also einen Erweiterungsmodul $\mathfrak{I}_A = z_1 A + \dots + z_t A$ in $\mathfrak{M}_A$.

Folgerung b). Jeder P -Modul $\mathfrak{I} = z_1 P + \dots + z_t P$ aus $\mathfrak{M}$ ist Verengungsmodul, d. h. Durchschnitt seines Erweiterungsmoduls $\mathfrak{I}_A$ mit $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_A \cap \mathfrak{M}$. Denn $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}_A \cap \mathfrak{M}$; liegt umgekehrt a in $\mathfrak{I}_A \cap \mathfrak{M}$, so kommt $a = \sum z_i \alpha_i$, also sind die $\mathfrak{M}$ -Elemente $a, z_1, \dots, z_t$ abhängig nach A , also [Folgerung a)] auch nach P ; somit liegt a in $\mathfrak{I}$.

3. Satz über invariante Moduln. Sei wieder $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_A$ Erweiterungsmodul eines P -Moduls $\mathfrak{M}$ vom Rang n , sei weiter P voller Invariantenkörper gegenüber einer Gruppe $\mathfrak{G}$ von Ring-Automorphismen von A . Die Gruppe $\mathfrak{G}$ wird definiert als Operatorenbereich von $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_A$ durch die Festsetzungen

$$G \cdot m = m \text{ für } m \text{ aus } \mathfrak{M} \text{ und } G \text{ aus } \mathfrak{G},$$

$$G \cdot \sum m_i \alpha_i = \sum m_i G(\alpha_i) \text{ für } m \text{ aus } \mathfrak{M} \text{ und } \alpha \text{ aus } A.$$

Hilfssatz. Nach diesen Festsetzungen besteht $\mathfrak{M}$ aus der Gesamtheit der bei $\mathfrak{G}$ in Ruhe bleibenden Elemente aus $\mathfrak{N}$. Denn ist $x_1, \dots, x_n$ eine P -Basis von $\mathfrak{M}$, also $w = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$, so ergibt $G(w) = w$ für jedes G aus $\mathfrak{G}$, daß auch $G(\alpha_i) = \alpha_i$, und somit nach Voraussetzung α_i in P .

Satz. Die Erweiterungsmoduln $\mathfrak{L}_A$ der Untermoduln $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$ und nur diese sind zulässige Untermoduln gegenüber $\mathfrak{G}$ als Operatorenbereich. Die erste Hälfte ist klar. Sei umgekehrt $\mathfrak{L}$ zulässig gegenüber $\mathfrak{G}$, sei $z_1, \dots, z_l$ eine Normalbasis von $\mathfrak{L}$ (vgl. 1.) nach x , wobei x als P -Basis von $\mathfrak{M}$ gewählt sei, also $\mathfrak{G}$ elementweise gestattet. Nach Voraussetzung ist

$$G(z_i) = x_i - (x_{i+1} G(\alpha_{i,i+1}) + \dots + x_n G(\alpha_{i,n}))$$

Element von $\mathfrak{L}$ für jedes G aus $\mathfrak{G}$, also bei festem G linear durch die z ausdrückbar und daher, wie sich durch Koeffizientenvergleichung in

$x_1, \dots, x_i$ ergibt: $G(z_i) = z_i$ für jedes G aus $\mathfrak{G}$. Also liegen — nach dem Hilfssatz — die z in $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{L}$ wird *Erweiterung* des P -Moduls $\mathfrak{L} = z_1 P + \dots + z_i P$ aus $\mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ (nach 2)¹⁰).

§ 4.

Hyperkomplexe Systeme und ihre Darstellungsklassen.

1. Erweiterungssatz. Wir verbinden jetzt die Darstellungssätze von § 2 mit den Modulsätzen aus § 3. An Stelle der allgemeinen Ringe $\mathfrak{R}$ betrachten wir *hyperkomplexe Systeme* mit Einselement — $S, T \dots$ — über einem kommutativen Körper P , also

$$S = x_1 P + \dots + x_n P,$$

an Stelle der beliebigen Darstellungsringe $\mathfrak{S}$ nur *Körper* $A, B \dots$, und zwar, wenn nichts anderes bemerkt wird, solche mit *Zentrum* P . In diesem Fall existiert stets der Produktring, in dem S und A elementweise vertauschbar wird, mit Durchschnitt P ; und zwar handelt es sich um das *direkte* Produkt $S \times A$, das zugleich Erweiterungsmodul S_A von S wird im Sinne von § 3

$$S_A = x_1 A + \dots + x_n A$$

und daher auch als *Erweiterungsring* bezeichnet wird.

Bei dieser Spezialisierung geht der Satz über invariante Moduln (§ 3, 3.) über in den

Erweiterungssatz: *Jedes zweiseitige Ideal aus S_A ist Erweiterungsideal eines Ideals aus S , und zwar Erweiterung seines Durchschnitts mit S .*

Ist nämlich die zugrunde gelegte Gruppe $\mathfrak{G}$ die der inneren Automorphismen, so wird P als Zentrum von A voller Invariantenkörper, während die elementweise Vertauschbarkeit von A mit S aussagt, daß $\mathfrak{G}$ nach § 3, 3. auf S_A erweitert ist derart, daß S voller Invariantenbereich wird. Jedes zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}$ aus S_A ist zulässige Untergruppe — wegen $\alpha^{-1} \mathfrak{a} \alpha \leq \mathfrak{a}$ — also nach § 3, 3. Erweiterung seines Durchschnittsmoduls $\mathfrak{a} \cap S$, der Ideal in S wird.

Zusatz: Ist S kommutativ, so wird S Zentrum von S_A . Denn S liegt im Zentrum und ist voller Invariantenbereich gegenüber den durch A erzeugten inneren Automorphismen. *Allgemeiner wird das Zentrum von S auch Zentrum von S_A .*

Bezeichnung: Unter $A_r, B_n \dots$ sollen stets Matrizenringe des angegebenen Grades über $A, B \dots$ verstanden sein, also

$$A_r = \sum A c_{ik} = \sum c_{ik} A.$$

¹⁰) Die Sätze dieses Paragraphen bleiben vermöge einfacher Wohlordnungsschlüsse bestehen, auch wenn der Rang von $\mathfrak{M}$ nach P unendlich wird (vgl. G. Köthe: Ein Beitrag zur Theorie der kommutativen Ringe ohne Endlichkeitsvoraussetzung § 1, Gött. Nachr. 1931, S. 195–207).

Im folgenden wird wesentlich eine Folgerung benutzt, der Erweiterungssatz für einfache Systeme: Ist S einfaches System¹¹⁾, so wird auch S_A einfach: $S_A = \sum B c_{ik} = \sum c_{ik} B = B_i$ mit zugeordnetem Körper B , dessen Zentrum P umfaßt. Dabei kann A und damit auch B von unendlichem Rang über P sein; nur S ist als hyperkomplex vorausgesetzt. Besitzen S und A das gemeinsame Zentrum P , so wird P auch Zentrum von S_A .

Allgemeiner gilt noch: Ist S einfaches hyperkomplexes System, so wird auch das direkte Produkt $S \times A_r$ einfach. Denn $S \times A_r$ stimmt mit $S_A \times P_r$ überein, wird also gleich B_{tr} , wenn $S_A = B_i$.

2. Darstellungsklassen. Unter — reziproker oder direkter — Darstellung eines hyperkomplexen Systems soll, wie üblich, eine solche verstanden werden, die operatorhomomorph in bezug auf den Koeffizientenbereich P (§ 2, Schluß) und von der Nulldarstellung verschieden ist. Die Verbindung des Übergangssatzes und seiner Folgerung (§ 2, 3.) mit dem Erweiterungssatz aus 1. ergibt den

Satz über die Darstellungsklassen: Ist S hyperkomplex mit Einselement, mit P als Koeffizientenbereich, A Körper mit Zentrum P , so besitzt S so viel verschiedene irreduzible reziproke Darstellungsklassen von S in A , wie es Klassen einfacher Rechtsideale im Restklassenring von S_A nach seinem Radikal gibt. — Ist S einfaches System, so besitzt es genau eine irreduzible reziproke und eine irreduzible direkte Darstellungsklasse in A ¹²⁾.

Denn nach der Folgerung aus dem Übergangssatz (§ 2, 3.) entsprechen die einfachen reziproken Darstellungsklassen und die einfachen Modulklassen nach S_A sich eineindeutig. Da S_A von endlichem Rang nach dem Körper A ist, erfüllt es die Maximal- und Minimalbedingung für einseitige Ideale, somit folgt der erste Teil der Aussage direkt aus Darstellungstheorie, § 19. Ist S einfach, so auch S_A nach dem Erweiterungssatz. Wegen der Maximal- und Minimalbedingung ist es zugleich vollständig reduzibel, besitzt also nur eine einfache einseitige Idealklasse, d. h. S besitzt nur eine irreduzible reziproke Darstellungsklasse in A . Mit S ist auch das dazu reziprok isomorphe System einfach, besitzt nur eine irreduzible reziproke Darstellungsklasse; also besitzt S auch nur eine einfache direkte Darstellungsklasse.

3. Rangrelation: Die Tatsache, daß, wenn S einfach, $S_A = \sum B c_{ik}$ von endlichem Rang sowohl nach A wie nach B ist, ergibt die Rangrelation:

$$(1) \quad n = r t \quad \text{mit} \quad n = (S:P), \quad t^2 = (S_A:B), \quad r = \text{Grad der irreduziblen reziproken Darstellung.}$$

¹¹⁾ Einfaches System heißt wie üblich „zweiseitig einfach“.

¹²⁾ Vgl. Darstellungstheorie, Anm. ²⁰⁾, für den Fall, daß A zugeordneter Automorphismenkörper von S ist.

Denn S_A ist selbst reziproker Darstellungsmodul für S in A (die Darstellung liegt schon in P). Als Matrizenring über B zerfällt S_A in t einfache Rechtsideale, also S_A -Moduln, deren Rang nach A gleich dem Grad r der irreduziblen reziproken Darstellung ist. Da n zugleich der Rang von S_A nach A ist, folgt die Rangrelation.

4. Verschärfung der Rangrelation, wenn A von endlichem Rang nach P . In diesem Fall gelten die drei Relationen:

- (1) $(S:P) = n = rt,$
- (2) $(B:P) \cdot t = (A:P) \cdot r,$
- (3) $(S:P) \cdot (B:P) = (A:P) \cdot r^2.$

Dabei bedeutet (2) den Rang nach P eines einfachen Rechtsideals aus S_A , ausgedrückt nach 3. durch den Rang nach B bzw. A , während (3) den Rang eines einfachen Rechtsideals in einem Matrizenring B_n bedeutet und aus (2) durch Multiplikation mit r vermöge (1) hervorgeht.

§ 5.

Anwendung der Darstellungssätze auf Matrizenringe.

Die in § 4 betrachtete reziproke Darstellung von S in A läßt sich auch auffassen als direkter Homomorphismus von S in einen Unterring von A_r , wo A den zu A reziprokisomorphen Körper bedeutet. *Das Prinzip der folgenden Paragraphen ist, umgekehrt die Untersuchung der Matrizenringe A_r auf die Darstellungstheorie im reziprokisomorphen Körper A zurückzuführen.*

1. Reduzible und irreduzible Einbettung in A_r . Es seien A und A reziprok-isomorphe Körper von endlichem oder unendlichem Rang über ihrem Zentrum P^{13}). *Das einfache System S über P heißt irreduzibel bzw. reduzibel in A_r einbettbar, wenn S eine irreduzible bzw. reduzible reziproke Darstellung f -ten Grades in A besitzt.* Ist S irreduzibel einbettbar in A_r , so ist es reduzibel einbettbar in allen Matrizenringen $A_{r,s}$ mit $s > 1$, da es reduzible Darstellungen dieser und nur dieser Grade besitzt (§ 4. 2.). S wird also gewissen Unterringen von A_r und $A_{r,s}$ direkt isomorph. Der Isomorphismus wird Fortsetzung des identischen von P^{14}); nach § 4, 3. ist dabei r ein Teiler des Ranges n von S nach P .

Auf diese Art werden alle P umfassenden, einfachen Unterringe endlichen Ranges nach P der verschiedenen A_f ($f = 1, 2 \dots$) erhalten; denn jeder solche Unterring ist einem Unterring von A_f reziprokisomorph, läßt also eine reduzible oder irreduzible reziproke Darstellung in A zu.

¹³⁾ Allgemein sollen reziproke Körper oder Systeme mit entsprechenden griechischen und lateinischen Buchstaben bezeichnet werden.

¹⁴⁾ Wie schon bei den Darstellungen handelt es sich bei den im folgenden auftretenden Isomorphismen stets um solche, die Fortsetzung des identischen von P — isomorph nach P — sind, ohne daß dies jedesmal besonders vermerkt würde.

2. Satz über innere Automorphismen. Sind $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ zwei P umfassende einfache Unterringe von A_f , von endlichem Rang nach P , und sind $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ isomorph nach P , so wird dieser Isomorphismus durch einen inneren Automorphismus von A_f erzeugt.

Denn $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ bedeuten — im allgemeinen reduzible — Einbettungen eines einfachen Systems S in A_f , somit direkte Darstellungen f -ten Grades in A ; sie gehören also derselben reduziblen direkten Darstellungsklasse in A an; die überführende Matrix erzeugt den Automorphismus.

Ist A selbst von endlichem Rang nach P , also hyperkomplex, so geht der Satz über in den bekannten:

Zwei einfache, das Zentrum P umfassende Untersysteme von A_f , die isomorph nach P sind, gehen durch einen inneren Automorphismus von A_f in sich über. Insbesondere ist jeder Automorphismus von A_f ein innerer¹⁵⁾.

3. Satz über elementweise vertauschbare Unterringe. Dieser Satz folgt aus dem Satz über vertauschbare Matrizen aus § 2, 3. wieder nach dem zu Anfang des Paragraphen erwähnten Prinzip:

Ist S ein einfaches, P umfassendes System aus A_f , bedeutet R die Gesamtheit der mit S elementweise vertauschbaren Elemente aus A_f , so wird auch R Matrizenring: $R = B_s$. Die zugeordneten Körper B von S_A und B von R werden reziprok isomorph. Der Durchschnitt von R und S wird Zentrum von S . R wird dann und nur dann Körper, wenn S irreduzibel in A_f eingebettet ist.

Denn nach § 2, 3. wird R dem Automorphismenring des reziproken Darstellungsmoduls $\mathfrak{M}$ von S in A direkt isomorph; das ist aber der Automorphismenring von $\mathfrak{M}$, aufgefaßt als S_A -Modul. Zerfällt $\mathfrak{M}$ in s einfache S_A -Moduln, wird — wie in § 4, 1. — $S_A = \sum B c_{ik}$ gesetzt, so wird also R isomorph zu $\sum B c_{ik}$, wo B und B reziprok isomorph sind (denn B ist dem Automorphismenkörper der einfachen Rechtsideale aus S_A , also der einfachen S_A -Moduln reziprok isomorph nach § 1, 3. Schluß). R wird dann und nur dann Körper — $R = B$ — wenn s gleich Eins, also S irreduzibel eingebettet ist. Daß der Durchschnitt von R und S das Zentrum von S ist, folgt unmittelbar aus der Definition von R .

4. Verschärfter Vertauschungssatz bei hyperkomplexem Matrizenring. In diesem Falle ergeben die Rangrelationen aus § 4, 4. die Verschärfung:

Die einfachen, P umfassenden Untersysteme aus A_f — wo A von endlichem Rang nach seinem Zentrum P ist — zerfallen in Paare $S, \bar{S}$ derart, daß $\bar{S}$ aus der Gesamtheit der mit S elementweise vertauschbaren

¹⁵⁾ Das gilt nicht mehr, wenn A von unendlichem Rang nach P ist (vgl. Kötke, in der Anm. ⁵⁾ zitierten Arbeit).

Elemente besteht und umgekehrt. Die zugeordneten Körper von S_A und $\bar{S}$ sind reziprok isomorph, ebenso die von S und $\bar{S}_A$. Der Durchschnitt von S und $\bar{S}$ wird gleich dem gemeinsamen Zentrum. Der eine Unterring ist dann und nur dann Körper, wenn der andere irreduzibel eingebettet ist. Das Produkt der Rangzahlen nach P von S und $\bar{S}$ ist gleich dem Rang von A_t . Ist $f = rs = \bar{r}\bar{s}$ — wo S irreduzibel in A_r und $\bar{S}$ irreduzibel in $A_{\bar{r}}$ einbettbar ist —, so werden die zugeordneten Körper von S und $\bar{S}$ isomorph einem Paar vertauschbarer Unterringe aus A_g mit $f = gs\bar{s}$.

Es ist im wesentlichen nur die Aussage über das Produkt der Rangzahlen zu beweisen. Ist vorerst S irreduzibel eingebettet, also $\bar{S}$ Körper und reziprok isomorph zu B — wo $S_A = B_t$ —, so gibt die Rangrelation (3) aus § 4, 4. die Produktaussage, da jetzt $f = r$, und der Rang von $\bar{S}$ gleich dem von B . Ist S reduzibel eingebettet, also $\bar{S} = B_s$, so wird $f = rs$, die Multiplikation von (3) mit s^2 ergibt die Aussage. Hieraus folgt unmittelbar, daß S aus der *Gesamtheit* der mit $\bar{S}$ elementweise vertauschbaren Elemente besteht und damit alles weitere aus 3. bis auf die letzte Aussage. Diese ergibt sich durch zweimaligen Übergang zu irreduzibler Einbettung. In A_r — mit $f = rs$ — wird S irreduzibel eingebettet, S und R werden paarweise vertauschbare Systeme, wobei R dem Körper B isomorph ist. Weiter ist aber S wegen der Reziprozität von S und $\bar{S}$ gleich $\bar{B}_s$ — wo $\bar{B}$ dieselbe Bedeutung für $\bar{S}$ hat wie B für S —, also R reduzibel in A_r eingebettet, irreduzibel in A_g mit $r = g\bar{s}$. Hier werden die paarweise vertauschbaren Systeme also zu B und $\bar{B}$ isomorph.

§ 6.

Galoissche Theorie einfacher Systeme.

Der verschärfte Vertauschungssatz aus § 5, 4. drückt die galoissche Theorie einfacher Systeme in bezug auf das Zentrum als Grundbereich aus. Wir betrachten erst Körper, dann allgemein einfache Systeme.

1. Galoissche Theorie der Körper von endlichem Rang nach dem Zentrum. Die *galoissche Gruppe* $\mathfrak{G}$ von A ist definiert als Gruppe aller Automorphismen, die Fortsetzung des identischen des Zentrums P sind, also (§ 5, 2.) als *Gruppe aller inneren Automorphismen*. Es wird somit $\mathfrak{G}$ isomorph zu A^*/P^* , wo A^* bzw. P^* die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente aus A bzw. P bedeuten. Den Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ entsprechen also eineindeutig die P^* umfassenden Untergruppen H^* von A^* vermöge $\mathfrak{H} \simeq H^*/P^*$. Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ heißt *abgeschlossen*, wenn H^* nach Zufügung der Null in einen Körper H übergeht. Die Tatsache, daß C die Gruppe $\mathfrak{H}$ gestattet, ist gleichbedeutend damit, daß C mit H elementweise vertauschbar ist. Damit geht der Vertauschungssatz (§ 5, 4.) über in den

Hauptsatz der galoisschen Theorie nichtkommutativer Körper:

Die Körper C zwischen P und A und die abgeschlossenen Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ lassen sich eineindeutig einander so zuordnen, daß C voller Invariantenkörper von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ volle Invariantengruppe von C wird.

2. Galoissche Theorie der einfachen Systeme. Ist A , einfaches System mit Zentrum P , so wird die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ wieder die Gruppe der inneren Automorphismen, also isomorph zu A^*/P^* , wo jetzt A^* die multiplikative Gruppe der regulären Elemente aus A , bedeutet. Eine Untergruppe $\mathfrak{H} \simeq H^*/P^*$ von $\mathfrak{G}$ heißt *einfach-abgeschlossen*, wenn der aus H^* erzeugte Unterring H einfaches System ist und wenn H^* aus der Gesamtheit der regulären Elemente von H besteht. Der Übergang vom Vertauschungssatz zur galoisschen Theorie ist hier gegeben durch den

Hilfssatz: *Jedes P umfassende einfache System aus A , wird von der Gruppe H^* seiner regulären Elemente erzeugt.* Das ist klar, wenn P unendlich viele Elemente besitzt; denn das mit Unbestimmten gebildete „allgemeine Element“ ist regulär; durch geeignete Spezialisierung lassen sich reguläre Basiselemente nach P bilden. Der Hilfssatz gilt aber nach Shoda allgemein¹⁶⁾.

Vermöge des Hilfssatzes ist die Vertauschbarkeit von S mit einem einfachen System $\bar{S}$ wieder gleichwertig damit, daß S die durch die regulären Elemente von $\bar{S}$ induzierten Automorphismen gestattet. Somit geht auch hier der Vertauschungssatz (§ 5, 4.) über in den

Hauptsatz der Galoisschen Theorie einfacher Systeme: *Die einfachen, P umfassenden Systeme S aus A , und die einfach-abgeschlossenen Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ lassen sich eineindeutig einander so zuordnen, daß S voller Invariantenbereich von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ volle Invariantengruppe von S wird.*

3. Beweis vermöge des Fortsetzungsprinzips. Ich gebe für den Fall eines Körpers noch einen zweiten Beweis des Hauptsatzes, der auf dem Prinzip der Fortsetzung von Isomorphismen (Darstellungen ersten Grades) beruht und daher ohne Rangabzählung auskommt, weniger Endlichkeitsvoraussetzungen macht. Insbesondere zeigt sich so, in welcher Richtung eine Übertragung auf Körper S von unendlichem Rang möglich sein wird. Der Beweis benutzt auch nicht die Tatsache, daß es nur eine irreduzible reziproke Darstellungsklasse gibt, gilt daher genau so im Kommutativen (§ 8, 2.) Ich schicke einige Hilfssätze voraus.

¹⁶⁾ Shoda, Anm. ³⁾ zitierte Arbeit. Dort wird die Einführung der Unbestimmten vermieden.

Voraussetzungen: Das einfache System S über P lasse eine reziproke Darstellung ersten Grades in A zu, sei also Körper; dabei kann A von endlichem oder unendlichem Rang über seinem Zentrum P sein. Eine Zerlegung von S_A in n einfache (operatorisomorphe) Rechtsideale (§ 4, 3) sei gegeben durch

$$S_A = r_1 + \dots + r_n = e_1 S_A + \dots + e_n S_A = e_1 A + \dots + e_n A;$$

die durch e_i erzeugte reziproke Darstellung ist also definiert durch $e_i s = e_i \sigma$.

Hilfssatz 1: Die n durch $e_1, \dots, e_n$ erzeugten reziproken Darstellungen sind verschieden, also verschiedene Darstellungen derselben Darstellungs-klasse. S besitzt also mindestens so viele verschiedene Darstellungen, wie sein Rang beträgt.

Zum Beweis erweitern wir die Darstellungen aus S nach § 2 Schluß zu Zuordnungen von S_A , die nach A operatorhomomorph werden. Diese Zuordnungen sind hier definiert durch $e_i w = e_i \omega$ mit ω in A für jedes w aus S_A . Würde nun durch e_i und e_j ($i \neq j$) dieselbe Darstellung erzeugt, so käme also $e_i w = e_j w$ für jedes w aus S_A . Das ist aber unmöglich wegen $e_i e_i = e_i, e_j e_i = 0$.

Hilfssatz 2: Ist T Körper zwischen P und S , ist s der Rang von S nach T , so läßt jeder reziproke Isomorphismus von T in A mindestens s verschiedene Fortsetzungen zu.

Der reziproke Isomorphismus, also die reziproke Darstellung von T in A , sei vermittelt durch eine Zerlegung:

$$T_A = E_1 T_A + \dots + E_h T_A = E_1 A + \dots + E_h A; \quad E_i t = E_i \tau,$$

wo die E_i Idempotente sind (das ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da eine durch ein Basiselement $E_i \alpha$ erzeugte Darstellung auch durch $\alpha^{-1} \cdot E_i \alpha$, also ein Idempotent erzeugt wird). Rechtsmultiplikation mit S ergibt $S_A = E_1 S_A + \dots + E_h S_A$. Dabei sind die $E_i S_A$ alle vom Rang s nach A ; denn der Rang von $E_i S_A$ ist höchstens gleich s , wie die Einsetzung einer T -Basis in S vermöge der Vertauschbarkeit von S und A zeigt: $S = T w_1 + \dots + T w_s$

$$E_i S_A = E_i T_A w_1 + \dots + E_i T_A w_s = E_i w_1 A + \dots + E_i w_s A.$$

Da die Summe S_A vom Rang $n = h s$ ist, so hat jedes $E_i S_A$ genau den Rang s . Somit gilt $E_i S_A = r_{i1} + \dots + r_{is} = e_{i1} A + \dots + e_{is} A$, wo die s durch $e_{i1}, \dots, e_{is}$ erzeugten Darstellungen nach Hilfssatz 1 alle verschieden werden. Sie sind sämtlich Fortsetzung der durch E_i erzeugten Darstellung von T ; denn aus $E_i t = E_i \tau$ folgt $(e_{i1} + \dots + e_{is}) t = (e_{i1} + \dots + e_{is}) \tau$ und damit $e_{i1} t = e_{i1} \tau$ wegen der direkten Summenzerlegung.

Definition. Die durch T induzierte Klasseneinteilung $\mathfrak{I}_T$ der reziproken Isomorphismen $\mathfrak{I}$ von S auf A ist so definiert: Es werden alle und nur die Isomorphismen aus $\mathfrak{I}$ als äquivalent betrachtet, die auf T denselben Isomorphismus induzieren.

Hauptsatz: Ist $\mathfrak{I}_T$ die durch T induzierte Klasseneinteilung, so ist T maximaler Unterkörper gegenüber dieser Klasseneinteilung.

Denn ist L Zwischenkörper von T und S , vom Grad l nach T , so spaltet sich nach Hilfssatz 2 jede Klasse aus $\mathfrak{I}_T$ in mindestens l Klassen aus $\mathfrak{I}_L$ auf.

Der Übergang von dieser Fassung des Hauptsatzes zu der üblichen entsteht dadurch, daß die Isomorphismenmenge $\mathfrak{I}$ durch Multiplikation ihrer Elemente mit dem Inversen irgendeines festen in die Automorphismengruppe übergeht, wobei eine Klasse aus $\mathfrak{I}_T$ in die Invariantengruppe von T übergeht. Die Aussage, daß die abgeschlossenen Untergruppen volle Invariantengruppen sind, ist darin mitenthalten; man hat nur für $\mathfrak{H} \simeq H^*/P^*$ den Körper H als Zwischenkörper T einzusetzen.

§ 7.

Die Klasse ähnlicher Algebren. Zerfällungskörper.

Von jetzt an wird es sich nur um Körper A , A und Matrizenringe A , handeln, die von endlichem Rang nach ihrem Zentrum P sind; also um einfache, normale Algebren über P , die kurz als *Algebren über P* oder auch nur als *Algebren* bezeichnet werden sollen; A , A sind dann *Divisionsalgebren*.

In eine *Klasse ähnlicher Algebren* — $A_r \sim A_s$ — werden alle A_r mit demselben zugeordneten A zusammengefaßt. Isomorphe A werden dabei identifiziert.

1. Die Gruppe der Algebrenklassen. Sind A_r , B_s Algebren über P , so gilt das gleiche für ihr Produkt (direktes Produkt nach P); denn nach § 3 Schluß kommt: $A_r \times B_s = C_t$, wo C eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Divisionsalgebra mit dem Zentrum P ist. Die Multiplikation von A_r , B_s mit Matrizenringen über P zeigt, daß diese Multiplikation *eindeutig* für die Klassen bestimmt ist, die somit ein multiplikativ abgeschlossenes, kommutatives System bilden. Darüber hinaus gilt der

Satz von R. Brauer: *Die Klassen ähnlicher Algebren bilden gegenüber der direkten Produktbildung eine abelsche Gruppe.* Denn das System besitzt eine Einsklasse, bestehend aus den Matrizenringen über P , also den P ähnlichen Algebren. Es besitzt ferner zu jeder Klasse (A) die inverse $(A)^{-1}$, bestehend aus den zu A ähnlichen Algebren, wo A zu A reziprok isomorph ist. Das folgt aus dem Vertauschungssatz § 5, 3. ver-

möge der Spezialisierung $S = A$. Denn A läßt sich irreduzibel in A selbst einbetten; es kommt also $B = P$ und $A_A = P_t^{17}$).

2. Zerfällungskörper einer Algebrenklasse. Die Theorie der Zerfällungskörper beruht wieder vollständig auf dem zu Anfang von § 5 ausgesprochenen Prinzip; die kommutativen Erweiterungskörper werden in A bzw. A dargestellt. Vorausgeschickt sei der

Hilfssatz: Ist A Körper mit dem Zentrum P , ist Z endlicher kommutativer Erweiterungskörper von P , so wird A_Z einfach mit Zentrum Z .

Denn das gilt nach § 4, 1. für das zu A_Z reziprok isomorphe System Z_A . Für jede Klasse (A) von zu A ähnlichen Algebren über P erzeugt also Z eine *Erweiterungsklasse* $(A)_Z$ von zu A_Z ähnlichen einfachen Algebren über Z .

Die zugeordnete Divisionsalgebra D einer Erweiterungsklasse ergibt sich sofort aus dem Vertauschungssatz aus § 5, 3.:

Satz über die zugeordnete Divisionsalgebra einer Erweiterungsklasse: Es sei $(A)_Z$ Erweiterungsklasse, Z bedeute eine irreduzible Einbettung (Darstellung) von Z in A_r . Dann wird $(A)_Z = (D)$, wo D aus der Gesamtheit der mit Z elementweise vertauschbaren Elemente aus A_r besteht.

Man hat nur in § 5, 3. das dortige einfache System S durch Z zu ersetzen unter Berücksichtigung, daß Z_A und A_Z reziprok isomorph sind. Handelt es sich um reduzible Einbettung von Z , so ergibt die Gesamtheit der mit Z elementweise vertauschbaren Elemente einen Matrizenring über D .

Ein kommutativer Erweiterungskörper Z von P heißt bekanntlich *Zerfällungskörper* der Klasse (A) , wenn die Erweiterungsklasse $(A)_Z$ vollständig zerfällt, d. h. gleich der Einsklasse über Z wird, also die Klasse aller Matrizenringe über Z .

Satz über die Charakterisierung der Zerfällungskörper. Ein endlicher kommutativer Erweiterungskörper Z von P ist dann und nur dann Zerfällungskörper der Klasse (A) , wenn seine irreduzible Einbettung in A_r einen maximalen kommutativen Unterkörper von A_r ergibt.

Denn die Eigenschaft von Z , Zerfällungskörper von (A) zu sein, ist gleichbedeutend mit $(D) = (Z)$. Es muß also nach dem Satz über die zugeordnete Divisionsalgebra die irreduzible Einbettung Z maximal kommutativer Unterkörper sein. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird notwendig

¹⁷⁾ Die feineren Sätze über die Gruppe der Algebrenklassen benutzen die Theorie der Faktorensysteme; darauf soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es sei bemerkt, daß bis zu dieser Stelle keine Überlegungen über kommutative Körper auftreten; z. B. wurde die Tatsache, daß der Rang $(A:P)$ eine Quadratzahl ist, weder benutzt noch bewiesen.

$D = Z$, da jedes a aus D durch Adjunktion zu Z einen kommutativen Erweiterungskörper erzeugt.

Bemerkungen. 1. Es folgt zugleich, daß ein *maximal-kommutativer Unterkörper* Z bei *irreduzibler* Einbettung einen *maximal-kommutativen Unter-ring* erzeugt. Denn die Gesamtheit der mit Z elementweise vertauschbaren Elemente bildet einen Körper.

2. Der Satz ergibt zugleich die *Existenz* der Zerfällungskörper; denn die zugeordnete Divisionsalgebra A besitzt sicher maximal-kommutative Unterkörper.

3. Rangrelationen, Index, unendliche kommutative Erweiterungen. Die Rangaussage aus § 5, 4. ergibt zunächst die bekannte Tatsache, daß der Rang einer einfachen Algebra nach dem Zentrum eine Quadratzahl ist; denn ist Z maximal-kommutativ in A , so kommt, da in A jede Einbettung irreduzibel: $(Z:P) \cdot (Z:P) = (A:P)$, somit $(A:P) = m^2$; $(Z:P) = m$, wo m der *Schursche Index*, der also zugleich den Grad aller in der Divisionsalgebra A selbst einbettbaren Zerfällungskörper bedeutet. Weiter kommt für den Grad n eines allgemeinen Zerfällungskörpers: $n = m \cdot r$ ¹⁸⁾, etwa wegen $(A_r:P) = m^2 \cdot r^2$ oder auch nach der Rangrelation § 4, 3., letzteres, weil der Index m auch gleich der Anzahl der einfachen Komponenten von A_Z ist, das Matrizenring über Z vom Rang m^2 wird. Ist allgemeiner $A_A \sim D$, ist L die irreduzible Einbettung von A in A_r und d^2 der Rang $(D:L)$ der Divisionsalgebra D über ihrem Zentrum L , so kommt: $l \cdot d = m \cdot r$; denn nach § 5, 4. und dem Satz über die zugeordnete Divisionsalgebra aus 4. kommt: $(A_r:P) = (L:P) \cdot (D:P)$ oder $m^2 r^2 = l^2 d^2$.

Aus der Existenz der Zerfällungskörper folgen für unendliche kommutative (algebraische oder transzendente) Erweiterungskörper Ω von P die Tatsachen:

Die *Erweiterungsklasse* $(A)_\Omega$ ist eine Klasse einfacher Algebren mit dem Zentrum Ω . Ist insbesondere Ω algebraisch-abgeschlossen, so wird A_Ω Matrizenring vom Grad m . Der Index ist also gleich der „absoluten Komponentenzahl“.

Denn ist Z Zerfällungskörper von A und $\bar{\Omega}$ Kompositum vom Ω und Z , so wird $A_{\bar{\Omega}}$ Matrizenring über $\bar{\Omega}$, also ohne Radikal und mit Zentrum $\bar{\Omega}$. Somit ist auch A_Ω ohne Radikal und sein Zentrum Ω (da ein von Ω verschiedenes Element von A_Ω auch im Zentrum von $A_{\bar{\Omega}}$ läge) also Körper. A_Ω ist also einfache Algebra über Ω , sicher Matrizenring über Ω , wenn Ω algebraisch abgeschlossen ist.

¹⁸⁾ Im allgemeinen gibt es auch „minimale“ Zerfällungskörper — d. h. solche, für die kein echter Unterkörper Zerfällungskörper ist — von allen Gradzahlen. Vgl. Brauer-Noether, Anm. ²⁾ zitierte Arbeit.

4. Existenz von separablen Zerfällungskörpern.

Jede Klasse (A) besitzt separable Zerfällungskörper, sogar solche, die in A selbst einbettbar sind¹⁹⁾.

Es sei der Grundkörper P von der Charakteristik p ; der Index $m = s \cdot p^g$ mit s zu p teilerfremd. Ist dann Z ein Zerfällungskörper von A vom Grade m und Z_0 die darin enthaltene Erweiterung erster Art — also $(Z:Z_0) = p^f$ —, so wird der Index von $A_{Z_0} \sim D$ gleich p^f (nach 3.). Es soll die Existenz eines separablen Erweiterungskörpers Z_1 von Z_0 nachgewiesen werden, derart, daß der Index von D_{Z_1} ein echter Teiler von p^f wird. Nun ist D_Ω mit algebraisch-abgeschlossenem Ω nach 3. ohne Radikal; die reduzierte Diskriminante von D verschwindet also nicht. Es gibt also mindestens ein Element d aus D mit nichtverschwindender (reduzierter) Spur; dabei kann d nicht schon im Grundkörper Z_0 liegen, da die Spur von jedem Element α aus Z_0 gleich $p^f \alpha$ wird, also verschwindet. $Z_1 = Z_0(d)$ wird also echter, und zwar separabler Erweiterungskörper; der Index von D_{Z_1} wird echter Teiler von p^f . Die endlich oftmalige Wiederholung führt also zu einem separablen Zerfällungskörper von (A) , dessen Grad m mit dem Index von A übereinstimmt.

§ 8.

Zerfällungskörper, Abspaltungskörper und galoissche Theorie im Kommutativen.

Um von den Zerfällungskörpern der über ihrem Zentrum einfachen Systeme zu denjenigen beliebiger einfacher Systeme überzugehen, ist noch die Zerfällungstheorie des Zentrums zu entwickeln, der noch eine zu § 6, 3. parallel laufende galoissche Theorie hinzugefügt werden soll. (Alle in diesem Paragraphen auftretenden Körper und Systeme sind kommutativ.)

1. Zerfällungs- und Abspaltungskörper kommutativer einfacher Systeme. Das kommutative System Z sei einfach über P , also Körper, Ω ein algebraisch-abgeschlossener Erweiterungskörper von P . Dann gilt bekanntlich (Darstellungstheorie § 21):

Dann und nur dann bleibt Z_Ω System ohne Radikal, wenn Z separabel (Erweiterung erster Art) über P ist.

Denn dann und nur dann besitzt es soviel isomorphe Abbildungen ersten Grades in Ω wie sein Rang nach Ω beträgt, also auch ebensoviel verschiedene Darstellungen, die hier mit Darstellungsklassen übereinstimmen.

¹⁹⁾ Vgl. G. Köthe, Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum, Journ. f. Math. 166 (1932), S. 182—184. Der vorliegende viel einfachere Beweis geht auf eine Bemerkung von M. Zorn zurück.

Die Tatsache, daß in $Z_{\mathfrak{Q}}$ ein Radikal auftreten kann, also nicht notwendig direkte Summenzerlegung in absolut einfache Komponenten statthat, führt zu den folgenden

Definitionen: Ein Erweiterungskörper A von P heißt Zerfällungskörper, wenn Z_A in Kompositionsfaktoren ersten Grades zerfällt; mit anderen Worten, wenn alle absolut irreduziblen Darstellungen schon in A liegen. Ein Erweiterungskörper T von P heißt Abspaltungskörper, wenn Z_T mindestens einen Kompositionsfaktor ersten Grades abspaltet; mit anderen Worten, wenn mindestens eine absolut irreduzible Darstellung von Z in T existiert.

Zerfällungs- und Abspaltungskörper lassen sich charakterisieren nach dem

Satz: Ein Körper T ist dann und nur dann Abspaltungskörper, wenn er einen zu Z isomorphen Unterkörper Z enthält; ein Körper A ist dann und nur dann Zerfällungskörper, wenn er einen Unterkörper Γ enthält, der dem zu Z gehörigen galoisschen Körper isomorph wird.

Das folgt direkt aus der Definition von Zerfällungs- und Abspaltungskörper vermöge absolut irreduzibler Darstellungen. Insbesondere ergibt sich in Analogie zum Nichtkommutativen die

Folgerung: Ein Körper Z ist dann und nur dann minimaler Abspaltungskörper — d. h. kein echter Unterkörper Abspaltungskörper —, wenn er zu Z isomorph ist (wenn also seine irreduzible kommutative Einbettung in Z einen maximalen kommutativen Unterkörper von Z darstellt). Ein minimaler Abspaltungskörper ist dann und nur dann zugleich Zerfällungskörper, wenn Z normal, also galoisscher Körper über P ist.

Hierin liegt der Grund dafür, eine einfache Algebra normal über ihrem Zentrum zu nennen. Die Tatsache, daß es innerhalb eines festen algebraisch-abgeschlossenen Ω über P nur einen einzigen minimalen Zerfällungskörper gibt, den zu Z gehörigen galoisschen, im Gegensatz zu den im allgemeinen unendlich vielen nicht isomorphen im Nichtkommutativen²⁰⁾, hat ihren Grund in der eindeutigen direkten Summenzerlegung im Kommutativen im Gegensatz zu der nur bis Operatorisomorphie eindeutigen im Nichtkommutativen oder — was auf dasselbe hinauskommt — in den nur endlich vielen verschiedenen absolut irreduziblen Darstellungen an Stelle der unendlich vielen verschiedenen im Nichtkommutativen —, die allerdings derselben Klasse angehören (vgl. 2.).

2. Hyperkomplexe Begründung der galoisschen Theorie im Fall separabler Körper Z/P . In genauer Analogie zu § 6, 3. gilt hier die Theorie der Isomorphismen für beliebige, über P separable Z ; im Fall

²⁰⁾ R. Brauer - E. Noether, a. a. O.

eines galoisschen Z läßt sich dann der Übergang zur üblichen Automorphismengruppe machen.

Voraussetzungen: Das einfache System Z über P sei endlicher separabler Erweiterungskörper, Ω bedeute einen über P endlichen oder unendlichen Zerfällungskörper, $Z = Z^{(1)}$ einen zu Z isomorphen Unterkörper, Γ den zugehörigen galoisschen. Nach 1. gilt also (Z separabel!) die direkte Summenzerlegung:

$$Z = r^{(1)} + \dots + r^{(n)} = e^{(1)} Z_{\Omega} + \dots + e^{(n)} Z_{\Omega} = e^{(1)} \Omega + \dots + e^{(n)} \Omega.$$

Die durch $e^{(i)}$ erzeugte Darstellung $Z \rightarrow Z^{(i)}$ mit $Z^{(i)} \leq \Gamma$ ist also definiert durch $e^{(i)} z = e^{(i)} \zeta^{(i)}$.

Hilfssatz 1: Die n durch $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ erzeugten Darstellungen sind alle verschieden.

Beweis wie in § 6, 3. oder auch nach 1.; denn sie gehören verschiedenen Darstellungsklassen an.

Hilfssatz 2: Ist T Zwischenkörper von P und Z , ist s der Rang von Z nach T , so läßt jeder Isomorphismus von T in Ω mindestens, und daher genau, s Fortsetzungen zu.

Beweis wie in § 6, 3. Daß hier mindestens zu genau verschärft wird, folgt aus der Tatsache der eindeutigen Zerlegung von Z_{Ω} , nach der Z nicht mindestens, sondern genau n Isomorphismen in Ω besitzt (vgl. dazu die Bemerkungen am Schluß von 1.).

Wie in § 6, 3. definiert man jetzt die durch T induzierte Klasseneinteilung $\mathfrak{I}_T$ der (endlichen) Menge $\mathfrak{I}$ der Isomorphismen von Z — alle und nur die Isomorphismen aus $\mathfrak{I}$ werden in $\mathfrak{I}_T$ als äquivalent betrachtet, die auf T denselben Isomorphismus induzieren — und beweist den

Hauptsatz: Ist $\mathfrak{I}_T$ die durch T induzierte Klasseneinteilung, so ist T maximaler Unterkörper gegenüber dieser Klasseneinteilung.

Von hier aus kann man für den Fall eines galoisschen Z genau wie in § 6, 3. durch Zusammensetzung mit dem Reziproken eines Isomorphismus zur Automorphismengruppe und zur üblichen Fassung übergehen. Die entsprechende Aussage für die Untergruppen ergibt sich aus der Betrachtung der Idempotente, die an sich von Interesse ist.

3. Die Idempotente von Z_{Ω} . Es durchlaufe S die n Substitutionen, die Z in die einzelnen $Z^{(i)}$ überführt, also die Zusammensetzung der Isomorphismen: $Z \rightarrow Z$, und $Z \rightarrow Z^{(i)}$, wo somit der erstere den zu $Z \rightarrow Z$ reziproken bedeutet. Z braucht nicht galoissch zu sein. Für die Elemente a aus Z_Z seien die Substitutionen S als Operatoren definiert durch die Festsetzung, daß sie auf Z die Identität induzieren; zu jedem a ist somit das in $Z_{Z^{(i)}}$ liegende konjugierte a^S definiert. Bei diesen Festsetzungen gilt der

Satz: Die n Idempotente $e^{(i)}$ von Z_Ω sind konjugiert: $e^{(i)} = e^S$ mit $e = e^{(1)}$; sie liegen in den n konjugierten Erweiterungssystemen $Z_{Z^{(i)}}$.

Denn die Anwendung von S führt die Definitionsrelationen $ez = e\zeta^{(1)}$; $e^2 = e$ über in $e^S z = e^S \zeta^{(i)}$; $(e^S)^2 = e^S$. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung sind auch die Idempotente eindeutig bestimmt; also $e^{(i)} = e^S$. Da ferner Z Abspaltungskörper ist, also die Darstellung $ez = e\zeta$ schon vermittelt, liegt e schon in Z_Z und damit $e^{(i)}$ in $Z_{Z^{(i)}}$.

Ist speziell Z galoissch, so folgt unmittelbar der auf die Untergruppen bezügliche Teil des Hauptsatzes der galoisschen Theorie; denn ist $\mathfrak{H}$ Untergruppe der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$, so gestattet — wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Komponenten einer direkten Summe — das Element Σe^H mit H in $\mathfrak{H}$ alle Substitutionen aus $\mathfrak{H}$, aber keine davon verschiedenen. Da die Gruppe $\mathfrak{G}$ für Z definiert war, handelt es sich um die galoissche Theorie von Z ; wegen der Isomorphie ist damit die für Z mit erledigt.

4. Zusammenhang der Idempotente mit den komplementären Basen. Z wird wieder nicht notwendig als galoissch vorausgesetzt.

Satz: Ist $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von Z über P , wird das Idempotent $e = a_1 \beta_1 + \dots + a_n \beta_n$ gesetzt — also $e^S = a_1 \beta_1^S + \dots + a_n \beta_n^S$ — so bedeutet $\beta_1^S, \dots, \beta_n^S$ das Bild der Komplementärbasis $b_1, \dots, b_n$ zu $a_1, \dots, a_n$ in der durch e^S vermittelten Abbildung.

Denn bei der durch e^S vermittelten Abbildung $e^S z = e^S \zeta^S$, insbesondere $e^S a_i = e^S \alpha_i^S$, gelten wegen $e^S \cdot e^S = e^S$; $e^S \cdot e^R = 0$ ($S \neq R$) die Zuordnungen $e^S \rightarrow 1$; $e^R \rightarrow 0$. Also kommt:

$$1 = \alpha_1^S \beta_1^S + \dots + \alpha_n^S \beta_n^S; \quad 0 = \alpha_1^S \beta_1^R + \dots + \alpha_n^S \beta_n^R \quad (S \neq R),$$

oder in Matrizen geschrieben, die Definitionsgleichung der komplementären Basen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1^S \dots \alpha_n^S \\ \dots \dots \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \dots \beta_1^R \dots \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ \beta_n \dots \beta_n^R \dots \end{pmatrix} = E.$$

Der Übergang zur Spurendefinition folgt daraus, daß für $a_i = \sum_S e^S \alpha_i^S$ und $b_i = \sum_S e^S \beta_i^S$ die Matrixrelation nach Vertauschung der Matrizen übergeht in

$$Sp(a_i b_i) = 1; \quad Sp(a_i b_k) = 0 \quad \text{für } i \neq k^{21}.$$

Dabei liegen die a_i und b_i in Z , da sie alle Substitutionen S gestatten (Hilfssatz § 3, 3.)²²⁾.

²¹⁾ Vgl. Darstellungstheorie § 25.

²²⁾ Beziehungen zwischen den komplementären Basen und den Idempotenten finden sich erstmalig bei Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen (vgl. Bd. II der Gesammelten Werke, S. 4–5).

Die Kontragredienz der komplementären Basen folgt hier aus der Tatsache, daß die Idempotente e^S Invarianten von Z sind, unabhängig von der zugrunde gelegten Basis, daß also alle $a_1\beta_1^S + \dots + a_n\beta_n^S$ in sich übergehen beim Übergang zu einer anderen Basis $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ von Z/P .

§ 9.

Zerfällungskörper und Abspaltungskörper beliebiger Systeme.

1. Definitionen und Reduktion auf den einfachen Fall. Den in § 8 gegebenen Definitionen entsprechen im allgemeinen Fall die

Definitionen: Sei S hyperkomplex über P . Ein (kommutativer) Erweiterungskörper A von P heißt Zerfällungskörper von S , wenn S_A bei einer Kompositionsreihe aus einseitigen Idealen in absolut einfache Kompositionsfaktoren zerfällt; mit anderen Worten, wenn alle irreduziblen Darstellungen von S in A schon absolut irreduzibel sind. Ein Erweiterungskörper T von P heißt Abspaltungskörper, wenn S_T mindestens einen absolut einfachen Kompositionsfaktor abspaltet, wenn also mindestens eine in T irreduzible Darstellung schon absolut irreduzibel ist.

Diese Definitionen enthalten offenbar die in § 8 für das Kommutative, in § 7 für einfache Algebren gegebenen in sich; das letztere, weil hier A_A bei jeder kommutativen Erweiterung des Zentrums vollständig reduzibel ist und somit Kompositionsfaktoren und Komponenten der direkten Summenzerlegung übereinstimmen. Volle Matrizenringe über dem Zentrum und nur diese ergeben aber hier absolut einfache Komponenten, also auch absolut irreduzible Darstellungen. Da ferner A_A zwei-seitig einfach ist, also in operatorisomorphe Komponenten zerfällt, so ergibt das Abspalten einer absolut einfachen Komponente schon das vollständige Zerfallen: Abspaltungs- und Zerfällungskörper fallen zusammen.

Aus den Definitionen ergeben sich unmittelbar die Tatsachen:

Die Zerfällungskörper von S sind gegeben als Vereinigungskörper je eines Zerfällungskörpers der in P irreduziblen Darstellungen; Abspaltungskörper von S ist jeder Abspaltungskörper einer in P irreduziblen Darstellung.

Wegen des eindeutigen Entsprechens der einfachen Systeme — Komponenten des Restklassenrings nach dem Radikal — und der in P irreduziblen Darstellungen genügt also die *Betrachtung einfacher Systeme*. Hier werden die Resultate sich durch Kombination von § 7 und § 8 ergeben.

2. Zerfällungskörper und Abspaltungskörper einfacher Systeme. Wir betrachten vorerst den Fall eines einfachen Systems A mit *separablem* Zentrum Z über P . Aus § 8, 1. und § 8, 3. kommt:

Die der direkten Summenzerlegung von Z_Ω entsprechende zweiseitige Zerlegung von A_Ω — wo Ω einen Zerfällungskörper von Z bedeutet — ergibt n konjugierte zu A isomorphe Komponenten $e^{(i)}A$ von A , die einfache Algebren über ihrem Zentrum $e^{(i)}Z^{(i)} = e^{(i)}Z$ werden. Dabei sind die Substitutionen S als Operatoren für A_Z definiert durch die Festsetzung, daß sie auf A die Identität induzieren. (Vgl. § 8, 3.)

Denn nach § 8, 3. sind die Idempotente konjugiert, also gilt das gleiche von den Komponenten $e^{(i)}A$ nach Definition der Substitutionen für A . Da A zweiseitig einfach ist, wird $e^{(i)}A$ ringisomorph zu A . Dabei wird $e^{(i)}A = e^{(i)}A_{Z^{(i)}}$ wegen $e^{(i)}Z = e^{(i)}Z^{(i)} = e^{(i)}Z_{Z^{(i)}}$; das Zentrum fällt also mit dem Koeffizientenbereich zusammen, es handelt sich bei den Komponenten um normale Algebren.

Die Resultate von § 7, 2. ergeben jetzt weiter:

Ist A einfaches System über P mit separablem Zentrum Z über P , so wird auch A_Ω ohne Radikal, also vollständig reduzibel; dabei kann Ω irgendeinen endlichen oder unendlichen Erweiterungskörper bedeuten.

Denn nach § 7, 2 bleibt $e^{(i)}A_{Z^{(i)}}$ einfach bei jeder Koeffizientenerweiterung, also ohne Radikal. Somit gilt das gleiche für die direkte Summe; diese ist aber A_Ω oder entsteht — wenn Ω kein Zerfällungskörper von Z ist — durch Koeffizientenerweiterung aus A_Ω . Weiter folgt aus § 7, 2. die

Charakterisierung der Abspaltungskörper und Zerfällungskörper.

Ist A Divisionsalgebra mit separablem Zentrum Z , so sind die irreduziblen Einbettungen der Abspaltungskörper gegeben durch alle und nur die Z umfassenden, maximalen, kommutativen Unterkörper der A ; Zerfällungskörper sind alle und nur die Vereinigungskörper eines Abspaltungskörpers mit einem Zerfällungskörper des Zentrums, insbesondere mit dem zum Zentrum gehörigen galoisschen Körper. Ein minimaler Abspaltungskörper kann Zerfällungskörper sein, auch ohne daß das Zentrum galoissch ist.

Denn ein Abspaltungskörper muß einen zu Z isomorphen Körper umfassen; die Einbettungsaussage über die Abspaltungskörper folgt jetzt aus den vorangehenden Tatsachen und aus § 7, 2. Ein Zerfällungskörper muß ferner einen Zerfällungskörper Ω zu Z umfassen. Jeder Abspaltungskörper über Ω ist aber zugleich Zerfällungskörper, da die Komponenten $e^{(i)}A_\Omega$ einfach sind und ein zu Ω isomorphes Zentrum besitzen. Ist Z galoissch, so fallen also minimale Abspaltungs- und Zerfällungskörper zusammen. Aber auch im nichtgaloisschen Fall kann es — anders als im Kommutativen — minimale Abspaltungskörper geben, die zugleich Zerfällungskörper sind, nämlich sobald ein solcher minimaler Abspaltungskörper den zu Z gehörigen galoisschen Körper umfaßt [Beispiel: Quater-

nionenkörper mit zu $P(\sqrt[3]{2})$ isomorphem Zentrum, P Körper der rationalen Zahlen; der zu $P(\sqrt[8]{2})$ gehörige galoissche Körper ist minimaler Abspaltungs- und Zerfällungskörper].

Handelt es sich schließlich um *inseparables* Zentrum, so wird Z_Ω und damit A_Ω System mit Radikal. Sei etwa $\mathfrak{C}$ Radikal von Z_Ω und $\mathfrak{c}$ das Erweiterungsideal in A_Ω . Dann gilt für $Z_\Omega/\mathfrak{C}$ eine direkte Summenzerlegung in konjugierte Komponenten, in genauer Analogie zu § 8, 2.; das ergibt genau wie oben die direkte Summenzerlegung von $A_\Omega/\mathfrak{c}$, derart, daß die Komponenten $\bar{e}^{(i)}A$ zu A isomorph mit Zentrum $\bar{e}^{(i)}Z^{(i)}$. Also bleiben auch die Sätze über Abspaltungs- und Zerfällungskörper erhalten. Weiter zeigt die Rangabzählung, daß die einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{C}$ entsprechenden Kompositionsfaktoren zu $A_\Omega/\mathfrak{c}$ operatorisomorph, nicht nur homomorph werden.

Für irreduzible Darstellungen ausgesprochen, ergibt sich also die Zusammenfassung: *Liegt eine in P irreduzible Darstellung eines hyperkomplexen Systems vor, so wird die Darstellung dann und nur dann absolut vollständig reduzibel, wenn das zugehörige Zentrum über P separabel ist. In jedem Fall lassen sich Zerfällungs- und Abspaltungskörper der Darstellung durch Einbettung in das zugehörige einfache System wie oben charakterisieren. Insbesondere wird der niedrigste Grad eines Abspaltungskörpers gleich dem Produkt aus dem Grad des Zentrums mit dem Index der zugehörigen Algebrenklasse über dem Zentrum, der Grad von jedem Abspaltungskörper ein Vielfaches davon. Die Darstellung zerfällt — im Sinn der Kompositionsreihen — in so viele verschiedene, aber konjugierte absolut irreduzible Darstellungsklassen, wie der Grad des größten im Zentrum enthaltenen separablen Körpers beträgt. Jede Klasse tritt so oft auf, wie das Produkt aus Index und Grad des Zentrums nach dieser separablen Erweiterung ausmacht.*

Für vollkommenen Grundkörper, wo es nur separable Erweiterungskörper gibt, kommen wir so auf bekannte Resultate von I. Schur zurück; unter Zufügung der Einbettungscharakterisierung, die sich schon bei R. Brauer findet.

(Eingegangen am 8. Juni 1932.)

A matrix theory of measurement¹⁾.

By

Arthur H. Copeland.

1. Definition of an Admissible Variate. The assumptions underlying the theory of measurement appear at first simple and natural, but when we examine them more closely we discover that it is by no means obvious that they are even consistent. We can not use physical experiment as a means of testing consistency since some of our assumptions involve considerations of limits of certain functions of the measurements as the number of measurements is allowed to become infinite. Thus we shall replace the physical universe by an imaginary universe in which the measurements are made in accordance with mathematical laws. We shall replace sets of physical measurements by infinite matrices of numbers. We can express our assumptions in terms of the properties of these matrices. Thus the problem of proving consistency resolves itself into the problem of proving the existence of certain matrices²⁾.

Let us consider a matrix of the form, $x = x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$, where the k th term, $x^{(k)}$, is an arbitrary number. Such a matrix will be called a variate. We shall define the mean (or probable) value of the matrix, x , as

$$(1) \quad p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) \quad \text{where} \quad p_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{(k)} / n.$$

It is, of course, possible that the limit, $p(x)$, may not exist. In this case it is sometimes convenient to consider the functions, $\bar{p}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$ and $\underline{p}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n(x)$, that is, the least upper limit and the greatest lower limit of the sequence, $p_n(x)$.

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a set of n variates, and let $G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ be an arbitrary function of the variables, $s_1, \dots, s_n$. The expression,

¹⁾ Presented to the American Mathematical Society, Sept. 11, 1930.

²⁾ Each such matrix is a *Kollektiv*. See R. von Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeitschr. 5, S. 55, also *Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik* (published by Franz Deuticke, 1. Band, S. 7—27, and *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (published by Julius Springer) S. 12.

$G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denotes a variate defined as follows:

(2) $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), G(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}), G(x_1^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}), \dots,$

Thus a function of a set of variates is itself a variate. By means of equation 2 we have defined sums and products of matrices³). It is easily seen that this algebra satisfies the commutative, associative, and distributive laws of ordinary algebra.

A function which is particularly useful in this work is the fundamental function of a point set, E . Let E be any set of points in a space of n dimensions and let $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ be any point of the space. Then the fundamental function, $\varphi_E(s_1, s_2, \dots, s_n)$ has the value 1 if $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ is a point of E , and 0 otherwise.

Let E be the set of points in the interval from $-\infty$ to s , the point, s , being included. If x is any variate, then the variate, $\varphi_E(x) = \varphi_{-\infty, s+0}(x)$, is such that all of its terms are either ones or zeros. Let $p[\varphi_{-\infty, s+0}(x)] = F(s)$ ⁴).

The function, $F(s)$, gives us the probability that x will take on a value less than or equal to s . We shall call $F(s)$ the accumulative probability function associated with the variate, x . It will be observed that $F(s)$ is monotone and that $F(-\infty) = 0$ and $F(+\infty) = 1$. Any function which satisfies these restrictions will be called an accumulative probability function.

One of the most important physical assumptions concerning the behavior of a variate is, that if $g(s)$ is any continuous function then $p[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) dF(s)$, provided $g(s)$ is such that the integral exists. It

is further assumed that the individual measurements are independent. The meaning of the latter assumption is not obvious, but by analogy with the corresponding situation in the theory of admissible numbers it is seen that the assumption is equivalent to the following: The variates, $x_1, x_2, \dots, x_n$, are said to be independent if

$$(3) \quad p\left[\prod_{i=1}^{\infty} \varphi_{I_i}(x_{r_i})\right] = \prod_{i=1}^{\infty} p[\varphi_{I_i}(x_{r_i})]$$

for every set of integers, $r_1, r_2, \dots, r_k$, such that $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$, and for every set of intervals, $I_1, I_2, \dots, I_k$. The assumption of independence of individual measurements is equivalent to the assumption of

³) This algebra can be made to coincide with the usual matrix algebra by redefining the matrix, x , as a square matrix whose principal diagonal consists of the numbers, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$, and the rest of whose terms are all zeros.

⁴) The expression, $s+0$ is used to indicate that the point, s , is included in the interval.

independence of the variates, $(1/n)x$, $(2/n)x$, ..., $(n/n)x$, for every n , where

$$(4) \quad (r/n)x = x^{(r)}, x^{(r+n)}, x^{(r+2n)}, x^{(r+3n)}, \dots$$

We have now described the physical assumptions concerning individual variates, in terms of the properties of matrices. If a matrix satisfies these assumptions it will be called admissible. The condition of admissibility can be expressed more briefly as follows: A variate, x , is said to be admissible with respect to a given function, $F(s)$, provided

$$(5) \quad p \left[\prod_{i=1}^{\infty} (r_i/n) \varphi_{I_i}(x) \right] = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{I_i} dF(s+0)$$

for every set of integers, $r_1, r_2, \dots, r_k, n$, such that $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$, and for every set of finite intervals, I_i , open on the left and closed on the right⁵⁾

2. Properties of admissible variates and existence considerations.

We shall show that if $F(s)$ is an arbitrary accumulative probability function, then there exists a variate, x , which is admissible with respect to $F(s)$. We shall prove further that if $g(s)$ is an arbitrary continuous function and if x is admissible with respect to $F(s)$, then the following condition is satisfied:

$$(A) \quad p \left[\prod_{i=1}^{\infty} (r_i/n) g(x) \cdot \varphi_{I_i}(x) \right] = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{I_i} g(s) dF(s+0)$$

for every set of integers, $r_1, r_2, \dots, r_k, n$, such that $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ and for every set of finite intervals, I_i , open on the left and closed on the right.

We shall now show how admissible variates can be constructed. One of the simplest accumulative probability functions is the function, $G(s)$, defined as follows:

$$G(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\infty < s \leq 0 \\ s & \text{if } 0 \leq s \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 \leq s < +\infty \end{cases}$$

Let $D: (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots)$ be a set which is admissibly ordered with respect to the function, $m(E)$, (the Lebesgue measure of E) defined in the interval, $0 < y < 1$ ⁶⁾. Then it is easily seen that the variate, $y = y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots$, is admissible with respect to the function, $G(s)$.

⁵⁾ The function, $F(s)$, can be used instead of the function, $F(s+0)$, if the end points of the intervals, I_i , do not coincide with the discontinuities of this function.

⁶⁾ See the author's article, Admissible numbers in the theory of geometrical probability, American Journal of Mathematics, 53, No. 1, Jan. 1931, p. 159.

Any variate which is admissible with respect to the function, $G(s)$, is called a fundamental variate. By means of a fundamental variate it is possible to construct a variate which is admissible with respect to an arbitrary accumulative probability function.

Let $F(s)$ be an accumulative probability function, and let $F^{-1}(t)$ denote the greatest lower bound of the numbers, s , such that $F(s-0) \leq t \leq F(s+0)$. We shall call the function, $F^{-1}(t)$, the inverse of $F(s)$. If this function is continuous, then it is the unique inverse of $F(s)$. It will be observed that $F^{-1}(t)$ is monotone and satisfies the relation, $F^{-1}(t-0) = F^{-1}(t)$.

We shall define a variate, x , in terms of a fundamental variate, y , by means of the equation, $x = F^{-1}(y)$. Then $a < x^{(k)} \leq b$ if and only if $F(a+0) < y^{(k)} \leq F(b+0)$. Hence we have the following theorem.

Theorem 1. *Given an accumulative probability function $F(s)$, there exists a variate, x , which is admissible with respect to $F(s)$.*

The variate, x , is so constructed that the probability that it will take on the value, a , is $F(a+0) - F(a-0)$. Thus x has the accumulative probability function, $F(s+0)$. For this reason we perform our integrations with respect to the function, $F(s+0)$, instead of $F(s)$; and choose intervals, I_i , which are open on the left and closed on the right. Physical considerations indicate that this is the appropriate construction for an admissible variate. However, this is not the only possible construction as the following example will show. Let $F(s)$ be the function which is zero in the open interval from $-\infty$ to 0, one in the open interval from 0 to $+\infty$, and $1/2$ at the origin. Let y be any member of the set, $A(1/2)$, and let x be the variate such that $x^{(k)} = y^{(k)} \cdot k$, $k = 1, 2, 3, \dots, 7$. Then x has the accumulative probability function, $F(s)$, just defined, but x is not admissible. In fact equations (5) fail to be satisfied by the variate, x , when and only when at least one of the intervals, I_i , has one of its extremities at the origin.

We shall now prove a theorem from which it follows as a corollary that every admissible variate satisfies condition (A).

Theorem 2. *If $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ is a set of independent variates such that x_i is admissible with respect to $F_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), and if $g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s)$ is any set of continuous functions, then*

$$p\left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot \varphi_{I_i}(x_i)\right] = \prod_{i=1}^n \int_{I_i} g_i(s) dF_i(s+0)$$

⁷⁾ The set, $A(1/2)$, is the set of all admissible numbers associated with the probability, $1/2$, see the author's article, Admissible numbers in the theory of probability, American Journal of Mathematics, 50, No. 4, Oct. 1928, p. 537.

for every set of finite intervals, $I_1, I_2, \dots, I_n$, each of which is open on the left and closed on the right.

We shall prove the theorem first for a special case. We shall assume that the functions, $g_i(s)$, are real and non-negative. Let I_i be the interval, $a_i < s \leq b_i$, and let each such interval be subdivided as follows: $a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < \dots < a_{i,x_i} = b_i$. Let $I_{i,j}$ be the interval, $a_{i,j-1} < s \leq a_{i,j}$ and let $m_{i,j}$ and $M_{i,j}$ be respectively the minimum and maximum of $g_i(s)$ in $I_{i,j}$. Then $p \left[\prod_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{x_i} m_{i,j} \varphi_{I_{i,j}}(x_i) \right\} \right]$ exists and is less than or equal to $p \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right]$. Thus we have

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^{x_i} m_{i,j} [F_i(a_{i,j} + 0) - F_i(a_{i,j-1} + 0)] \leq p \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right]$$

Similarly

$$p \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right] \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^{x_i} M_{i,j} [F_i(a_{i,j} + 0) - F_i(a_{i,j-1} + 0)]$$

and hence

$$p \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right] = \prod_{i=1}^n \int_{I_i} g_i(s) dF_i(s + 0).$$

In a like manner it can be shown that

$$\bar{p} \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right] = \prod_{i=1}^n \int_{I_i} g_i(s) dF_i(s + 0)$$

and hence

$$p \left[\prod_{i=1}^n g_i(x_i) \varphi_{I_i}(x_i) \right] = \prod_{i=1}^n \int_{I_i} g_i(s) dF_i(s + 0).$$

Next let us assume that the functions, $g_i(s)$, are arbitrary real continuous functions, and let

$$y_i(s) = \begin{cases} g_i(s) & \text{if } g_i(s) \geq 0 \\ 0 & \text{if } g_i(s) \leq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \delta_i(s) = \begin{cases} -g_i(s) & \text{if } g_i(s) \leq 0 \\ 0 & \text{if } g_i(s) \geq 0. \end{cases}$$

Then $g_i(s) = y_i(s) - \delta_i(s)$. The expression, $\prod_{i=1}^n [y_i(s) - \delta_i(s)]$, can be expanded into a sum of products, and the special case of Theorem 2 which we have just proved, applies to each term of this expansion. The extension to the more general case is thus easily accomplished with the aid of the additive property of the integral and of the operator, $p(\)$.

Finally let us assume that the functions, $g_i(s)$, are arbitrary continuous complex functions. The extension to this case is accomplished in a similar manner.

If the functions, $g_i(s)$, are bounded then it is not necessary to assume that the intervals, I_i , are finite, but otherwise it is necessary to

make this assumption. Consider the following example. Let $n_k = 1^3 + 2^3 + \dots k^3$ and let the variate, x , be defined in such a manner that $x^{(n_k)} = k$ where $k = 1, 2, 3, \dots$, and such that all of the rest of the terms of x are zeros. The distribution function, $F(s)$, associated with this variate has the value, zero, when s is negative and one when s is positive or zero, and x is admissible with respect to $F(s)$. On the other hand

$$p(x^2) = 1 \quad \text{whereas} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 dF(s) = 0.$$

Let $F(s)$ be an arbitrary accumulative probability function and let x be admissible with respect to $F(s)$. Let us assume further that

$$p(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 dF(s).$$

Let x' be a variate such that its n_k th term is equal to k , where $k = 1, 2, 3, \dots$. Let all of the rest of the terms of x' be equal to the corresponding terms of x . Then x' is also admissible with respect to $F(s)$ but for this variate we do not have the equality of the two expressions for the second moment. Whenever we fail to get this equality the trouble is caused by a set of terms which is so sparse that it does not affect the admissibility of the variate. Our problem is to discover the set when it exists, and then remove it.

From theorem 2 it follows that $p[x^2 \cdot \varphi_I(x)] \leq b$ where I is the interval, $-a \leq s \leq +a$, and $b = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 dF(s)$. Suppose that $\bar{p}(x^2) > b$.

Let $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ be a decreasing sequence having the limit, zero, and let $a_1, a_2, a_3, \dots$ be an increasing sequence such that if I_k is the interval, $-a_k \leq s \leq +a_k$, then $p[\varphi_{I_k}(x)] < \varepsilon_k$. There exists a set of integers, $n_1, n_2, \dots$ such that $p_n[x^2 \cdot \varphi_{I_{k+1}}(x)] < b + \varepsilon_k$ and

$$\{n \cdot p_n[\varphi_{I_k}(x)] - n_{k-1} p_{n_{k-1}}[\varphi_{I_k}(x)] / (n - n_{k-1})\} < \varepsilon_k$$

whenever $n \geq n_k$. Let z be a variate defined as follows. If $x^{(n)}$ belongs to the set, CI_k , where k is such that $n_{k-1} < n \leq n_k$, then $z^{(n)} = 0$. Otherwise $z^{(n)} = 1$. Then $p(z) = 1$, and the variate, $x' = x \cdot z$ is admissible with respect to $F(s)$. Moreover $p(x'^2) = b$.

We shall say that the n th moment of a variate, x , exists only when $p(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^n dF(s)$. If $F(s)$ is an arbitrary accumulative probability function such that $\int_{-\infty}^{+\infty} s^n dF(s)$ exists, then we can find a variate which is admissible with respect to $F(s)$ and which possesses an n th moment.

3. Variates, variables and constants. It is easily seen that an admissible number is a special case of an admissible variate. The distribution function associated with an admissible number is particularly simple. Let x be an element of the set, $A(p)$. Then the distribution function, $F(s)$, associated with x , is defined as follows: $F(s) = 0$ if $s < 0$, $F(s) = 1 - p$ if $0 \leq s < 1$, $F(s) = 1$ if $1 \leq s$. Thus $F(s)$ is constant everywhere except at two points, and at these points it is discontinuous. Let us consider a still simpler distribution function, which has a single discontinuity at a point, $s = t$, and which is constant everywhere else. The variate all of whose terms are equal to t , is admissible with respect to this function.

If all of the terms of a variate are equal to some number, t , then this variate is called a constant if t is a fixed number, and a variable or parameter if t is allowed to vary. Thus in particular, the functions, $p_n(x)$ and $p(x)$, are themselves admissible variates.

The function, e^{ixt} , where x is a variate and t is a variable, is of considerable importance in the theory of measurement. The expression, $p(e^{ixt})$, is a function of t only, and is sometimes called the characteristic function⁸). The following theorem is concerned with functions of variates and variables.

Theorem 3. *If $g(s, t)$ is continuous in both variables and bounded throughout the entire s, t -plane, and if x is an admissible variate, then $p_n[g(x, t)]$ converges uniformly to its limit, $p[g(x, t)]$, throughout any finite interval, J : $\alpha \leq t \leq \beta$.*

Let B be the least upper bound of $|g(s, t)|$, and let $F(s)$ be the distribution function for the variate, x . Given any positive number, ε , we can find two numbers, a and b , such that $B[1 - F(b + 0) + F(a - 0)] < \varepsilon$. Let I be the interval, $a < s \leq b$, and CI be the complement of I with respect to the interval, $-\infty, +\infty$. We can choose a number, n_1 , such that $|p_n[g(x, t) \cdot \varphi_{CI}(x)]| < \varepsilon$ for every t , if $n > n_1$. Hence $|p_n[g(x, t) \cdot \varphi_{CI}(x)] - p[g(x, t) \cdot \varphi_{CI}(x)]| < 2\varepsilon$ if $n > n_1$.

Let I_i be the interval, $s_{i-1} < s \leq s_i$, where $s_0 = a$ and $s_k = b$. Let $M_i(t)$ and $m_i(t)$ be respectively the maximum and minimum of $g(s, t)$ in the interval, I_i . We can choose the intervals, I_i , so that $M_i(t) - m_i(t) < \varepsilon$ for $i = 1, 2, 3, \dots, k$, and for every t in J . Then $|p_n[g(x, t) \cdot \varphi_I(x)] - \sum_{i=1}^k m_i(t) \cdot p_n[\varphi_{I_i}(x)]| < \varepsilon$ if t is in J .

⁸) For a historical discussion of the characteristic function, see C. E. Molina, The theory of probability: some comments on Laplace's *theorie analytique*, Bulletin of the American Mathematical Society, June, 1930, p. 371.

There exists a number, n_3 , such that

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} m_i(t) \cdot p_n[\varphi_{I_i}(x)] - p[g(x, t) \cdot \varphi_I(x)] \right| < \varepsilon \text{ if } t \text{ is in } J \text{ and } n > n_3.$$

Hence $|p_n[g(x, t) \cdot \varphi_I(x)] - p[g(x, t) \cdot \varphi_I(x)]| < 2\varepsilon$ if t is in J and $n > n_3$. Therefore $|p_n[g(x, t)] - p[g(x, t)]| < 4\varepsilon$ if t is in J and $n > N$ where N is the larger of the numbers, n_1 and n_3 . Thus $p_n[g(x, t)]$ approaches its limit uniformly throughout the interval, J .

4. The definition of admissibly independent variates. It is possible for two variates to be independent and admissible without having their product admissible⁹). We shall introduce the concept of admissible independence of variates, and demand that a set of admissibly independent variates be such that any product or linear combination formed of them, be an admissible variate. Admissibly independent variates must also, of course, be admissible and independent.

We shall not proceed directly to the general definition of admissible independence, but we shall start with a set of fundamental variates. Let $y_1, y_2, \dots, y_n$ be a set of variates, and let D be the set consisting of the points, $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$, where P_k has the coordinates, $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}$. We shall say that $y_1, y_2, \dots, y_n$ is a set of admissibly independent fundamental variates provided the corresponding set, D , is admissibly ordered with respect to the function, $m(E)$, (the Lebesgue measure of E) defined in the region, $\Delta: 0 < s_i < 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ¹⁰).

If a set, D , satisfies the above restrictions as to its ordering, then it is clear that the corresponding variates, $y_1, \dots, y_n$, are admissible, fundamental and independent. The fact that the product of these variates or any linear combination of them is an admissible variate, is a consequence of theorems which will be proved later. However, the fact that this is true can readily be seen even at this stage. Let $Y = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_n$. Then the probability that $a < Y \leq b$ is the same as the probability that $y_1, y_2, \dots, y_n$ is a member of the set, E , where E is that portion of Δ for which $a < s_1 \cdot s_2 \dots s_n \leq b$. Since the frontier points of E are of measure zero, $\varphi_E(y_1, y_2, \dots, y_n)$ is an admissible number associated with the probability, $m(E)$. It is now obvious that Y is an admissible variate. In a like manner it can easily be proved that any linear combination of the variates, $y_1, y_2, \dots, y_n$, is an admissible variate.

⁹) See the author's memoir, Independent event histories, American Journal of Mathematics **51**, No. 4, Oct. 1929, pp. 612, 613.

¹⁰) See Admissible numbers in the theory of geometrical probability, p. 160.

We shall now consider the general definition of the admissible independence of variates. Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a set of admissible variates. Let $F_i(s_i)$ be the accumulative distribution function of the variate, x_i , and let $F_i^{-1}(t_i)$ be the corresponding inverse function. The variates, $x_1, x_2, \dots, x_n$, are said to be admissibly independent if and only if there exists a corresponding set of admissibly independent fundamental variates, $y_1, y_2, \dots, y_n$, such that $x_i = F_i^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, and such that there is no discontinuity of any of the functions, $F_i^{-1}(t_i)$ at any of the points, $t_i = y_i^{k11}$. Let us observe that if the variates, $x_1, x_2, \dots, x_n$, are admissibly independent, they are admissible and independent.

5. Properties of admissibly independent variates and existence considerations. We shall prove the following theorem.

Theorem 4. *Given a set of accumulative distribution functions, $F_1(s_1), F_2(s_2), \dots, F_n(s_n)$, there exists a set of admissibly independent variates $x_1, x_2, \dots, x_n$, such that $F_i(s_i)$ is the accumulative distribution function of the variate, x_i .*

In the region, $\Delta: 0 < t_i < 1$, an arbitrary denumerable everywhere dense set can be admissibly ordered with respect to the function, $m(E)$. We shall choose a denumerable dense set, D , which is included in the complement of the set of points whose coordinates are the discontinuities of the functions, $F_i^{-1}(t_i)$. This choice of D is possible since the functions, $F_i^{-1}(t_i)$, have at most a denumerable set of discontinuities. The admissibly ordered set, D , defines a set of admissibly independent fundamental variates, $y_1, y_2, \dots, y_n$. We can now define the variates $x_1, x_2, \dots, x_n$, by means of the equations, $x_i = F_i^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

It remains to prove the following theorems.

Theorem 5. *The product of n admissibly independent variates is an admissible variate.*

Theorem 6. *Any linear combination of admissibly independent variates is an admissible variate.*

We shall prove theorem 5 first for the case, $n = 2$, and then make an extension to the general case by means of mathematical induction. Let x_1 and x_2 be two admissibly independent variates having respectively

¹¹) This definition is somewhat artificial due to the fact that it is not based directly upon the properties of the variates $x_1, x_2, \dots, x_n$, themselves, but instead, upon the properties of certain related fundamental variates. Any definition of admissible independence should be such that it is possible to construct sets of admissibly independent variates, and also such that any set of admissibly independent variates satisfies the restrictions which have been described. So far I have been unable to construct a satisfactory definition of admissible independence without basing it on the properties of sets of fundamental variates.

the distribution functions, $F_1(s_1)$ and $F_2(s_2)$, and let $X = x_1 \cdot x_2$. Then there exist two admissibly independent fundamental variates, y_1 and y_2 , such that $x_1 = F_1^{-1}(y_1)$ and $x_2 = F_2^{-1}(y_2)$. Let Δ be the region, $0 < t_1 < 1$, $0 < t_2 < 1$, and $R(s)$ be the set of points, (t_1, t_2) , for which $F_1^{-1}(t_1) \cdot F_2^{-1}(t_2) \leq S$. Then $X^{(k)} = x_1^{(k)} \cdot x_2^{(k)}$ is the greatest lower bound of those numbers, S , for which $(y_1^{(k)}, y_2^{(k)})$ is an element of $R(S)$.

Let us assume for the moment that the frontier points of $R(S)$ are of measure zero. Let $F(S) = m[R(S)]$. Then $F(S) = p[\varphi_{R(S)}(y_1, y_2)] = p[\varphi_{-\infty, S}(X)]$. But $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(S + \varepsilon) = R(S)$ and therefore $F(S + 0) = F(S)$. Hence X is admissible and $F(S)$ is its accumulative distribution function.

Let $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(S - \varepsilon) = R(S - 0)$ and let C_{S+0} and C_{S-0} be respectively the frontier points of $R(S)$ and $R(S - 0)$. We shall prove that $m(C_{S+0}) = 0 = m(C_{S-0})$. Let us consider first the case, $S > 0$. If $\sigma_1 \sigma_2 \leq S$ and $(\sigma_1 + \delta_1)(\sigma_2 + \delta_2) \leq S$ and if $\sigma_1 < s_1 < \sigma_1 + \delta_1$ and $\sigma_2 < s_2 < \sigma_2 + \delta_2$ then $s_1 s_2 \leq S$. Hence we have the following lemma.

Lemma. *If $S > 0$ and (τ_1, τ_2) is a point of $R(S)$ and $(\tau_1 + \varepsilon_1, \tau_2 + \varepsilon_2)$ is a point of $R(S)$ and if $\tau_1 < t_1 < \tau_1 + \varepsilon_1$ and $\tau_2 < t_2 < \tau_2 + \varepsilon_2$, then (t_1, t_2) is a point of $R(S)$.*

Let us assume that the line, $t_1 - t_2 = k$, intersects C_{S+0} in two points, (τ_1, τ_2) and $(\tau_1 + h, \tau_2 + h)$. Then since these points are both limit points of $R(S)$, it follows from the lemma that if $\tau_1 < t_1 < \tau_1 + h$ and $\tau_2 < t_2 < \tau_2 + h$, then (t_1, t_2) is a point of $R(S)$. Also $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_2 - \varepsilon_2)$ is a point of $CR(S)$ since the contrary assumption implies that (τ_1, τ_2) is an interior point of $R(S)$. Similarly $(\tau_1 + h + \varepsilon_1, \tau_2 + h + \varepsilon_2)$ is a point of $CR(S)$. Hence the line, $t_1 - t_2 = k = \tau_1 - \tau_2$, intersects C_{S+0} in at most two points. Moreover between the lines, $t_1 - t_2 = \tau_1 - \tau_2 - \varepsilon$ and $t_1 - t_2 = \tau_1 - \tau_2 + \varepsilon$, the points of C_{S+0} lie also between the lines, $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 - \varepsilon$ and $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 + \varepsilon$ or between the lines, $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 + 2h - \varepsilon$ and $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 + 2h + \varepsilon$.

Let us assume next that the line, $t_1 - t_2 = k$, intersects C_{S+0} in just one point, (τ_1, τ_2) . Then all of the points of the line on one side of this point, belong to $R(S)$, and on the other side to $CR(S)$. One of the two points of the intersection of $t_1 - t_2 = k$ with the boundary of Δ , is such that all of the points of this line between this intersection and the point, (τ_1, τ_2) , belong to $R(S)$. Let us assume that this intersection is the point, $(\tau_1 + h, \tau_2 + h)$, where $h > 0$. Then every point, (t_1, t_2) , such that $\tau_1 < t_1 < \tau_1 + h$, $\tau_2 < t_2 < \tau_2 + h$, belongs to $R(S)$, and every point, $(\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_2 - \varepsilon_2)$, belongs to $CR(S)$. If the line, $t_1 - t_2 = k$, intersects

the boundary of Δ in the point, $(\tau_1 - h, \tau_2 - h)$, and all points in between this intersection and (τ_1, τ_2) belong to $R(S)$, then every point, (t_1, t_2) , such that $\tau_1 - h < t_1 < \tau_1$, $\tau_2 - h < t_2 < \tau_2$ belongs to $R(S)$, and every point, $(\tau_1 + \varepsilon_1, \tau_2 + \varepsilon_2)$, belongs to $C R(S)$. Hence between the lines, $t_1 - t_2 = \tau_1 - \tau_2 - \varepsilon$ and $t_1 - t_2 = \tau_1 - \tau_2 + \varepsilon$, the points of C_{S+0} lie also between the lines, $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 - \varepsilon$ and $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 + \varepsilon$ or between the lines, $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 \pm 2h - \varepsilon$ and $t_1 + t_2 = \tau_1 + \tau_2 \pm 2h + \varepsilon$.

If $t_1 - t_2 = k$ does not intersect C_{S+0} , then there exists a positive number, ε , such that no points of C_{S+0} lie between the lines, $t_1 - t_2 = k - \varepsilon$ and $t_1 - t_2 = k + \varepsilon$.

We have proved that if $S > 0$, then, given any line, $t_1 - t_2 = k$, there exists an ε such that between the lines, $t_1 - t_2 = k - \varepsilon$ and $t_1 - t_2 = k + \varepsilon$, the points of C_{S+0} are included in a set of measure, $4\varepsilon^2$. Hence $m(C_{S+0}) = 0$ if $S > 0$.

If $S = 0$, the set, C_{S+0} , consists of four straight line segments. Hence $m(C_{S+0}) = 0$ if $S = 0$. For the case, $S < 0$, we have the following lemma.

Lemma. *If $S < 0$ and (τ_1, τ_2) is a point of $C R(S)$ and $(\tau_1 + \varepsilon_1, \tau_2 + \varepsilon_2)$ is a point of $C R(S)$ and if $\tau_1 < t_1 < \tau_1 + \varepsilon_1$ and $\tau_2 - \varepsilon_2 < t_2 < \tau_2$, then (t_1, t_2) is a point of $C R(S)$.*

By means of this lemma the case, $S < 0$, can be treated in a manner similar to that in which we treated the case, $S > 0$. Thus $m(C_{S+0}) = 0$ for an arbitrary S . The establishment of this fact completes the proof of theorem 5 for the case, $n = 2$. In a like manner it can be proved that $m(C_{S-0}) = 0$. This fact will be used in the proof which follows.

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a set of admissibly independent variates, and let $y_1, y_2, \dots, y_n$ be the corresponding set of fundamental variates. Let $X = x_1 \cdot x_2$. We shall prove that the variates, $X, x_3, \dots, x_n$, are admissibly independent. In order to prove this it is necessary to construct a variate, Y , such that the variates, $Y, y_3, \dots, y_n$, are admissibly independent fundamental variates, and such that $X = F^{-1}(Y)$, where $F^{-1}(T)$ is the inverse of $F(S)$ and where $F(S) = m[R(S)]$. The variate, Y , will be defined in terms of the variates, y_1, y_2 , the regions, $R(S), R(S-0)$, and the region $r(h)$, where

$$r(h) = E[0 \leq t_1 \leq A_1(h), A_2(h) \leq t_2 \leq 1] \\ + E[B_1(h) \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq B_2(h)]^{12}$$

¹²) These expressions denote the sets of points whose coordinates satisfy the inequalities within the square brackets.

and where $A_1(h)$, $A_2(h)$, $B_1(h)$, $B_2(h)$ are any monotone continuous functions which take on the values given in the following table.

h	A_1	A_2	B_1	B_2
0	0	1	1	0
$\frac{1}{3}$	$F_1(0-0)$	$F_2(0+0)$	$F_1(0+0)$	$F_2(0-0)$
$\frac{2}{3}$	$F_1(0+0)$	$F_2(0-0)$	$F_1(0-0)$	$F_2(0+0)$
1	1	0	0	1

Let h^k be the greatest lower bound of the numbers, h , for which (y_1^k, y_2^k) is a point of $r(h)$. Then (y_1^k, y_2^k) is a point of $r(h^k)$. Let $R(S, h) = R[S-0] + [R(S) - R(S-0)] \cdot r(h)$ and $Y^k = m[R(X^k, h^k)]$. Then $F(X^k-0) \leq Y^k \leq F(X^k)$.

We wish to prove that $X^k = F^{-1}(Y^k)$ and that $F^{-1}(T)$ is continuous at $T = Y_k$. It is sufficient to show that $F(X^k-\delta) < Y^k < F(X^k+\delta)$ for every positive number, δ . Let us consider first the case, $x_1^k > 0$, $x_2^k > 0$. There exist two positive numbers, δ_1 , δ_2 , such that $x_1^k - \delta_1 > 0$, $x_2^k - \delta_2 > 0$ and $X^k - \delta < (x_1^k - \delta_1)(x_2^k - \delta_2)$. Furthermore there exist two numbers, ε_1 , ε_2 , such that $x_1^k - \delta_1 < F_1^{-1}(y_1^k - \varepsilon_1)$ and $x_2^k - \delta_2 < F_2^{-1}(y_2^k - \varepsilon_2)$, since $F_1^{-1}(t_1)$ is continuous at y_1^k and $F_2^{-1}(t_2)$ is continuous at y_2^k . Therefore $R(X^k - \delta) < R(X^k, h^k) - E(y_1^k - \varepsilon_1 \leq t_1 \leq y_1^k, y_2^k - \varepsilon_2 \leq t_2 \leq y_2^k)$ and hence $F(X^k - \delta) \leq Y^k - \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < Y^k$. Similarly we have, for a proper choice of ε_1 , ε_2 , $R(X^k, h^k) < R(X^k + \delta) - E(y_1^k < t_1 < y_1^k + \varepsilon_1, y_2^k < t_2 < y_2^k + \varepsilon_2)$ and hence $Y^k < F(X^k + \delta)$.

Fourteen cases remain to be considered. Namely x_1 may be positive, negative or zero, and if $x_1 = 0$ we may have $y_1 = F_1(0-0)$, $y_1 = F_1(0+0)$ or $F_1(0-0) < y_1 < F_1(0+0)$. The same is true of x_2 and y_2 . Of the twenty five cases thus obtained, one has already been considered, and of the remaining, only fourteen are essentially different due to the interchangeability of the variates, y_1 and y_2 . The reader will have little difficulty in following through the reasoning in these fourteen cases after a discussion of the construction of the region, $r(h)$.

Let us observe that $r(1)$ includes all of the region, Δ , and that $r(0)$ includes only boundary points of Δ . As h varies continuously and decreases from 1 to 0, the region, $r(h)$ shrinks toward the boundary or Δ , and for no h do we have an isolated point of $r(h)$ interior to Δ .

We can start with any boundary point of $r(h)$ (interior to Δ) and move toward the interior of $r(h)$ in such a direction that the product, $F_1^{-1}(t_1) \cdot F_2^{-1}(t_2)$, decreases or at most remains stationary. We can move toward the exterior of $r(h)$ in such a direction that this product increases or at least remains stationary.

We have to prove that Y is a fundamental admissible variate. Let $h(T)$ be the least upper bound of those numbers, h , for which $m[R\{F^{-1}(T), h\}] = T$. Let $E(T) = R[F^{-1}(T), h(T)]$. Then $m[E(T)] = T$ and (y_1^k, y_2^k) is a point of $E(Y^k)$ but not a point of $E(Y^k - \varepsilon)$ if $\varepsilon > 0$. Since $\varphi_{E(T)}(y_1, y_2) = \varphi_{0, T}(Y)$ and since the frontier points of $E(T)$ are of measure zero, Y is a fundamental admissible variate.

It remains to prove that the variates, $Y, y_3, \dots, y_n$, are admissibly independent. The frontier points of the region, $E(B) - E(A)$, $a_i < t_i \leq b_i$, $i = 3, 4, \dots, n$, are of measure zero, and $t_1, t_2, \dots, t_n$ is a point of this region if and only if $T, t_3, \dots, t_n$ is a point of the region, $A < T \leq B$, $a_i < t_i \leq b_i$, $i = 3, 4, \dots, n$. Hence the variates, $Y, y_3, \dots, y_n$, are admissibly independent.

We shall omit the proof of theorem 6 since it is similar to that of theorem 5. Theorem 6 is, in fact, less difficult than theorem 5.

Let us observe that if x is an admissible variate, then, in general the variates, $(1/n)x, (2/n)x, \dots, (n/n)x$, are admissibly independent. In fact, in order for this to be true, it is only necessary that there exist a fundamental variate, y , such that $x = F^{-1}(y)$ and such that no discontinuity of $F^{-1}(t)$ is at a point, $t = y^k$.

So far we have been considering only finite sets of admissibly independent variates. In connection with the discussion of the probability limit theorem, it is important to know whether or not there exist denumerably infinite sets of admissibly independent variates. An infinite set, E , of variates, is said to be an admissibly independent set, provided every finite sub-set of E is an admissibly independent set.

The proof of the existence of infinite sets of admissibly independent variates, is long though not difficult. For this reason we shall merely indicate the method of the proof as it is similar to that of theorem 4 of the author's memoir, *Admissible numbers in the theory of geometrical probability*.

It is obviously sufficient to restrict ourselves to the consideration of infinite sets of admissibly independent fundamental variates. Let $y_1, y_2, y_3, \dots$ be the set of variates to be constructed and let $P_1, P_2, P_3, \dots$ be a set of points such that P_k has the coordinates, $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, \dots$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$. Given any positive integer, s , we can find a set of points, $P_1^s, P_2^s, P_3^s, \dots$, which is admissibly ordered with respect to the function, $m(E)$, defined in the region, Δ_s : $0 < t_i < 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, s$. We can define a set of positive integers, $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots$, satisfying conditions similar to conditions, (e) and (f), of theorem 4 of the memoir cited. Let $v_s = N_1 + N_2 + \dots + N_{s-1}$ and let the first s coordinates of the points, $P_{v_s+1}, P_{v_s+2}, \dots, P_{v_s+1}$ be respectively the same as the

first s coordinates of the points, $P_1^s, P_2^s, \dots, P_{N_s}^s$. Let the s th coordinates of the points, P_1 to P_{r_s} , be respectively the same as the s th coordinates of the points, P_1^s to $P_{r_s}^s$. If the integers, $N_1, N_2, \dots$, are properly chosen, then $y_1, y_2, \dots$ will be admissibly independent fundamental variates.

We have given precise statements of the fundamental assumptions of the theory of measurement, and proved that these assumptions are consistent. It will be observed that the theory of admissible variates is a geometrical probability theory in which the probability function, $\Pi(E)$, is not assumed to be absolutely continuous. However this function is restricted in another manner by the condition of admissible independence of variates.

The University of Michigan.

(Eingegangen am 27. Juni 1932.)

Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz.

Von

Theodor Estermann in London.

Einleitung.

Zu den nachfolgenden Untersuchungen bin ich durch eine Arbeit des Herrn Kamke¹⁾ angeregt worden. Ich beweise zwei Sätze, von denen der erste beim Beweis des zweiten benutzt wird und wohl auch an sich von Interesse ist. Der zweite ist der Cauchysche Integralsatz in der dritten von Herrn Kamke zitierten Fassung.

Die Sätze lauten folgendermaßen:

Satz 1. Die (reelle) Funktion $f(x)$ sei im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig und von beschränkter Variation. Ihre totale Variation sei t . Bezeichnen wir dann mit $k(y)$ die Zahl, die angibt, wie oft der Wert y von der Funktion $f(x)$ im Intervall $a \leq x < b$ angenommen wird (wobei natürlich $k(y) = \infty$ sein kann), so ist

$$t = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) dy,$$

wo das Integral im Lebesgueschen Sinne zu verstehen ist.

Satz 2. Es sei $\mathfrak{C}$ eine rektifizierbare Jordankurve, und die Funktion $F(z)$ sei im Innern von $\mathfrak{C}$ regulär und auf $\mathfrak{C}$ stetig (relativ zu $\mathfrak{C}$ und dem Innern von $\mathfrak{C}$). Dann ist

$$\int_{\mathfrak{C}} F(z) dz = 0.$$

§ 1.

Beweis des Satzes 1.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ und $b = 1$ annehmen.

¹⁾ Zu dem Integralsatz von Cauchy, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 539—543.

Ich definiere die Funktionen $k_n(y)$ ($n = 1, 2, \dots$) folgendermaßen:
Das Intervall $0 \leq x < 1$ werde in die 2^n gleich langen Intervalle

$$2^{-n}(r-1) \leq x < 2^{-n}r \quad (r = 1, 2, \dots, 2^n)$$

eingeteilt, und $k_n(y)$ gebe an, in wievielen dieser Intervalle die Funktion $f(x)$ den Wert y annimmt.

Dann ist zunächst klar, daß stets

$$(1) \quad k_{n+1}(y) \geq k_n(y)$$

ist.

Ferner ist

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(y) = k(y).$$

Im Falle $k(y) \leq 1$ ist nämlich $k_n(y) = k(y)$ für jedes n . Im Falle $1 < k(y) < \infty$ seien etwa $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k(y)}$ ($\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{k(y)}$) die Lösungen der Gleichung $f(\xi) = y$ im Intervall $0 \leq \xi < 1$, und δ die kleinste der Zahlen $\xi_r - \xi_{r-1}$ ($r = 2, 3, \dots, k(y)$). Dann ist $k_n(y) = k(y)$ für jedes n , für das $2^{-n} < \delta$ ist, also für jedes hinreichend große n . Im Falle $k(y) = \infty$ sei m eine beliebige ganze Zahl > 1 . Dann gibt es Zahlen, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, so daß $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < 1$ und $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \dots = f(\xi_m) = y$ ist. Es sei δ die kleinste der Zahlen $\xi_r - \xi_{r-1}$ ($r = 2, 3, \dots, m$). Dann ist $k_n(y) \geq m$ für jedes n , für das $2^{-n} < \delta$ ist, und hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(y) = \infty$, w. z. b. w.

Es sei $k_{n,r}(y) = 1$ oder 0 , je nachdem die Funktion $f(x)$ den Wert y im Intervall $2^{-n}(r-1) \leq x < 2^{-n}r$ annimmt oder nicht. Dann ist offenbar

$$(3) \quad k_n(y) = \sum_{r=1}^{2^n} k_{n,r}(y).$$

Bezeichnen wir ferner mit $\text{ma}(n, r)$ und $\text{mi}(n, r)$ das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x)$ im Intervall $2^{-n}(r-1) \leq x \leq 2^{-n}r$, so ist

$$(4) \quad k_{n,r}(y) = \begin{cases} 0 & (y > \text{ma}(n, r)), \\ 1 & (\text{ma}(n, r) > y > \text{mi}(n, r)) \\ 0 & (y < \text{mi}(n, r)) \end{cases}$$

und daher

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_{n,r}(y) dy = \text{ma}(n, r) - \text{mi}(n, r),$$

also nach (3)

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y) dy = \sum_{r=1}^{2^n} (\text{ma}(n, r) - \text{mi}(n, r)).$$

Für die totale Variation t gilt bekanntlich

$$(7) \quad t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2^n} (\text{ma}(n, r) - \text{mi}(n, r)),$$

und aus (7), (6), (1) und (2) folgt die Behauptung²⁾.

§ 2.

Folgerungen aus Satz 1.

Es sei $\mathfrak{C}$ eine rektifizierbare Jordankurve.

Hilfssatz 1. *Die Menge der Zahlen c , für welche die Gerade $x = c$ unendlich viele Punkte mit der Kurve $\mathfrak{C}$ gemein hat, ist eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null.*

Beweis. Die Kurve $\mathfrak{C}$ sei in der üblichen Art durch

$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad a \leq u \leq b$$

gegeben, wo $f(u)$ und $g(u)$ im Intervall $a \leq u \leq b$ stetig und (wegen der Rektifizierbarkeit von $\mathfrak{C}$) von beschränkter Variation sind. Die Zahl $k(c)$, die angibt, wie oft die Funktion $f(u)$ im Intervall $a \leq u < b$ den Wert c annimmt, ist dann gleich der Anzahl der gemeinsamen Punkte der Geraden $x = c$ und der Kurve $\mathfrak{C}$. Nach Satz 1 ist $k(c)$ summierbar; die Menge der Zahlen c mit $k(c) = \infty$ hat also das Lebesguesche Maß Null, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Zu jeder positiven Zahl δ gibt es eine Zahl α , so daß auf keiner der Geraden $x = \alpha + m\delta$ ($m = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$) unendlich viele Punkte von $\mathfrak{C}$ liegen.*

Beweis. Wir brauchen nur zu zeigen, daß die Menge der Zahlen α , die die verlangte Eigenschaft *nicht* haben, nicht alle Zahlen enthält. Diese Menge ist aber sogar vom Lebesgueschen Maß Null, denn sie ist die Vereinigungsmenge der abzählbar vielen Mengen, die aus der im vorigen Hilfssatz auftretenden Nullmenge durch die Translationen

$$c' = c - m\delta \quad (m = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots)$$

hervorgehen.

§ 3.

Beweis des Satzes 2.

Es sei ϵ eine beliebige positive Zahl. M sei die Punktmenge, die aus $\mathfrak{C}$ und dem Innern von $\mathfrak{C}$ besteht. Dann ist $F(z)$ in M gleichmäßig stetig. Es gibt also eine Zahl δ ($0 < \delta < 1$), so daß für beliebige

²⁾ Vgl. z. B. C. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue*, Paris 1916, S. 49.

Zahlen z_0 und z , die zu M gehören und die Ungleichung $|z - z_0| < 2\delta$ erfüllen,

$$(8) \quad |F(z) - F(z_0)| < \varepsilon$$

ist.

Jetzt wähle ich eine Zahl α mit der in Hilfssatz 2 genannten Eigenschaft und entsprechend eine Zahl β , so daß auch keine der Geraden $y = \beta + m\delta$ unendlich viele Punkte von $\mathfrak{C}$ enthält. Dann teilen die Geraden $x = \alpha + m\delta$ und $y = \beta + m\delta$ das Innere von $\mathfrak{C}$ in endlich viele Gebiete, deren jedes von einer rektifizierbaren Jordankurve begrenzt wird. Bezeichnen wir diese Kurven mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_r$, so ist

$$(9) \quad \int_{\mathfrak{C}} F(z) dz = \sum_{n=1}^r \int_{\mathfrak{C}_n} F(z) dz,$$

wenn alle Kurven in positivem Sinne durchlaufen werden. Von den Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ mögen etwa die ersten q (und nur diese) „am Rande“ liegen, das heißt Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten. Die übrigen sind dann Quadrate, die ganz im Innern von $\mathfrak{C}$ liegen, und für sie gilt nach der einfachsten Form des Cauchyschen Satzes $\int_{\mathfrak{C}_n} F(z) dz = 0$. Nach (9)

ist also

$$(10) \quad \int_{\mathfrak{C}} F(z) dz = \sum_{n=1}^q \int_{\mathfrak{C}_n} F(z) dz.$$

Bezeichnen wir die Längen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_n$ mit l und l_n , so ist $\sum_{n=1}^q l_n - l$ höchstens gleich der Summe der Umfänge derjenigen Quadrate des durch die Geraden $x = \alpha + m\delta$ und $y = \beta + m\delta$ gebildeten Netzes, deren Seiten Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten. Die Anzahl dieser Quadrate ist aber³⁾ höchstens $4(l/\delta + 1)$. Wir erhalten also (da wir δ kleiner als 1 gewählt haben)

$$(11) \quad \sum_{n=1}^q l_n \leq l + 16\delta \left(\frac{l}{\delta} + 1 \right) < 17l + 16.$$

Der Durchmesser von $\mathfrak{C}_n$ ist höchstens $\delta\sqrt{2}$. Wählen wir also auf $\mathfrak{C}_n$ einen Punkt z_0 , so gilt (8) für jeden Punkt z von $\mathfrak{C}_n$. Es ist also

$$(12) \quad \left| \int_{\mathfrak{C}_n} (F(z) - F(z_0)) dz \right| \leq \varepsilon l_n.$$

³⁾ Vergleiche etwa Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 2 (1927), S. 186, Formel (674).

Nun ist

$$\int_{\mathfrak{C}_n} (F(z) - F(z_0)) dz = \int_{\mathfrak{C}_n} F(z) dz - F(z_0) \int_{\mathfrak{C}_n} dz$$

und

$$\int_{\mathfrak{C}_n} dz = 0;$$

aus (12) folgt also

$$(13) \quad \left| \int_{\mathfrak{C}_n} F(z) dz \right| \leq \varepsilon l_n,$$

und aus (10), (13) und (11) folgt

$$(14) \quad \left| \int_{\mathfrak{C}} F(z) dz \right| < \varepsilon (17l + 16).$$

Da dies für jedes positive ε gilt, so muß $\int_{\mathfrak{C}} F(z) dz = 0$ sein, w. z. b. w.

(Eingegangen am 21. Juli 1932.)

Zum geometrischen Spiegelungskalkül.

Von

G. Thomsen in Rostock.

In dieser Note sollen einige ergänzende Bemerkungen an die im Bd. 34 (1932), S. 668—720) dieser Zeitschrift erschienene Arbeit „Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik ...“ angeschlossen werden. [Die Arbeit wird im folgenden als (Sp. I) zitiert ¹⁾.] Es wurde dort ein geometrischer Gruppenkalkül für die ebene Elementargeometrie entwickelt und dem Descartes-Hilbertschen Körperkalkül der üblichen analytischen Geometrie gegenübergestellt. Inzwischen hat Herr H. Boldt ²⁾ den Gruppenkalkül der Raumgeometrie entwickelt und zu einem gewissen ersten Abschluß gebracht. Durch innere kennzeichnende Eigenschaften — (es werden zu den allgemeinen Gruppenaxiomen 14 Zusatzaxiome hinzugenommen) — werden die Gruppen der räumlichen euklidischen Elementargeometrie aus der Gesamtheit aller Gruppen herausgehoben. Dabei sind jegliche Stetigkeitsaxiome wieder ganz beiseite gelassen worden, und als Gruppen der räumlichen euklidischen Elementargeometrie werden die Kongruenzgruppen bezeichnet, die zu den räumlichen analytischen Geometrien geometrischer Körper gehören ³⁾. Da der Beweis in der Arbeit von Boldt in allen Einzelheiten durchgeführt ist, wird es sich erübrigen den Beweis für den analogen Satz in der Ebene vollständig nachzutragen, der in (Sp. I) im Anhang nur skizziert war.

In (Sp. I) wurde von der Möglichkeit gesprochen, den Gruppenkalkül so weit formal auszubauen, daß er dem „Körperkalkül“ als ein ernsthaft zu wertendes Konkurrenzunternehmen für die rechnerische Behandlung der Elementargeometrie an die Seite treten kann. Nach den bisherigen Anfängen kann von so etwas noch keine Rede sein, zumal sich die

¹⁾ Der Inhalt dieser Arbeit erscheint demnächst in verbesserter Form und in wesentlicher Erweiterung in den „Hamburger mathematischen Einzelschriften“ bei Teubner unter dem Titel „Grundlagen der Elementargeometrie“.

²⁾ Erscheint annähernd gleichzeitig mit dieser Abhandlung in dieser Zeitschrift.

³⁾ Über die Begriffe „Geometrischer Körper“ und „Kongruenzgruppe“ vgl. (Sp. I), S. 672.

Sachlage für die Raumgeometrie naturgemäß um einiges komplizierter gestaltet, als für die ebene Geometrie. Es scheint, als ob noch wesentlich neue Ideen nötig sind, um den Gruppenkalkül zu einem im ganzen Anwendungsbereich wirklich ebenso brauchbaren Recheninstrument zu machen, wie es die Descartessche analytische Geometrie darstellt. Jedenfalls glaube ich, daß man die Möglichkeit eines solchen Ausbaues des Gruppenkalküls keineswegs aus dem Auge verlieren sollte. Zur Begründung dieser Ansicht mögen auch die folgenden Ausführungen dienen:

Das wesentliche Kennzeichen der Descartesschen Methode ist, daß sie einen großen Teil der Geometrie „trivialisirt“: Während vor ihrer Erfindung für die Lösung von Aufgaben und für den Beweis von Sätzen meist in jedem Einzelfalle neue Überlegungen und glückliche Einfälle nötig waren, um etwa durch geschicktes Ziehen von Hilfslinien das gewünschte Resultat zu erreichen, liefert die Descartessche Methode für einen weiten Bereich solcher Sätze und Aufgaben ein einheitliches Verfahren, das nur Geduld und Fleiß erfordert und, ganz mechanisch angewendet, in endlichvielen Schritten immer zum Ziele führt. Ein solches Verfahren nennen wir ein *trivialisierendes Verfahren*.

Es wird manchmal die Meinung vertreten, daß sich die zeichnerische Geometrie, wie sie etwa in der Planimetrie der Dreiecksaufgaben üblich ist, im Gegensatz zur rechnerischen Methode des Descartes überhaupt nicht zu einem trivialisierenden Verfahren ausbilden läßt: Sie arbeite ja vornehmlich mit dem Ziehen von Hilfslinien, und die Anzahl der möglichen Hilfslinien und Hilfsfiguren, die in eine vorliegende Figur eingezeichnet werden können, sei unübersehbar und unendlich. Nur der glückliche mathematische Takt, aber kein einheitliches mechanisches Verfahren könne die richtigen Hilfslinien herausfinden. *Diese Meinung beruht aber auf einem Irrtum.* In Wirklichkeit sind wir nämlich im Besitz einer trivialisierenden Methode auch der zeichnerischen Geometrie. Wir brauchen ja z. B. nur das Verfahren der Descartesschen analytischen Methode mittels der Hilbertschen Streckenrechnung ins Zeichnerische zu übertragen. Zunächst können wir das Einführen eines Koordinatensystems als das Ziehen zweier Hilfslinien, nämlich zweier möglichst der Grundfigur angepaßter senkrechter Hilfsgeraden g_1 und g_2 ansehen. Ferner nehmen wir auf g_1 einen von dem Schnittpunkt O von g_1 und g_2 verschiedenen Punkt E als Einheitspunkt an, und ziehen durch E eine der beiden g_i unter 45° treffenden Geraden als Einheitsgerade e , die g_2 in E' schneidet. Alsdann vergegenwärtigen wir uns den genauen Gang des rechnerischen Beweises des in Frage stehenden Satzes gemäß der Descartesschen Methode. Es werden in dem Satze die Koordinaten x_k, y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) der n Punkte und die Koordinaten $u_s : v_s : w_s$ ($s = 1, 2, \dots, r$)

der r Geraden der vorgelegten Figur vorkommen, eventuell auch noch weitere Koordinaten von Kreisen, Kegelschnitten usw. Die Voraussetzungen des Satzes bestehen dann in bestimmten Lagebeziehungen der Punkte, Geraden usw. der gegebenen Figur. Diese Lagebeziehungen werden sich in dem System von Gleichungen ausdrücken:

$$(1) \quad \Phi_i(y_1, y_1, \dots, x_n, y_n, u_1, v_1, w_1, \dots, u_r, v_r, w_r, \dots) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, p).$$

Die Behauptung des Satzes wird im allgemeinen in einer Aussage über das Bestehen einer weiteren, aus den früheren logisch folgenden Lagebeziehung beruhen. Diese Behauptung wird durch eine weitere Gleichung

$$(2) \quad \Psi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, u_1, v_1, w_1, \dots, u_r, v_r, w_r, \dots) = 0$$

beschrieben. Der rechnerische Beweis besteht dann natürlich darin, daß mittels der Rechengesetze der vier Grundoperationen der Körperalgebra und mittels der bei den geometrischen Körpern hinzukommenden Gesetze für die Operation des Quadratwurzelziehens die Gleichung (2) als eine Folge des Systems (1) abgeleitet wird. Wir denken uns die Rechnung in ihren einzelnen Schritten ganz genau fixiert, so daß jede Anwendung eines der Rechengesetze evident wird (z. B. jede einzelne Anwendung des distributiven Gesetzes an irgendeiner Stelle des Beweises).

Jetzt übertragen wir die ganze Rechnung mittels der Hilbertschen Streckenrechnung ins Geometrische. In bekannter Weise werden den Zahlen des Körpers die Punkte auf g_1 zugeordnet. Den Koordinaten x, y eines Punktes P der Figur werden die beiden Punkte x und y auf g_1 zugeordnet, von denen der erste der Fußpunkt des Lotes von P auf g_1 ist, während der zweite sich ergibt, indem man durch den Fußpunkt des Lotes von P auf g_2 die Parallele zu e zieht und diese Gerade mit g_1 zum Schnitt bringt. In bekannter Weise werden dann auch den Verhältniszahlen $u : v : w$ der Koordinaten einer Geraden der Figur Punkte auf g_1 zugeordnet usw. Alsdann hat man die Verknüpfungskonstruktionen für die Punkte auf g_1 heranzuziehen, die nach der Streckenrechnung den vier Grundrechnungsarten im Körper der Koordinaten $x_k, y_k, u_s, v_s, w_s \dots$ entsprechen. Auch das Quadratwurzelziehen in dem Umfang, wie es bei geometrischen Körpern vorkommt, läßt sich natürlich in naheliegender Weise übertragen. Dem Bestehen der Gleichungen (1) entspricht dann geometrisch, daß man bei gewissen Verknüpfungskonstruktionen mit den den gegebenen Koordinaten entsprechenden Punkten auf g_1 [linke Seiten von (1)] schließlich zu dem Punkt 0, d. h. zum Schnittpunkt O der Koordinatengeraden gelangt. Diese geometrischen Tatsachen sind bekanntlich nach der Streckenrechnung auf Grund der über die Ausgangsfigur gemachten Annahmen ohne weiteres als richtig zu erkennen. Die

ganzen Hilfsfiguren. die zu diesen den Gleichungen (1) entsprechenden Verknüpfungskonstruktionen gehören, können wir schon als zeichnerische Hilfskonstruktionen des Beweises ansehen, der mittels des in Frage stehenden zeichnerischen trivialisierenden Verfahrens geführt werden soll. Nun hat man weiter die eigentliche Rechnung zu übertragen, die (2) aus (1) ableitet. Jeden Schritt dieser bis ins genaueste fixierten Rechnung können wir nach der Hilbertschen Streckenrechnung unter Zuhilfenahme genügend vieler Hilfslinien ins Zeichnerische übertragen, wobei die Grundbeweise der Streckenrechnung (z. B. Nachweis des distributiven Gesetzes oder des kommutativen Gesetzes der Multiplikation) dauernd zur Anwendung kommen. So wird man schließlich zum Beweis der rein geometrischen Verknüpfungsbeziehung zwischen Punkten auf g_1 geführt, die der Gleichung (2) entspricht. Diese Verknüpfungsbeziehung sagt dann geometrisch genau dasselbe aus, wie die zu beweisende Behauptung.

Selbstverständlich wird, wenn ein bestimmter Bestand an Sätzen der Geometrie als bekannt vorausgesetzt wird, der mit dieser zeichnerischen trivialisierenden Methode geführte Beweis eines neuen Satzes meist komplizierter ausfallen als irgend ein ad hoc mittels eines glücklichen Einfalls ersonnener Beweis. Eine andere, und zwar die uns hier vor allem interessierende Frage ist es, ob es eine zeichnerisch trivialisierende Methode gibt, die für die ganze Elementargeometrie insgesamt einfacher arbeitet, als die aus der Descartesschen abgeleitete. Wegen der auch nach gewissen naheliegenden Reduktionen noch einigermaßen großen Kompliziertheit dieser letzteren und wegen der durch die willkürliche Wahl des Koordinatensystems hineinkommenden Unsymmetrie scheint der Glaube wohl nicht ganz ungerechtfertigt, daß es eine bessere trivialisierende Methode gibt.

Die Untersuchungen des Gruppenkalküls scheinen mir deshalb von Wichtigkeit, weil sie, gehörig ausgebildet, ein heuristisches Mittel zum Auffinden einer besseren trivialisierenden Methode liefern können. Das gilt natürlich auch, wenn man ganz vom Zeichnerischen absieht, und dem Körperkalkül den Gruppenkalkül gegenüberstellt. Selbstverständlich gibt es auch für den Gruppenkalkül eine rechnerisch trivialisierende Methode, die man erhält, wenn man zuerst die Übertragung der Descartesschen Methode ins Zeichnerische vornimmt und dann zweitens die so gewonnene Methode Schritt für Schritt in die Sprache des Gruppenkalküls übersetzt. Wenn z. B. bei der zeichnerischen Methode eine Verbindungslinie zweier Punkte P und Q als Hilfslinie a gezogen wird, dann hat man bei der Übertragung in den Gruppenkalkül die beiden Reihen $PaPa$ und $QaQa$ mit einem Hilfselement a anzusetzen. Unter Hinzu-

nahme dieser beiden Reihen zu den schon früher gewonnenen wird dann der Beweis weitergeführt, in jeder Einzelheit der zeichnerischen Methode entsprechend. Die ganze mittels der Hilbertschen Streckenrechnung gewonnene zeichnerische trivialisierende Methode arbeitet ja mit einer dauernden Aneinanderreihung weniger immer wiederkehrender fundamentaler geometrischer Sätze (wie z. B. mit dem Satz von Pascal, der bei jedem Schritt verwendet wird, der rechnerisch einer Anwendung des kommutativen Gesetzes der Multiplikation entspricht). Diese wenigen fundamentalen Sätze kann man sich ja auch im Gruppenskalkül von vornherein irgendwie bewiesen denken, um mit ihnen dann die geschilderte trivialisierende Methode aufzubauen.

Die Aufgabe des Gruppenskalküls ist es natürlich, eine bessere trivialisierende Methode aufzufinden als die geschilderte.

In (Sp. I) wurde mit einem gewissen Nachdruck auf die Sonderstellung der Existenzaussagen in der Elementargeometrie hingewiesen, und es wurde Wert darauf gelegt, Sätze, die keinerlei Existenzaussagen enthalten, auch nur mit Hilfe von Axiomen zu beweisen, in denen keine Existenzaussagen vorkommen (vgl. Sp. I, S. 681—683)⁴⁾. Diese Betonung der Sonderstellung der Existenzaussagen erscheint aber als unberechtigt, wenn man sie vom Gesichtspunkt unserer Aufgabe aus betrachtet, eine einfache trivialisierende Methode des Gruppenskalküls aufzufinden. Es können unter Umständen gerade Existenzaxiome besonders geeignet sein, um das reine Gruppenrechnen um solche zusätzliche Rechenregeln zu erweitern, die die trivialisierende Methode liefern. Nimmt man beispielsweise das Axiom:

*) Zu zwei involutorischen Elementen P und Q der ersten Art gibt es stets ein solches a der zweiten, für das zugleich $Pa Pa$ und $Qa Qa$ gilt,

so hat man eine Anweisung, wie man bei der Rechnung des vorliegenden Beweises die schon gewonnenen Reihen um zwei weitere vermehren darf. a ist dabei nur als irgendein Hilfssymbol zu betrachten, mit dem so gerechnet werden darf wie mit einer „Geraden“. Im allgemeinen wird a im Laufe der weiteren Rechnung wieder herausfallen, aber trotzdem kann seine Einführung die Rechnung sehr erleichtert haben, ja die Einführung solcher Hilfssymbole kann geradezu der Schlüssel zur Auffindung einer trivialisierenden Methode sein.

⁴⁾ Vgl. auch den § 14 der in Fußnote ¹⁾ angekündigten Schrift.

Simultankonvergenz von mehrfachen Fourierschen Reihen und Integralen.

Von

S. Bochner in München.

Es sei $f(x)$ integrierbar (nach Lebesgue) in $-\pi < x < \pi$. Die n -te Partialsumme ihrer Fourierreihe im Punkte $x = 0$ beträgt

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx.$$

Diese Zahl unterscheidet sich für große n beliebig wenig von

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} dx.$$

Denn die Differenz beider beträgt

$$s_n - S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) \sin(n + \frac{1}{2})x dx,$$

wobei

$$\varphi(x) = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{x}{2}\right)^{-1};$$

und da wegen der Beschränktheit von $\varphi(x)$ zugleich mit $f(x)$ auch $f(x)\varphi(x)$ integrierbar ist, so ist nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - S_n) = 0.$$

Wenn insbesondere eine der beiden Folgen s_n und S_n konvergent ist, so ist es auch die andere und die Grenzwerte sind gleich.

Anders aber für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Für eine in

$$(1) \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$$

integrierbare Funktion $f(x, y)$ lauten die Partialsummen der Fourierreihe im Anfangspunkt

$$(2) \quad s_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dx dy.$$

Man würde erwarten, daß sich diese Zahl für große m und n beliebig wenig von

$$(3) \quad S_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{\frac{x}{2}} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\frac{y}{2}} dx dy$$

unterscheidet. Das ist aber nicht für jede integrierbare Funktion $f(x, y)$ der Fall, wie wir an einem Gegenbeispiel zeigen wollen¹⁾. Offenbar ist

$$(4) \quad s_{m,n} - S_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \varphi(x, y) \sin(m + \frac{1}{2})x \sin(n + \frac{1}{2})y dx dy,$$

wobei

$$\varphi(x, y) = \left(\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{2} \frac{y}{2} \right)^{-1},$$

und wir haben eine Funktion $f(x, y)$ anzugeben, für welche die Doppelfolge (4) nicht gegen Null konvergiert. Es ist leicht einzusehen, daß im Intervall (1) für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ die Funktion $\varphi(x, y)$ von Null verschieden ist und daß die daselbst definierte und stetige Funktion

$$u(x, y) = \frac{\left(\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right)^{-1}}{\left(\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right)^{-1} - \left(\frac{x}{2} \frac{y}{2} \right)^{-1}}$$

absolut genommen ≤ 1 ist. Wenn nun die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ beide im Intervall $-\pi < t < \pi$ integrierbar sind, so ist die Funktion

$$(5) \quad f(x, y) = f(x) g(y) u(x, y)$$

in (1) integrierbar; für diese Funktion ist aber

$$(6) \quad s_{m,n} - S_{m,n} = v_m w_n,$$

wobei

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(1 - \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} \right) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

¹⁾ Daß man nicht ohne weiteres die Simultankonvergenz der Folgen $s_{m,n}$ und $S_{m,n}$ annehmen darf, bemerkte Herr Tonelli in *Annali di Matematica pura ed applicata* (Serie IV) 4 (1926—1927), S. 29—72, mit dem Hinweis darauf, daß die Funktion $\varphi(x, y)$ nicht beschränkt sei. Ein Gegenbeispiel hat Herr Tonelli nicht angegeben.

und

$$w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy.$$

Die Zahlen v_m sind die Partialsummen der Fourierreihe der Funktion

$$f(x) \left(1 - \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}\right)$$

im Punkte $x = 0$, daher kann man durch passende Wahl von $f(x)$ erreichen, daß unendlich viele unter ihnen von Null verschieden sind. Weiterhin kann man die Funktion $g(y)$ derart wählen, daß die Zahlen w_n , welche die Partialsummen ihrer Fourierreihe im Punkte $y = 0$ sind, nicht beschränkt sind. Wenn nun $f(t)$ und $g(t)$ dieserart bestimmt sind, so ist die Folge (6) nicht konvergent.

In Anbetracht dessen dürfte der folgende Satz von Interesse sein.

Satz. Falls die Zahlenfolge $s_{m,n}$ beschränkt konvergent ist, so ist auch die Folge $S_{m,n}$ beschränkt konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein.

Falls umgekehrt die Folge $S_{m,n}$ beschränkt konvergent ist, so ist auch die Folge $s_{m,n}$ beschränkt konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein.

Hierbei nennen wir eine Folge $\sigma_{m,n}$ beschränkt konvergent, falls die Zahlen $\sigma_{m,n}$ unterhalb einer gemeinsamen Schranke liegen, und beim gleichzeitigen Grenzübergang

$$(m, n) \rightarrow (\infty, \infty)$$

einem Limes zustreben.

Wir werden unseren Satz auf den folgenden Hilfssatz zurückführen.

Hilfssatz. Für die Funktion $f(x, y)$ sei im Punkte $x = y = 0$ die Fourierreihe beschränkt konvergent, und es sei

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{m,n} = s.$$

Wenn nun die Funktion $g(x)$ in $-\pi \leq x \leq \pi$ gerade und zweimal stetig differenzierbar ist, so ist auch die Fourierreihe der Funktion

$$(7) \quad f(x, y) g(x)$$

im Punkte $x = y = 0$ beschränkt konvergent und der Grenzwert beträgt $sg(0)$.

Eine analoge Behauptung besteht natürlich, falls man die Funktion $f(x, y)$ nicht mit $g(x)$, sondern mit $g(y)$ multipliziert.

Beweis des Satzes unter Zugrundelegung des Hilfssatzes. Es sei die Folge (2) beschränkt konvergent gegen s . Wir setzen

$$\chi(x) = \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} \quad \chi(0) = 1,$$

und multiplizieren $f(x, y)$ zuerst mit $\chi(x)$ und die resultierende Funktion mit $\chi(y)$. Wenn man mit der endgültigen Funktion $f(x, y) \chi(x) \chi(y)$ an Stelle von $f(x, y)$ das Integral (2) bildet, so entsteht das Integral (3) für die ursprüngliche Funktion $f(x, y)$. Und da die Funktion

$$g(x) \equiv \chi(x)$$

den Voraussetzungen des Hilfssatzes genügt, ist auch die Folge (3) beschränkt konvergent, und zwar gegen

$$s g(0) g(0) = s,$$

womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Es sei nun umgekehrt die Folge (3) beschränkt konvergent. Setzt man

$$F(x, y) = f(x, y) \chi(x) \chi(y),$$

so ist

$$S_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, y) \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dx dy,$$

und nach Voraussetzung ist diese Folge beschränkt konvergent gegen eine Zahl, die wir mit S bezeichnen. Ersetzt man im letzten Integral die Funktion $F(x, y)$ durch die Funktion

$$F(x, y) \frac{1}{\chi(x)} \frac{1}{\chi(y)} = f(x, y),$$

so entsteht die Folge (2). Und da auch die Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\chi(x)}$$

unserem Hilfssatz genügt, so ist die Folge (2) gegen

$$S g(0) g(0) = S$$

beschränkt konvergent, w. z. b. w.

Beweis des Hilfssatzes. Es ist leicht einzusehen, daß man beim Beweis des Hilfssatzes die Annahme $s = 0$ machen kann. Für die Zahlen (2) besteht also die Voraussetzung

$$(8) \quad |s_{m,n}| \leq G,$$

$$(9) \quad s = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} s_{m,n} = 0.$$

Wir setzen die Fourierreihen an

$$(10) \quad f(x, y) \sim \sum_{m,n} a_{m,n} e^{i(mx + ny)},$$

$$(11) \quad g(x) = \sum_m b_m e^{imx},$$

$$(12) \quad f(x, y) g(x) \sim \sum_{m,n} c_{m,n} e^{i(mx + ny)}.$$

Es ist

$$(13) \quad a_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy,$$

$$(14) \quad b_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx,$$

$$(15) \quad c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) g(x) e^{-i(mx+ny)} dx dy.$$

Auf Grund der Voraussetzungen über $g(x)$ folgt aus (14)

$$(16) \quad b_{-m} = b_m$$

und

$$(17) \quad b_m = O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad m \rightarrow \infty.$$

Für die Größen

$$(18) \quad \beta_{p,m} = \sum_{\mu=-m}^m b_{\mu-p}$$

folgt hieraus

$$(19) \quad \beta_{-p,m} = \beta_{p,m},$$

$$(20) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \beta_{p,m} = 0,$$

$$(21) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}) = 0,$$

und

$$(22) \quad \sum_{p=0}^{\infty} |\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}| \leq H,$$

wobei H eine vom m unabhängige Konstante ist.

Da die Reihe (11) wegen (17) gleichmäßig konvergiert, so kann man sie in die rechte Seite von (15) einsetzen und gliedweise ausintegrieren. Das gibt, wegen (13),

$$(23) \quad c_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{p,n} b_{m-p}.$$

Die Partialsummen der Fourierreihen (10) und (12) an der Stelle $x = y = 0$ lauten

$$(24) \quad s_{m,n} = \sum_{\mu=-m}^m \sum_{\nu=-n}^n a_{\mu,\nu},$$

bzw.

$$(25) \quad \sigma_{m,n} = \sum_{u=-m}^m \sum_{v=-n}^n c_{u,v}.$$

Wegen (23) und (18) ist

$$\sigma_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-n}^n a_{p,v} \beta_{p,m}.$$

Partielle Summation nach dem Index p , unter Berücksichtigung von (19), ergibt

$$\sigma_{m,n} = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left(\sum_{p=0}^{\varrho-1} s_{p,n} (\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}) + s_{\varrho,n} \beta_{\varrho,m} \right).$$

Wegen (8) und (20) ist

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} s_{\varrho,n} \beta_{\varrho,m} = 0$$

und daher ist

$$|\sigma_{m,n}| \leq \sum_{p=0}^{\infty} |s_{p,n}| \cdot |\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}|.$$

Wegen (8) und (22) ist demnach

$$|\sigma_{m,n}| \leq GH,$$

also ist die Folge (25) beschränkt. Weiterhin gibt es wegen (9) und (22) zu jedem ε ein r, m_0, n_0 , so daß für $m \geq m_0, n \geq n_0$

$$\sum_{p=r}^{\infty} |s_{p,n}| \cdot |\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}| \leq \varepsilon H.$$

Bei festem r ist aber wegen (8) und (21)

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=0}^{r-1} |s_{p,n}| \cdot |\beta_{p,m} - \beta_{p+1,m}| = 0,$$

also ist auch

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sigma_{m,n} = 0,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 24. Oktober 1932.)

Zur Theorie der linearen Transformationen.

Von

Hermann Raff in Berlin.

Die Matrix

$$A = (a_{nv}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1v} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2v} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nv} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

heißt *regulär*, wenn ihre Elemente folgenden Bedingungen genügen:

1. $a_{nv} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$ und festes v .
2. $\sum_{v=1}^{\infty} |a_{nv}|$ existiert und ist für alle n gleichmäßig beschränkt.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} \right) = 1$.

Nach O. Toeplitz¹⁾ und I. Schur²⁾ sind die genannten Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß mit $s_n \rightarrow s$ auch die reguläre Transformation von (s_n) , nämlich die Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} s_v$, für $n \rightarrow +\infty$ gegen s strebt.

Im folgenden wird untersucht, welche Eigenschaften die Elemente einer Matrix (a_{nv}) haben müssen, damit man schließen kann, daß die Häufungspunkte einer beschränkten Folge (s_n) mit denen ihrer Transformation $\left(\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} s_v \right)$ übereinstimmen. Herr Prof. Schur hat diese Frage vor einiger Zeit aufgeworfen, und auf seine Anregung hin wurde die Antwort in der nun vorliegenden Form gegeben.

Eine lineare Transformation mit den Gliedern

$$t_n = s_{q(n)},$$

¹⁾ O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, *Prace matematyczno-fizyczne* 22 (1911), S. 113–119.

²⁾ I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, *Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik* 151 (1921), S. 79–111.

wo die Funktion $\varphi(n)$ für $n = 1, 2, \dots$ jeden natürlichen Zahlenwert nur endlich oft annimmt und höchstens endlich viele dieser Werte ausläßt, hat sicher dieselben Häufungspunkte wie die Ausgangsfolge (s_n) ; sie wird eine *triviale reguläre Transformation* genannt. Die entsprechende *triviale reguläre Matrix* enthält dann in jeder Zeile hinreichend hoher Nummer genau einmal, in jeder Spalte hinreichend hoher Nummer mindestens einmal, aber nur endlich oft, die Zahl 1; die übrigen Glieder sind alle 0.

Unter einer *Annullierungsmatrix* versteht man eine (von selbst nicht reguläre) Matrix (c_{nv}) der Eigenschaft, daß die Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} s_v$ gegen 0 strebt, wenn (s_n) beschränkt ist. Nach I. Schur³⁾ ist

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{v=1}^{\infty} |c_{nv}| = 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß (c_{nv}) Annullierungsmatrix ist.

Versteht man unter der Summe zweier Matrizen (b_{nv}) und (c_{nv}) die Matrix mit den Gliedern $a_{nv} = b_{nv} + c_{nv}$, so gilt der

Satz: *Dafür, daß (s_n) und die lineare Transformation $\left(\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} s_v\right)$ dieser Folge dieselben Häufungspunkte haben, ist notwendig und hinreichend, daß sich (a_{nv}) als Summe einer trivialen regulären Matrix und einer Annullierungsmatrix darstellen läßt.*

In dieser Bedingung ist enthalten, daß (a_{nv}) regulär und daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^{\infty} |a_{nv}|\right) = 1$ ist. Für unbeschränkte Folgen ist der Satz falsch, wie durch die natürliche Zahlenfolge und durch die Matrix mit den Gliedern

$$a_{nv} = \begin{cases} 1 & \text{für } v = n, \\ -\frac{1}{n} & \text{für } v = n^2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

belegt wird.

Dem Beweise des Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:
 $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ sei eine zum Werte s konvergente Reihe und für jedes v' sei bei einheitlichem $\vartheta > 0$

$$\sum_{v \neq v'} |a_v| \geq \vartheta > |s|.$$

³⁾ I. Schur, a. a. O., S. 82.

Dann läßt sich stets eine endliche Teilreihe $\sum' a_v$ von $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ angeben, so daß

$$|\sum' a_v| > \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |\sum' a_v - s| > \frac{\vartheta}{32}$$

ist.

1. Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst $|s| < \frac{\vartheta}{8}$ an und bilden die Reihe über die nichtnegativen und die Reihe über die negativen Realteile der a_v , weiter die Reihe über die nichtnegativen und die Reihe über die negativen Imaginärteile der a_v .

Mindestens eine dieser Reihen ist ihrem Absolutwert nach $\geq \frac{\vartheta}{4}$, da sonst im Widerspruch zu der eben gemachten Voraussetzung $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v| < \vartheta$ wäre. Demnach gibt es endliche Teilreihen $\sum' a_v$ der vorgelegten Reihe, wofür der Absolutbetrag des Realteils oder der des Imaginärteils der Summe und somit auch der Absolutbetrag der Summe selbst $\geq \frac{3}{16} \vartheta$ ist, für die also

$$|\sum' a_v| \geq \frac{3}{16} \vartheta > \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |\sum' a_v - s| > \frac{3}{16} \vartheta - \frac{\vartheta}{8} > \frac{\vartheta}{32}.$$

2. Nun wird $|s| \geq \frac{\vartheta}{8}$ gedacht.

$\alpha)$ Gibt es ein Element a_v , so daß gleichzeitig

$$|a_v| > \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |a_v - s| > \frac{\vartheta}{32},$$

so ist dieses Glied eine Teilreihe der verlangten Art.

$\beta)$ Gibt es kein solches a_v , so gilt für jedes Glied der gegebenen Reihe genau eine der Ungleichungen

$$(1) \quad |a_v| \leq \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |a_v - s| \leq \frac{\vartheta}{32}.$$

Beide können nicht für dasselbe a_v erfüllt sein, da sonst $|s| < \frac{\vartheta}{8}$ wäre, was schon unter 1. erledigt ist.

$a)$ Gilt die erste dieser Ungleichungen für alle a_v , so gibt es eine Teilsumme $\sum_{v=1}^n a_v$ von $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, für die

$$\frac{\vartheta}{32} < \left| \sum_{v=1}^n a_v \right| < \frac{3}{32} \vartheta,$$

und diese leistet das Verlangte, da $|s| \geq \frac{\vartheta}{8}$.

$b)$ Gilt aber die zweite der Ungleichungen (1) für genau ein a_v , z. B. für das mit der Nummer v' , so ist für beliebiges $v_0 \neq v'$

$$\left| \sum_{v \neq v'} a_v \right| \leq \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{v \neq v_0 \\ v \neq v'}} |a_v| \geq \frac{31}{32} \vartheta.$$

Wie unter 1. erkennt man, daß es dann endliche Teilreihen

$\sum' a_v$ von $\sum_{v \neq v'} a_v$ und damit auch von $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ gibt, für die

$$3 \frac{\vartheta}{32} > |\sum' a_v| > \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |\sum' a_v - s| > \frac{\vartheta}{8} - 3 \frac{\vartheta}{32} = \frac{\vartheta}{32}$$

ist, die also der Behauptung genügen.

- c) Gilt jedoch die zweite Ungleichung (1) für mehr als ein a_v , z. B. für a_{v_1} und a_{v_2} , so ist deren Summe eine Teilreihe der verlangten Art, weil dann

$$|a_{v_1} + a_{v_2}| \geq 2|s| - |a_{v_1} - s| - |a_{v_2} - s| > \frac{\vartheta}{32}$$

und

$$|a_{v_1} + a_{v_2} - s| > |s| - 2 \frac{\vartheta}{32} > \frac{\vartheta}{32}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen, und wir wenden uns dem Beweis des Hauptsatzes zu.

Daß die Bedingung des Satzes *hinreichend* ist, folgt unmittelbar, da bei ihrem Erfülltsein die Transformation $\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} s_v$ Summe einer trivialen regulären Transformation und einer Nullfolge ist; es braucht also nur noch gezeigt werden, daß sie auch *notwendig* ist. Dabei kann angenommen werden, daß (a_{nv}) regulär ist; denn wie eingangs erwähnt, lassen sich zu jeder nicht regulären Matrix konvergente Folgen finden, deren Transformationen nicht existieren, divergieren oder zu anderem Grenzwerte konvergieren.

(a_{nv}) erfülle also die Bedingungen 1, 2 und 3 für die Regularität einer Matrix, sei jedoch nicht als Summe einer trivialen regulären Matrix und einer Annullierungsmatrix darstellbar. Dann gibt es in (a_{nv}) nach Vorgabe eines hinreichend kleinen $\vartheta > 0$

entweder unendlich viele Zeilen mit den Nummern n , für die

$$(2) \quad \sum_{v \neq v_n} |a_{nv}| \geq \vartheta$$

ist, wie auch v_n gewählt wird,

oder steht zwar in fast allen Zeilen ein Glied mit einem von der Zeilennummer abhängigen zweiten Index v_n , für das wegen der Regularität von (a_{nv})

$$(3a) \quad \sum_{v \neq v_n} |a_{nv}| < \vartheta \quad \text{und} \quad |a_{nv_n} - 1| < 2\vartheta,$$

aber es gibt unendlich viele Spalten v' , für deren Glieder

$$(3b) \quad |a_{nv'} - 1| \geq 2\vartheta$$

ist, wie auch n gewählt wird.

Im zweiten Falle setzen wir

$$s_\nu = \begin{cases} 1, & \text{falls für } \nu \text{ stets (3b) gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Folge hat den Häufungspunkt $+1$, wie unmittelbar klar ist, und den Häufungspunkt 0 , da sonst (3a) nicht gelten würde. Wegen (3a) hat aber $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_\nu} s_\nu\right)$ nur den Häufungspunkt 0 , und damit ist der gewünschte Widerspruch erzielt.

Jetzt ist noch der in (2) charakterisierte Fall zu untersuchen.

Aus der Reihe über die Glieder einer Zeile hinreichend hoher Nummer n_1 , für die (2) gilt, kann nach dem Hilfssatz und nach Bedingung 3. für reguläre Matrizen eine endliche Teilreihe $\sum' a_{n_1 \nu}$ ausgewählt werden, für die

$$|\sum' a_{n_1 \nu}| > \frac{\vartheta}{32} \quad \text{und} \quad |\sum' a_{n_1 \nu} - 1| > \frac{\vartheta}{32} - \frac{\vartheta}{96}$$

ist. Weiter legt man eine Nummer N_1 fest, so daß alle Glieder von $\sum' a_{n_1 \nu}$ einen zweiten Index $\nu < N_1$ haben und daß

$$\sum_{\nu=N_1}^{\infty} |a_{n_1 \nu}| < \frac{\vartheta}{96}$$

ist. Dann definiert man (s_n) für $1 \leq \nu \leq N_1$ durch

$$(4) \quad s_\nu = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{n_1 \nu} \text{ zu } \sum' a_{n_1 \nu} \text{ gehört,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist der erste Schritt in der Definition von (s_n) , der k -te geschieht wie folgt:

Man wähle eine Zeile der Nummer $n_k > n_{k-1}$, für deren Glieder

$$\sum_{\nu=1}^{N_{k-1}} |a_{n_k \nu}| < \frac{\vartheta}{96k} \quad \text{und} \quad \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_k \nu} - 1 \right| < \frac{\vartheta}{96k}$$

ist, bestimme eine endliche Teilreihe $\sum' a_{n_k \nu}$, deren Glieder einen zweiten Index $> N_{k-1}$ haben und für die

$$|\sum' a_{n_k \nu}| > \frac{\vartheta}{32} - \frac{\vartheta}{96k} \quad \text{und} \quad |\sum' a_{n_k \nu} - 1| > \frac{\vartheta}{32} - \frac{\vartheta}{96k}$$

ist. Nach dem Hilfssatz und nach der Wahl von N_{k-1} ist dies möglich. Schließlich lege man N_k so fest, daß die zweiten Indizes der Glieder von $\sum' a_{n_k \nu}$ kleiner als N_k sind und daß

$$\sum_{\nu=N_k}^{\infty} |a_{n_k \nu}| < \frac{\vartheta}{96k}$$

ist, was wegen der Regularität von $(a_{n \nu})$ geschehen kann. (s_n) definieren wir nun weiter für $N_{k-1} < \nu \leq N_k$ durch

$$(4k) \quad s_\nu = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{n_k \nu} \text{ zu } \sum' a_{n_k \nu} \text{ gehört,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so gewonnene Folge leistet das Verlangte, denn es ist

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_k \nu} s_{\nu} \right| \geq \left| \sum' a_{n_k \nu} \right| - \sum_{\nu=1}^{N_k-1} |a_{n_k \nu}| - \sum_{\nu=N_k}^{\infty} |a_{n_k \nu}| > \frac{\vartheta}{32} - \frac{\vartheta}{32k}$$

und

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_k \nu} s_{\nu} - 1 \right| \geq \left| \sum' a_{n_k \nu} - 1 \right| - \frac{2\vartheta}{96k} > \frac{\vartheta}{32} - \frac{\vartheta}{32k}.$$

Unendlich viele Glieder von $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n \nu} s_{\nu} \right)$ liegen also in

$$M > |z| > \frac{\vartheta}{64}, \quad |z - 1| > \frac{\vartheta}{64},$$

wo M obere Schranke aller $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{n \nu}|$ ist; die Transformation besitzt somit im Gegensatz zu (s_n) einen von 0 und $+1$ verschiedenen Häufungspunkt. Damit ist alles bewiesen.

Dafür, daß $(t_n) = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n \nu} s_{\nu} \right)$ nur eine Teilmenge der Häufungspunkte der beschränkten Folge (s_n) zu Häufungspunkten hat, ist notwendig und hinreichend, daß $(a_{n \nu})$ additiv in eine Annullierungsmatrix und in eine reguläre Matrix zerlegt werden kann, die nur die Elemente $+1$ und 0 enthält. Der Beweis ist mit geringfügigen Änderungen derselbe wie der vorangehende. Steht speziell in jeder Spalte dieser regulären Matrix mindestens ein Element vom Werte $+1$, so stimmen die Häufungspunkte überein.

(Eingegangen am 24. Oktober 1932.)

Eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes auf komplexwertige Funktionen.

Von

G. Aumann in München.

Kürzlich¹⁾ bewies ich den

Satz 1: Sei $f(x)$ eine komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen x , im Intervall $a \leq x \leq b$ zweimal stetig differenzierbar, in keinem Teilintervall konstant, und $f(a) = f(b) = 0$. Dann ist

$$\min_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f'^2(x)}{f''(x)} \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |\Im f(x)|.$$

Der Beweis hiervon geschah mit dem

Hilfssatz 1. Sei Γ eine geschlossene stetige ebene Kurve, welche mit Ausnahme höchstens eines Punktes stetige Tangenten hat, und deren Krümmung (positiv genommen) bogenweise stetig ist mit Unstetigkeitsstellen von nur erster Art. Ist dann κ die obere Grenze der Krümmung, β der Abstand von zwei Γ einschließenden parallelen Stützgeraden von Γ , dann ist

$$\beta \kappa \geq 2.$$

Satz 1 läßt folgende Erweiterung zu:

Satz 2. Sei $F(x)$ eine komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen x , im Intervall $a \leq x \leq b$ zweimal stetig differenzierbar, in keinem Teilintervall konstant, und $F(a) = 0$, $F(b) = 2\gamma \geq 0$; außerdem sei

$$\max_{a \leq x \leq b} |\Im F(x)| = \mu > 0.$$

Dann ist

$$\min_{a \leq x \leq b} \left| \frac{F'^2(x)}{F''(x)} \right| \leq \max \left(\mu, \frac{\gamma^2 + \mu^2}{2\mu} \right).$$

Bemerkungen. 1. Für $\gamma = 0$ wird aus Satz 2 der Satz 1; dann ist auch der Wert $\mu = 0$ zulässig (Rollescher Satz!).

2. Für jedes $\gamma \geq 0$ und $\mu > 0$ gibt es eine Funktion $F(x)$, für welche in der Behauptung von Satz 2 das Gleichheitszeichen steht.

¹⁾ Journ. of the Lond. Math. Soc. 7, Part 1 (1932), S. 6—9.

Der Beweis von Satz 2 gründet sich auf folgende Erweiterung des Hilfssatzes 1:

Hilfssatz 2. Sei Γ ein ebener Kurvenbogen mit den Endpunkten A und B . Die Tangenten von Γ seien stetig, die Krümmung bogenweise stetig mit Unstetigkeitsstellen von nur erster Art. Ist dann ϱ die untere Grenze der Krümmungsradien von Γ , $\mu (> 0)$ die obere Grenze der Entfernung eines Punktes P des Bogens Γ von der Verbindungsgeraden AB , und 2γ die Länge der Strecke AB , so ist

$$\varrho \leq \text{Max} \left(\mu, \frac{\gamma^2 + \mu^2}{2\mu} \right).$$

(Der Beweis des Hilfssatzes 2 folgt weiter unten.)

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Es gibt ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $F'(x_0) = 0$. Dann kann man zeigen²⁾, daß

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'^2(x)}{F''(x)} = 0$$

ist, womit die Behauptung für diesen Fall bewiesen ist.

2. Für $a < x < b$ ist $F'(x) \neq 0$. Die durch

$$z = F(x)$$

in der z -Ebene dargestellte Kurve Γ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2; ist $r(x)$ der Krümmungsradius von Γ , dann gilt³⁾

$$r(x) \geq \left| \frac{F'^2(x)}{F''(x)} \right|. \quad (*)$$

Hierin steht, wenn x die Bogenlänge von Γ ist, oder wenn x dieser Bogenlänge direkt proportional ist, offenbar das Gleichheitszeichen. Aus (*) folgt durch Übergang zur unteren Grenze und Anwendung von Hilfssatz 2 die Behauptung von Satz 2. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen, es bleibt noch der

Beweis des Hilfssatzes 2. Nimmt man zum Bogen Γ noch die Strecke AB hinzu, dann hat man eine geschlossene Kurve Δ . Sei $\bar{\Delta}$ die konvexe Hüllkurve von Δ ; dann ist $\bar{\varrho} \geq \varrho$, wobei sich $\bar{\varrho}$ auf $\bar{\Delta}$, ϱ auf Δ (und daher auch auf Γ) bezieht. $\bar{\Delta}$ hat als Ecken höchstens die Punkte A und B ; demnach unterscheiden wir folgende Fälle:

A. $\bar{\Delta}$ hat höchstens eine Ecke. Anwendung von Hilfssatz 1 auf die Kurve $\bar{\Delta}$ gibt $\bar{\varrho} \leq \mu$, woraus dann die Behauptung folgt.

B. Sowohl A als auch B ist Ecke von $\bar{\Delta}$. Es gibt mindestens einen Punkt P von $\bar{\Delta}$, der von der Geraden AB den Abstand μ hat. Denjenigen der beiden A und B verbindenden Teilbögen von $\bar{\Delta}$, auf dem P

²⁾ 1. c., S. 7.

³⁾ 1. c., S. 8.

liegt, nenne ich Δ' . Die durch P gehende Stützgerade von $\bar{\Delta}$ ist parallel zu AB , berührt Δ' und werde mit g bezeichnet. Der Kreisbogen Δ^* , der A und B verbindet und g berührt, besitzt die folgende *Minimaleigenschaft*:

Unter allen A und B verbindenden konvexen Kurvenbögen Δ' mit bogenweise stetiger Krümmung, welche die zu AB parallele Gerade g berühren, ist der Kreisbogen Δ^* derjenige, für den die obere Grenze der Krümmung am kleinsten ausfällt.

In der Tat: Das kleinste Kontinuum von g , welches den Berührungspunkt G von Δ^* und die sämtlichen Berührungspunkte von Δ' mit g enthält, bezeichne ich mit K . Ich unterscheide:

Fall I. K besteht nur aus dem Punkt G . Unterfälle:

1. In jeder Umgebung von G hat die Krümmung von Δ' Werte, die nicht kleiner sind als die Krümmung von Δ^* .

2. Es gibt eine Umgebung von G auf Δ' , in der die Krümmung von Δ' größer ist als die von Δ^* . Dann kann man von G ausgehend auf Δ' sofort in das Äußere von Δ^* gelangen. Bei dieser Wanderung auf Δ' sei G_1 der erste Schnittpunkt mit Δ^* (G_1 kann auch mit A bzw. mit B zusammenfallen). Die obere Grenze der Krümmung des dabei durchlaufenen Teilbogens Δ'' von Δ' zwischen G und G_1 ist nicht kleiner als die Krümmung desjenigen Kreisbogens, welcher durch G_1 hindurchgeht und g und die Tangente von Δ'' im Punkte G_1 berührt⁴⁾, und diese Krümmung ist offenbar wieder nicht kleiner als die von Δ^* .

Fall II. K hat einen von G verschiedenen Endpunkt H . Man läuft auf g , von G ausgehend, nach H , dann weiter auf Δ' im selben Richtungssinn bis zum ersten Schnittpunkt H_1 mit Δ^* . Für den dabei durchlaufenen Kurvenbogen Δ''' gilt dasselbe wie für den Bogen Δ'' des Falles I, 2⁵⁾.

Der Radius des Kreisbogens Δ^* ist aber gleich

$$\frac{\gamma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Beispiele, wo im Hilfssatz 2 das Gleichheitszeichen steht, sind

für $\gamma \geq \mu$ der Kreisbogen Δ^* von oben,

für $\gamma \leq \mu$ derjenige Kurvenbogen, welcher besteht einerseits aus einem Teilbogen des durch B gehenden Kreises mit dem Radius μ , dessen

⁴⁾ l. c., S. 9.

⁵⁾ Damit ist Δ^* als ein Bogen kleinster Maximalkrümmung erkannt; bliebe noch seine Einzigkeit zu zeigen. Beim Beweis von Hilfssatz 2 wird sie nicht benötigt; sie ergibt sich daraus, daß in den Fällen I, 2. und II. die Maximalkrümmung von Δ' tatsächlich größer ist als die von Δ^* , im Fall I, 1. jedoch nur dann Gleichheit gilt, wenn $\Delta' \equiv \Delta^*$ ist.

Mittelpunkt auf der Verlängerung von AB liegt, mit überspitztem Zentrwinkel, andererseits aus einer der Tangenten von A aus an den eben genannten Kreis.

Mit Hilfe dieser Beispiele und der über das Gleichheitszeichen in (*) gemachten Bemerkung ist es ein leichtes, Beispiele von Funktionen $F(x)$ zu bilden, für welche in Satz 2 das Gleichheitszeichen steht.

München, den 12. April 1932.

Zusatz. Bei den obigen Sätzen läßt sich die Voraussetzung über Differenzierbarkeit der entsprechenden Voraussetzung beim Rolleschen Satz in der Weise angleichen, daß man statt der zweimal stetigen Differenzierbarkeit *nur die einmal stetige Differenzierbarkeit* (= erste Ableitung vorhanden und stetig) verlangt; jedoch ist dann in den Behauptungen der Sätze die Größe $F''(x)$ zu ersetzen durch die Größe

$$F'^*(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x} \left| \frac{F'(y) - F'(x)}{y - x} \right|.$$

In der Tat: Bezeichnet man den Winkel der Tangente der Kurve

$$z = F(x)$$

im Punkt (x) mit $\varphi(x)$, den „unteren Krümmungsradius“ dieser Kurve im Punkte (x) mit

$$\underline{r}(x) = \underline{\lim}_{y \rightarrow x} \left| \frac{F(y) - F(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} \right|,$$

so gilt:

$$\underline{r}(x) \geq \left| \frac{F'^2(x)}{F'^*(x)} \right|.$$

Außerdem bleibt Hilfssatz 2 richtig, wenn darin das Satzstück „die Krümmung bogenweise stetig mit Unstetigkeitsstellen von nur erster Art. Ist dann ϱ die untere Grenze der Krümmungsradien von Γ “ ersetzt wird durch „Ist dann ϱ die untere Grenze der „unteren Krümmungsradien“ von Γ “.

(Eingegangen am 1. November 1932.)

Über die O -Inversionssätze der Limitierungsverfahren.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Arbeit „Über einen Satz von Vijayaraghavan“ [Math. Zeitschr. 34 (1932), S. 737–740] habe ich gezeigt, wie sich der O -Inversionssatz Vijayaraghavans:

Aus

$$\sum_{v=0}^{\infty} u_v r^v = O(1), \quad \text{bei } r \rightarrow 1,$$

und

$$\sum_{v=n}^{n'} u_v \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } n \text{ und } n \leq n' \leq \lambda n, \quad \lambda > 1,$$

folgt

$$\sum_{v=0}^n u_v = O(1), \quad \text{bei } n \rightarrow \infty,$$

auf Laplacesche Integrale erweitern läßt.

Hier möchte ich eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes geben, in welcher der Kern $r^v = e^{-\sigma v}$ die allgemeinere Form $\varphi(\sigma v)$ annimmt, wo $\varphi(t)$ eine im Intervalle $(0, \infty)$ abnehmende Funktion bedeutet.

Es wird also dieser O -Inversionssatz auf Limitierungsverfahren der Form

$$(I) \quad \Phi(\sigma) = \sum_{v=0}^{\infty} u_v \varphi(\sigma v), \quad \text{wobei } \sigma \rightarrow 0^1,$$

erweitert, welche ebenfalls in der Integralform

$$(II) \quad \Phi(\sigma) = \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\}$$

1) Mit O -Inversionssätzen bezeichne ich diejenigen Sätze, welche aus $\Phi(\sigma) = O(1)$, $\sigma \rightarrow 0$, auf $\sum_{v=0}^n u_v = O(1)$, $n \rightarrow \infty$, zu schließen erlauben, im Gegensatz zu den o -Inversionssätzen, bei welchen in der vorstehenden Bezeichnung O durch o zu ersetzen ist.

dargestellt werden können, wenn dabei

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t = 0, \\ \sum_{v=0}^n u_v, & \text{für } n < t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

gesetzt wird.

Was die Beweisanordnung betrifft, kann das Verfahren meiner erwähnten Arbeit nicht auf diesen allgemeinen Fall angewendet werden. Es wird vielmehr, dem Prinzip nach, eine Beweisanordnung angewandt, welche Herr E. Landau benutzte, um den erwähnten Vijayaraghavanschen Satz zu beweisen, und die er mir brieflich mitgeteilt hatte.

Dieser allgemeine *O*-Inversionssatz lautet:

Satz A. Sei $\varphi(t)$ eine im Intervalle $(0, \infty)$ stetige und nicht zunehmende Funktion, für welche die Reihen

$$(1) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(\lambda^v) \quad \text{und} \quad \sum_{v=0}^{\infty} \{1 - \varphi(\lambda^{-v})\}, \quad \text{für ein } \lambda > 1,$$

konvergieren, und $s(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall; sei ferner

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \quad \text{konvergent für } \sigma > 0.$$

Aus

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = O(1), \quad \text{bei } \sigma \rightarrow 0,$$

und

$$(3) \quad \min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } t > 0, \quad \lambda > 1,$$

folgt dann

$$(4) \quad s(t) = O(1), \quad \text{bei } t \rightarrow \infty.$$

Hilfssatz I. Aus der Bedingung (3) folgt auch

$$(5) \quad \min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(\lambda t) - s(t')\} \geq -m(\lambda), \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Es ist nämlich

$$\min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(\lambda t) - s(t')\} = s(\lambda t) - s(t_0) \geq \min_{t_0 \leq t' \leq \lambda t_0} \{s(t') - s(t_0)\} \geq -m(\lambda),$$

$$\text{da } t \leq t_0 \leq \lambda t \leq \lambda t_0.$$

Hilfssatz II. Sei gesetzt

$$(6) \quad S(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \{-s(t')\}, \quad \text{für } t > 0;$$

wenn $s(t)$ der Bedingung (3) genügt, so ist:

$$(7) \quad a) \quad \max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{S(t') - S(t)\} = S(\lambda t) - S(t) \leq m(\lambda), \quad \text{für jedes } t > 0;$$

$$(8) \quad b) \quad \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{S(t)\} \leq M, \quad \text{für jedes } \sigma > 0, \text{ wobei } T = a/\sigma, \quad a > 0,$$

wenn dabei $\varphi(t)$ die Bedingungen des Satzes A erfüllt.

a) $S(t)$ ist die kleinste nicht abnehmende Funktion, welche $\geq -s(t)$ ist.

Nach (3) ist

$$\max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{-s(t') + s(t)\} = \max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leq m(\lambda);$$

ist nun

$$\max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{-s(t')\} = S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) \leq \max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{-s(t')\} - \{-s(t)\} \leq m(\lambda),$$

ist hingegen

$$\max_{t \leq t' \leq \lambda t} \{-s(t')\} < S(\lambda t),$$

so ist

$$S(\lambda t) - S(t) = 0,$$

also ist (7) allgemein gültig.

b) Sei

$$\int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{S(t)\} = \sum_{v=0}^{\infty} \int_{T\lambda^v}^{T\lambda^{v+1}} \varphi(\sigma t) d\{S(t)\},$$

da $\varphi(t)$ nicht abnimmt und $T = a/\sigma$ ist, so ist wegen (7)

$$\int_{T\lambda^v}^{T\lambda^{v+1}} \varphi(\sigma t) d\{S(t)\} \leq \varphi(a\lambda^v) \{S(T\lambda^{v+1}) - S(T\lambda^v)\} \leq m(\lambda) \varphi(a\lambda^v),$$

also

$$\int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{S(t)\} \leq m(\lambda) \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v) = M, \quad \text{für jedes } \sigma > 0,$$

wobei M eine endliche Konstante ist, weil aus der Konvergenz der ersten Reihe (1) die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \varphi(a\lambda^v)$, für $a > 0$, folgt [ist nämlich $a > \lambda^{-\kappa}$, so wird $\varphi(a\lambda^n) \leq \varphi(\lambda^{n-\kappa})$ für jedes n].

Hilfssatz III. Ist $S(t)$ die durch die Gleichung (6) definierte Funktion, dann folgt aus den Voraussetzungen des Satzes A, daß

$$(9) \quad s(t) < M' + \alpha S(t) = S_1(t), \quad \text{für jedes } t > 0,$$

wobei $M' > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Sei $T = a/\sigma$, dann ist wegen (2) und (6), $s(0) = 0$ gesetzt,

$$\begin{aligned} M_1 &\geq \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = \int_0^T \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \\ &= \varphi(a) s(T) + \int_0^T -\sigma \varphi'(\sigma t) s(t) dt + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \\ &\geq \varphi(a) s(T) - \{1 - \varphi(a)\} S(T) + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\}, \end{aligned}$$

weiter ist wegen (3)

$$\begin{aligned} \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} &= \sum_{\nu=0}^\infty \int_{T\lambda^\nu}^{T\lambda^{\nu+1}} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \geq \sum_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu) \text{Min}_{T\lambda^\nu \leq t \leq T\lambda^{\nu+1}} \{s(t) - s(T\lambda^\nu)\} \\ &\geq -m(\lambda) \cdot \sum_{\nu=0}^\infty \varphi(a\lambda^\nu) = -M_2, \end{aligned}$$

also,

$$M_1 \geq s(T) \varphi(a) - \{1 - \varphi(a)\} S(T) - M_2,$$

woraus, wenn a so gewählt ist, daß

$$0 < 1 - \varphi(a) < \varphi(a)$$

wird, die Behauptung (9) folgt.

Hilfssatz IV. Ist $S(t)$, die Funktion, definiert durch (6), so ist unter den Voraussetzungen des Satzes A

$$(10) \quad s(t) + M'' + \beta S(t) > 0, \text{ für jedes } t > 0, \text{ wobei } M'' > 0, 0 < \beta < 1.$$

Sei $T = b/\sigma$, so ist wegen (2)

$$\begin{aligned} -M_1 &\leq \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = s(T) - \int_0^T \{1 - \varphi(\sigma t)\} d\{s(t)\} + \int_T^\infty \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} \\ &= s(T) + J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Nun ist, erstens, wegen (5) und (1)

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{\nu=0}^\infty \int_{T\lambda^{\nu-1}}^{T\lambda^{-\nu}} \{1 - \varphi(\sigma t)\} d\{-s(t)\} \\ &\leq \sum_{\nu=0}^\infty \{1 - \varphi(b\lambda^{-\nu})\} \text{Max}_{T\lambda^{\nu-1} \leq t \leq T\lambda^{-\nu}} \{-s(T\lambda^{-\nu}) + s(t)\} \\ &\leq m(\lambda) \sum_{\nu=0}^\infty \{1 - \varphi(b\lambda^{-\nu})\} = M_2. \end{aligned}$$

Zweitens wird, wenn $S_1(t)$ die Funktion (9) bedeutet, wegen (9) und (8)

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_T^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = -\varphi(b)s(T) + \int_T^{\infty} -\sigma\varphi'(\sigma t)s(t)dt \\ &\leq -\varphi(b)s(T) + \int_T^{\infty} -\sigma\varphi'(\sigma t)S_1(t)dt \\ &\leq S_1(T)\varphi(b) - s(T)\varphi(b) + \alpha \int_T^{\infty} \varphi(\sigma t)d\{S(t)\} \\ &\leq S_1(T)\varphi(b) - s(T)\varphi(b) + \alpha M \\ &\leq S(T)\varphi(b) - s(T)\varphi(b) + \alpha M + \varphi(b)M' \\ &\leq S(T)\varphi(b) - s(T)\varphi(b) + M_3.^2) \end{aligned}$$

Also, zusammengesetzt,

$$-M_1 \leq s(T) + M_2 + \alpha S(T)\varphi(b) - s(T)\varphi(b) + M_3,$$

das heißt,

$$\{1 - \varphi(b)\}s(T) + M_4 + \alpha\varphi(b)S(T) \geq 0,$$

woraus, wenn b so gewählt ist, daß

$$\alpha\varphi(b) < 1 - \varphi(b)$$

wird, die Behauptung (10) folgt.

Nun wird aus den Ungleichungen (9) und (10) die Behauptung des Satzes A gefolgert.

Wird nämlich $S(t)$ unendlich groß mit t , so muß wegen (6) die Gleichung $s(t) = S(t)$ für unendlich viele t -Werte bestehen, was aber im Widerspruch mit (10) steht. Also ist

$$S(t) = O(1), \quad \text{bei } t \rightarrow \infty.$$

²⁾ Die durch die erste Gleichung ausgedrückte partielle Integration ist berechtigt, weil

$$(a) \quad J(x) = \int_c^x \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = \varphi(\sigma x)s(x) - \varphi(\sigma c)s(c) + \int_c^x -\sigma\varphi'(\sigma t)s(t)dt,$$

und

$$(b) \quad \{s(x) - s(c)\}\varphi(\sigma x) = \frac{1}{\Phi(x)} \int_c^x \Phi(t) d\{J(t)\} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

da nach den Voraussetzungen $\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ monoton $\rightarrow \infty$ und $J(x) \rightarrow A$, bei $x \rightarrow \infty$. Woraus wegen (b) aus (a) die erwähnte erste Gleichung folgt.

Weiter wird wegen (9) und (10)

$$-\beta S(t) - M'' \leq s(t) \leq M' + \alpha S(t), \text{ für jedes } t > 0,$$

woraus die Behauptung (4) des Satzes A folgt.

Es sei noch bemerkt, daß nun mit Hilfe des Satzes A die *o*-Inversionssätze der Limitierungsverfahren (I) oder (II) in derselben Weise zu erhalten sind, wie dies bei der *o*-Inversion des Abelschen Verfahrens geschieht³⁾. Dabei wird aber, statt von dem Weierstraßschen Approximationssatz, von dem allgemeineren Satz Wieners⁴⁾ Gebrauch gemacht, wie es Wiener selbst in etwas komplizierter Weise tut.

Die dem Satz A folgenden nächsten Schritte für den Beweis dieses *o*-Inversionssatzes sind:

Satz B. Aus

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d\{s(t)\} = \sigma \int_0^{\infty} -\varphi'(\sigma t) s(t) dt = o(1), \text{ bei } \sigma \rightarrow 0,$$

und

$$s(t) = O(1), \text{ bei } t \rightarrow \infty,$$

folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = o(1), \text{ bei } T \rightarrow \infty,$$

wenn dabei die Funktion $\varphi(t)$ des Satzes A noch der folgenden Bedingung (B) Genüge leistet:

Sei

$$g_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{für } T < t, \end{cases}$$

und $\psi(t) = -\varphi'(t)$, es existieren zwei Folgen A_ν und a_ν , $\nu = 0, 1, 2, \dots$, derart, daß

$$(B) \quad \int_0^{\infty} \left| g_T(t) - \sum_{\nu=0}^n A_\nu \psi(a_\nu t) \right| dt \leq \varepsilon, \text{ für } n > N.$$

³⁾ Siehe z. B. J. Karamata „Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes“. Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 319—320.

⁴⁾ N. Wiener, Tauberian theorems, Annals of Math. II, 33 (1932), S. 1—100.

Satz C. Aus

$$\frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = o(1), \quad \text{bei } T \rightarrow \infty,$$

und

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} \geq -m(\lambda) \rightarrow 0, \quad \text{wenn } 1 < \lambda \rightarrow 1,$$

folgt

$$s(t) = o(1), \quad \text{bei } t \rightarrow \infty.$$

Dabei gibt, für die Existenz von (B), der erwähnte Wienersche Approximationssatz notwendige und hinreichende Bedingungen an.

Beograd, 23. Oktober 1932.

(Eingegangen am 4. November 1932.)

Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen.

Von

Otto Haupt in Erlangen.

1. Durch die grundlegenden Untersuchungen von Herrn Juel ist zum ersten Male deutlich geworden, welche Bedeutung dem Begriff der Realitätsordnung als Klassifikationsprinzip für die Kurven zukommt, also der Einteilung der (reellen) Kurven nach der maximalen Mächtigkeit ihrer (reellen) Durchschnitte mit den Ebenen.

Was die Kenntnis insbesondere der Raumkurven einer vorgegebenen Realitätsordnung k anlangt, so liegen bisher vor allem Untersuchungen vor über Kurven niedrigster Ordnung k , d. h. für $k = 3$ und $k = 4$, sowie über Kurven vom Maximalindex¹⁾. Weitere Gesichtspunkte ergeben sich aus der Bemerkung, welcher mannigfacher Modifikationen der Ordnungsbegriff fähig ist. Man kann nämlich der Ordnungsdefinition an Stelle der Ebenen (gewöhnliche Realitätsordnung) andere zweidimensionale Gebilde K zugrunde legen. Man spricht in diesem Falle von der „ K -Ordnung“ einer Kurve, während, der besseren Unterscheidung wegen, die gewöhnliche Realitätsordnung auch als „ L -Ordnung“ („lineare“ Ordnung)

¹⁾ Vgl. z. B.: Juel, C., Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung, K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og mathem. Afd., 8. R., II, 5 (1917), S. 279 ff. — Derselbe, Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen, Atti del Congr. intern. d. matematici, Bologna 1928, T. IV, Comunicazioni Sez. II, S. 195 ff. — Mohrmann, H., Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität, Sitz.-Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss., München, math.-physikal. Klasse, Jahrg. 1916, S. 201 ff. — Derselbe, Über algebraische und nicht-algebraische gewundene Kurven n -ter Ordnung vom Maximalindex, Math. Annalen 78 (1917), S. 171 ff. — Sz. Nagy, J. v., Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven, Math. Ann. 77 (1916), S. 416 ff. — Marchaud, A., Sur les continus d'ordre borné, Acta math. 55 (1930), S. 97 ff. — Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Annalen 108 (1933), S. 126 ff. — Derselbe, Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung. Erscheint in Crelles Journal.

bezeichnet wird²⁾. Und nun kann eine Verfeinerung der Fragestellung eben dadurch erzielt werden, daß man z. B. *die Kurven gleicher L -Ordnung nach ihren verschiedenen K -Ordnungen zu klassifizieren sucht*.

Ein Beispiel für eine solche Fragestellung sollen die folgenden Betrachtungen liefern. Wir wählen nämlich als Gebilde K speziell die Kugeln („sphärische Ordnung“, kürzer „ S -Ordnung“) und betrachten diejenigen *Bogen der L -Ordnung drei, welche gleichzeitig von höchstens der S -Ordnung fünf sind*. Wir zeigen, daß *solche Bogen als Summen aus einer beschränkten Anzahl von Bogen der S -Ordnung vier darstellbar sind*. Daraus folgt übrigens: Jeder Bogen der L -Ordnung drei, welcher die S -Ordnung sechs, aber keinen Punkt der einseitigen S -Ordnung sechs besitzt, ist darstellbar als Summe von endlich vielen Bogen der S -Ordnung vier.

Für die Gültigkeit der eben angegebenen Sätze sind, wie ausdrücklich bemerkt werde, keinerlei Differenzierbarkeitsannahmen bezüglich der betrachteten Bogen erforderlich.

Entsprechendes gilt für den R_n , wo $n \geq 4$ (vgl. Nr. 5); für den Fall des R_2 ist der Satz Spezialfall eines allgemeineren³⁾. Ferner läßt sich die sphärische Ordnung ersetzen durch die Ordnung bezüglich einer Mannigfaltigkeit von Flächen (im R_3), deren jede mit einer Kugel topologisch gleichwertig ist und durch vier nicht komplanare Punkte eindeutig bestimmt wird, während der Durchschnitt je zweier Flächen ganz in einer Ebene liegt.

Zum Nachweis dafür, daß unsere Fragestellung sinnvoll ist, werden (Nr. 6) Beispiele von Bogen der betrachteten Art konstruiert, die sogar algebraisch sind.

2. Der Beweisgedanke ist folgender: Es seien $P_1, \dots, P_5$ Punkte des betrachteten Bogens $\mathfrak{B}$, welche auf einer Kugel liegen. Wir halten dann irgend drei dieser Punkte, etwa $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}$ fest, lassen den vierten P_{k_4} auf $\mathfrak{B}$ wandern und betrachten die Kugel durch $P_{k_1}, \dots, P_{k_4}$. Diese schneidet $\mathfrak{B}$ in einem *fünften Punkte* P_{k_5} , und dieser *bewegt sich auf $\mathfrak{B}$ in entgegengesetzter Richtung wie P_{k_4}* . Der Beweis dieses „Monotoniesatzes“ benutzt wesentlich die Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ von der L -Ordnung drei ist. Auf Grund früherer Überlegungen³⁾ folgt aber aus der Gültigkeit des Monotoniesatzes bereits der in Rede stehende Zerlegungssatz. Diesen

²⁾ Für den Fall des R_2 sind Kurven der zyklischen Ordnung vier von Herrn Juel untersucht worden. Vgl. Juel, C., Om simple cykliske Kurver, K. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvid. og math. Afd., 7. R., VIII, Nr. 6 (1911). Man vgl. ferner die Literaturangaben in der in Fußnote ³⁾ angegebenen Arbeit.

³⁾ Vgl. Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen, Monatshefte f. Math. u. Phys. 40 (1933), § 6.

werden wir weiter unten genauer formulieren, zuvor aber den Beweis noch etwas ausführen.

3. Es bezeichne also $\mathfrak{B}$ einen beschränkten Bogen, welcher keine ebenen oder sphärischen Teilbogen enthält, d. h. keine Teilbogen, die einer Ebene oder einer Kugel angehören. Es sei ferner $\mathfrak{B}$ von der S -Ordnung fünf und von der L -Ordnung drei. Ferner seien $P_1, \dots, P_5$ untereinander verschiedene Punkte, welche sämtlich auf einer Kugel S liegen. Diese fünf Punkte seien „natürlich angeordnet“, d. h. so geordnet, daß sie bei monotoner Durchlaufung von $\mathfrak{B}$ in eben dieser Reihenfolge passiert werden. Da $\mathfrak{B}$ von der L -Ordnung drei ist, können keine drei der $P_1, \dots, P_5$ in einer Geraden und keine vier in einer Ebene liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die P_v als „Schnittpunkte“ auf S annehmen, d. h. als innere Punkte auf $\mathfrak{B}$, in deren beliebiger Nähe Punkte von $\mathfrak{B}$ sowohl im Innern als im Äußern von S sich vorfinden.

Sind nun $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}$ irgendwelche drei Punkte unter den $P_1, \dots, P_5$, ist ferner E die durch sie bestimmte Ebene, so ist hinsichtlich der beiden übrigen Punkte P_{k_4}, P_{k_5} folgendes festzustellen:

a) Beide liegen auf der gleichen Seite (oder auf verschiedenen Seiten) von E dann und nur dann, wenn sie auf $\mathfrak{B}$ durch eine gerade Anzahl eventuell keine (oder durch eine ungerade Anzahl) von Punkten des Durchschnitts von $\mathfrak{B}$ mit S , d. h. des Tripels $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}$ voneinander getrennt werden.

In der Tat: E hat mit $\mathfrak{B}$ nur das eben genannte Tripel gemeinsam; und diese drei müssen *Schnittpunkte* auf E sein, weil $\mathfrak{B}$ von der L -Ordnung drei ist.

b) Liegen P_{k_4} und P_{k_5} auf der *gleichen* Seite von E , sind sie also, zufolge a), auf $\mathfrak{B}$ durch eine gerade Anzahl von Schnittpunkten des $\mathfrak{B}$ mit S voneinander getrennt, wenn man $\mathfrak{B}$ monoton durchläuft, so erfolgt bei dieser Durchlaufung die Überschreitung von S in den beiden Punkten im entgegengesetzten Sinne, d. h. man kommt beim einen vom Äußeren ins Innere von S , beim andern vom Innern ins Äußere. Wählt man daher auf $\mathfrak{B}$ einen zu P_{k_4} hinreichend benachbarten Punkt P'_4 und legt durch $P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3}, P'_4$ die hierdurch eindeutig bestimmte Kugel S' , welche nicht in eine Ebene ausartet, so schneidet S' den Bogen $\mathfrak{B}$ in einem zu P_{k_5} beliebig benachbarten Punkte P'_5 derart, daß von den beiden, durch P_{k_4}, P_{k_5} und durch P'_4, P'_5 begrenzten Teilbogen von $\mathfrak{B}$ einer ganz im Innern des anderen liegt. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn P_{k_4} und P_{k_5} auf *verschiedenen* Seiten von E liegen. Verbinden wir daher mit der Ersetzung von P_{k_4} durch P'_4 die Vorstellung der Bewegung von P_{k_4} auf $\mathfrak{B}$, so können wir sagen:

Hält man unter den fünf Schnittpunkten des Bogens $\mathfrak{B}$ mit der Kugel S irgend drei fest, so bewegen sich die beiden übrigen im entgegengesetzten Sinne auf $\mathfrak{B}$.

4. Die in Nr. 3 bewiesene gegenseitige Abhängigkeit von irgend fünf Schnittpunkten einer Kugel S mit unserem Bogen $\mathfrak{B}$ ist nun, wie früher⁴⁾ gezeigt wurde, eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des sogenannten Kontraktions- und Expansionssatzes und damit auch insbesondere für die Gültigkeit eines Zerlegungssatzes, welcher hier folgendes besagt:

Satz: Vor. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Bogen im euklidischen R_3 . Es sei $\mathfrak{B}$ frei von ebenen und sphärischen Teilbogen. Es besitze $\mathfrak{B}$ die L -Ordnung drei und die S -Ordnung fünf.

Beh. Es gibt eine natürliche, von $\mathfrak{B}$ unabhängige Zahl s von folgender Eigenschaft: $\mathfrak{B}$ läßt sich darstellen als Summe von nicht mehr als s Bogen der S -Ordnung vier (und der L -Ordnung drei).

Da ein Bogen der S -Ordnung sechs ohne einseitige Punkte der S -Ordnung sechs darstellbar ist als Summe von endlich vielen Bogen höchstens der S -Ordnung fünf⁵⁾, so ist auch die zweite der in Nr. 1 aufgeführten Behauptungen erwiesen.

5. Die in Nr. 3 angestellten Überlegungen übertragen sich mutatis mutandis auf den Fall des euklidischen R_n ($n \geq 4$), bzw. auf den Fall von $n+2$ auf einer Hyperkugel und gleichzeitig auf einem Bogen der L -Ordnung n gelegenen Punkten (L -Ordnung hier = maximale Mächtigkeit des Durchschnittes mit einer Hyperebene). Daraus folgt dann wieder die Gültigkeit eines Zerlegungssatzes auch im R_n .

6. Die Existenz von Bogen der geforderten Beschaffenheit im R_3 kann man so einsehen. Es seien x, y, z rechtwinklige, kartesische Koordinaten. Man betrachte den Bogen $\mathfrak{B}$ dritter L -Ordnung

$$(B) \quad x = t^3 - \varrho t, \quad y = t^3, \quad z = t,$$

t reell, beliebig; ϱ reeller Parameter.

Die Schnittpunkte von $\mathfrak{B}$ mit einer Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

werden geliefert durch die Nullstellen der Gleichung

$$(G) \quad t^6 + At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0,$$

wobei a, b, c, d reelle Zahlen sind und

$$(K) \quad \begin{aligned} A &= 1 - 2\varrho, & B &= 2a, & C &= 1 + \varrho^2 + 2b, & D &= 2(c - \varrho a), \\ E &= d, & a^2 + b^2 + c^2 - d^2 &> 0 \end{aligned}$$

⁴⁾ Vgl. ³⁾, a. a. O., § 4.

⁵⁾ Vgl. Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journ. 164 (1931), Nr. 2, 2.

ist. Die S -Ordnung von $\mathfrak{B}$ ist also nicht größer als sechs; sie ist andererseits mindestens gleich vier, weil auf $\mathfrak{B}$ immer vier nicht-koplanare Punkte liegen.

Durch passende Wahl von ϱ kann man nun erreichen, daß $\mathfrak{B}$, oder wenigstens ein passend gewählter Teilbogen von $\mathfrak{B}$, die S -Ordnung vier, fünf oder sechs besitzt.

Wählt man nämlich zunächst $1 - 2\varrho = 0$, so hat (G) mindestens zwei komplexe Nullstellen, wie auch a, b, c, d gewählt sein mögen; abgesehen vom Falle, daß die sechs Nullstellen sämtlich gleich Null sind. Die S -Ordnung von $\mathfrak{B}$ ist daher höchstens, mithin genau gleich vier.

Andererseits hat (G) sicher sechs reelle Nullstellen, falls den Koeffizienten $A, \dots, E$ geeignete Werte erteilt werden, etwa die Werte $A^*, \dots, E^*$: denn jede Gleichung sechsten Grades läßt sich auf die Form (G) bringen (übrigens muß $A^* \neq 0$). Nun erkennt man aber aus (K), daß für $\varrho = \frac{1}{2}(1 - A^*)$ bei passender Wahl der $a, \dots, d$ tatsächlich den $B, \dots, E$ beliebig vorgeschriebene Werte $B^*, \dots, E^*$ erteilt werden können.

In diesem Falle enthält überdies der Bogen sicher keinen Punkt der S -Ordnung sechs. Denn zu beliebig kleiner Umgebung $\mathfrak{U}$ eines solchen Punktes P auf $\mathfrak{B}$ müßten Kugeln zu finden sein, die sechs verschiedene Punkte mit $\mathfrak{U}$ gemeinsam haben. Da die Summe der Nullstellen von (G) aber stets Null ist, könnte P nur an der Stelle $t = 0$ liegen. Andererseits aber können wegen $A^* \neq 0$ nicht sämtliche Nullstellen absolut beliebig klein sein, wie auch $a, \dots, d$ gewählt werden.

Schließlich kann ϱ so gewählt werden, daß z. B. derjenige Teilbogen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$, welcher nicht-negativen Werten von t entspricht, von der S -Ordnung fünf ist. Man bestimme nämlich, was stets möglich ist, ϱ so, daß (G) für passende $a, \dots, d$ eine negative Nullstelle besitzt und fünf positive. Dann ist $\mathfrak{B}^*$ mindestens von der S -Ordnung fünf. Andererseits ist $\mathfrak{B}^*$ nicht von der S -Ordnung sechs, da die Summe aller Nullstellen von (G) stets Null wird.

Anmerkung: Bei den oben vorgenommenen Verfügungen über $a, \dots, d$ erhalten wir niemals nullteilige Kugeln, also immer $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 > 0$, weil auf jeder der betrachteten Kugeln sicher vier verschiedene reelle Punkte liegen.

(Eingegangen am 9. November 1932.)

Über die Verteilung der quadratischen Reste.

Von

Hans Salié in Leipzig.

In letzter Zeit haben sich verschiedene Arbeiten¹⁾ mit der Verteilung der quadratischen Reste und allgemeiner der Potenzreste beschäftigt. Es handelte sich dabei um Sequenzen von Resten verschiedener Längen, deren Existenz und Anzahl unter gewissen Voraussetzungen festgestellt wurde. Die folgenden Bemerkungen wollen Beiträge zu einigen Anzahlsätzen über quadratische Reste geben.

§ 1.

Es bezeichne p eine ungerade Primzahl und x eine natürliche Zahl, die kleiner als p ist. Dann sind bekanntlich die quadratischen Reste und Nichtreste mod p in der natürlichen Zahlenreihe

$$(1) \quad 1, 2, \dots, x, \dots, p-1$$

so verteilt, daß die (1) zugeordnete Folge der Legendreschen Symbole genau $\frac{p-1}{2}$ Zeichenwechsel enthält. D. h. es kommt in (1) — bis auf einen Unterschied um eine Einheit in der Anzahl — ebenso oft vor, daß auf eine Zahl eine andere gleichen oder verschiedenen Restcharakters folgt.

Bricht (1) mit der Zahl x ab, so wird eine entsprechende Eigenschaft behauptet:

Satz 1. In der Reihe der Legendreschen Symbole

$$(2) \quad \left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \dots, \left(\frac{x}{p}\right), \quad x \leq p-1$$

¹⁾ A. Brauer, Sitzungsber. d. preuß. Ak. d. Wiss. (1928), S. 9—16; (1931), S. 329—341; Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 39—50. H. Davenport, Journ. of Lond. math. Soc. 6 (1931), S. 49—54; 7 (1932), S. 117—121. K. Dörge, Jahresber. d. D. Math. Vgg. 38 (1929), S. 41—49. H. Hopf, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 222—231.

ist die Anzahl der Zeichenwechsel, oder, was dasselbe ist, die um 1 verminderte Anzahl der Sequenzen²⁾ gleichen Vorzeichens:

$$(3) \quad A(x, p) = \frac{x}{2} + \Theta p^{2/3} \log p + 4\Theta p^{2/3}, \quad |\Theta| < \frac{3}{\pi}.$$

Beweis: Der Ausdruck

$$(4) \quad 1 - \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{h+1}{p}\right), \quad 1 \leq h < p-1$$

ist 0 oder 2, je nachdem h und $h+1$ von gleichem oder verschiedenem Restcharakter sind. Die Anzahl $A(x, p)$ ist also:

$$(5) \quad A(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{x-1} \left[1 - \left(\frac{h}{p}\right) \left(\frac{h+1}{p}\right) \right] = \frac{x-1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{x-1} \left(\frac{h(h+1)}{p}\right).$$

Die zweite Summe in dieser Zeile hat für $x = p-1$ den Wert -1 . Für beliebige ganze $x < p-1$ wird sie mit der aus p^{ten} Einheitswurzeln gebildeten Kloostermanschen Summe³⁾

$$(6) \quad P_v = \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h(h+1)}{p}\right) e^{\frac{2\pi i}{p} v h}$$

in Verbindung gebracht. Denn es ist

$$\sum_{v=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i}{p} k v} P_v = \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h(h+1)}{p}\right) \sum_{v=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i}{p} v(h-k)} = p \left(\frac{k(k+1)}{p}\right)$$

und nach Summation über $k = 0, 1, 2, \dots, x-1$

$$(7) \quad p \sum_{k=0}^{x-1} \left(\frac{k(k+1)}{p}\right) = \sum_{v=0}^{p-1} c_v P_v,$$

wobei

$$(8) \quad c_v = \sum_{k=0}^{x-1} e^{-\frac{2\pi i}{p} v k} = \begin{cases} x, & v \equiv 0 \pmod{p}, \\ \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i}{p} v x}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{p} v}}, & v \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Aus (7) folgt:

$$(9) \quad \left| \sum_{k=0}^{x-1} \left(\frac{k(k+1)}{p}\right) \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{v=0}^{p-1} |c_v|. \quad \text{Max}_{0 \leq v < p} |P_v|.$$

²⁾ Sequenzen sollen auch die Länge 1 haben können.

³⁾ H. Salié, Math. Zeitschr. 34 (1932) S. 101. Ersetze in Gl. (51) h durch $4h+2$, so entsteht

$$f(\varepsilon^v) = S(1, v^2; p) = \varepsilon^{2v} P_{4v}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Nun ist aber ⁴⁾

$$(10) \quad \max_{0 \leq v < p} |P_v| < \frac{3}{2} p^{2/3}$$

und nach (8)

$$(11) \quad \sum_{v=1}^{p-1} |c_v| \leq \sum_{v=1}^{p-1} \frac{2}{2 \left| \sin \frac{\pi v}{p} \right|} = 2 \sum_{v=1}^{p-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi v}{p}} < \frac{2}{\sin \frac{\pi}{p}} + 2 \int_1^{\frac{p-1}{2}} \frac{dv}{\sin \frac{\pi v}{p}}$$

$$= \frac{2}{\sin \frac{\pi}{p}} + \frac{2p}{\pi} \log \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4p} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}}$$

$$< \frac{4p}{\pi} + \frac{2p}{\pi} \log \frac{2p}{\pi} < \frac{2p}{\pi} \log p + \frac{4p}{\pi},$$

so daß aus (9), (10), (11)

$$(12) \quad \left| \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{k(k+1)}{p} \right) \right| \leq \frac{3}{2} p^{2/3} \left(\frac{2}{\pi} \log p + \frac{4}{\pi} + 1 \right) < \frac{3}{\pi} p^{2/3} \log p + \frac{12}{\pi} p^{2/3}$$

folgt. Damit ist (3) bewiesen.

Gelingt es, die Größenordnung $p^{2/3} \log p$ in (10) zu verbessern, so überträgt sich die Verschärfung unmittelbar auf Satz 1. Umgekehrt zeigt der folgende Satz 2, wie eine genauere Kenntnis der Verteilung (2) auf die Größenordnung von P_v zu schließen gestattet.

Satz 2. Für jedes $v \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist:

$$|P_{4v}| \leq \Theta' + 2\pi \max_{1 \leq x < p} \left| \sum_{h=1}^x \left(\frac{h^3 - 4v^3}{p} \right) \right|, \quad |\Theta'| < 3.$$

Vorbemerkung. Wegen des Zusammenhanges mit der Summe in (5) beachte:

$$\sum_{h=0}^x \left(\frac{h^3 - a^3}{p} \right) = \sum_{h=a}^{x+a} \left(\frac{h(h-2a)}{p} \right) = \sum_{h=0}^{x+a} \left(\frac{h(h-2a)}{p} \right) - \sum_{h=0}^{a-1} \left(\frac{h(h-2a)}{p} \right), \quad 1 \leq a < p.$$

Beweis von Satz 2. Nach Fußnote ³⁾ ist:

$$(13) \quad |P_{4v}| = \left| \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h^3 - 4v^3}{p} \right) e^{\frac{2\pi i}{p} h} \right| = \left| \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h^3 - 4v^3}{p} \right) \cos \frac{2\pi}{p} h \right|$$

$$= \left| -1 - 2 \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h^3 - 4v^3}{p} \right) \sin^2 \frac{\pi h}{p} \right|.$$

⁴⁾ Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 278.

Durch Abelsche Summation erhält man:

$$\sum_{h=1}^{p-1} \left(\frac{h^2 - 4v^2}{p} \right) \sin^2 \frac{\pi h}{p} = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{h=1}^x \left(\frac{h^2 - 4v^2}{p} \right) \left(\sin^2 \frac{\pi x}{p} - \sin^2 \frac{\pi(x+1)}{p} \right)$$

$$(14) \quad - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \sin^2 \frac{\pi}{p} = - \sin \frac{\pi}{p} \sum_{x=1}^{p-1} \sin \frac{\pi}{p} (2x+1) \sum_{h=1}^x \left(\frac{h^2 - 4v^2}{p} \right)$$

$$- \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) \sin^2 \frac{\pi}{p}.$$

Somit entsteht aus (13) und (14)

$$|P_4 v| \leq 1 + 2 \cdot \frac{\pi}{p} \cdot p \cdot \text{Max} \left| \sum_{h=1}^x \left(\frac{h^2 - 4v^2}{p} \right) \right| + \frac{4\pi^2}{25}.$$

und daraus Satz 2.

§ 2.

Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei mod p verschiedene quadratische Formen in x , deren Koeffizienten a_0 und b_0 von x^2 und deren Diskriminanten Δ_1 und Δ_2 durch p unteilbar sind. Durchläuft x ein volles Restsystem mod p , so kommt es vor, daß $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gleichzeitig quadratische Reste mod p sind und zwar in der Anzahl $\frac{1}{4}p + o(p)$. Dieser Satz, der unten bewiesen wird, gibt also an, daß, bis auf ein Fehlerglied $o(p)$, zu der Hälfte aller von $f_1(x)$ für $0 \leq x < p$ angenommenen quadratischen Reste auch gleichzeitig Reste von $f_2(x)$ gehören.

Satz 3. Sind ε_1 und ε_2 vorgegebene Zahlen, jede $+1$ oder -1 , so ist die Anzahl der ganzzahligen x im Intervall $0 \leq x < p$, für die gleichzeitig $\left(\frac{f_1(x)}{p} \right) = \varepsilon_1$ und $\left(\frac{f_2(x)}{p} \right) = \varepsilon_2$ ist, für $p > 5$

$$(15) \quad N(\varepsilon_1, \varepsilon_2; p) = \frac{1}{4}(p + 11 + \Theta_1 p^{3/4} + \Theta_2 p^{1/4}), \quad |\Theta_1| < 1, |\Theta_2| < \frac{1}{2}.$$

Beweis: Es ist ⁵⁾

$$(16) \quad N(\varepsilon_1, \varepsilon_2; p) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{p-1} \left[\left(1 + \varepsilon_1 \left(\frac{f_1(x)}{p} \right) \right) \left(1 + \varepsilon_2 \left(\frac{f_2(x)}{p} \right) \right) - \eta(x) \right],$$

wobei

$$\eta(x) = \begin{cases} 2 & f_\mu(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{und} \quad \left(\frac{f_\nu(x)}{p} \right) = \varepsilon_\nu, \quad \mu \neq \nu, \\ 1 & f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \mu, \nu = 1, 2,$$

⁵⁾ Vgl. die ähnlichen Ansätze bei H. Davenport, l. c. ¹⁾ und E. Jacobsthal, Crelle Journ. 132 (1907), S. 238–245.

ist und daher

$$(17) \quad \sum_{x=0}^{p-1} \eta(x) \leq 8.$$

Somit wird

$$(18) \quad |N(\varepsilon_1, \varepsilon_2; p)| \leq \frac{p}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{4} + \frac{1}{4} \left| \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f_1(x) f_2(x)}{p} \right) \right|,$$

da

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f_1(x)}{p} \right) \right| = \left| \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f_2(x)}{p} \right) \right| = 1$$

ist. Führt man

$$(19) \quad F(a, b) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x+a}{p} \right) \left(\frac{x^2-b}{p} \right)$$

ein, so läßt sich ⁶⁾

$$(20) \quad \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f_1(x) f_2(x)}{p} \right) = - \left(\frac{a_0 b_0}{p} \right) + F(\Delta_{12}, \Delta_1 \Delta_2)$$

schreiben, wenn Δ_{12} die harmonische Simultaninvariante von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bezeichnet. Durch (18), (19) und (20) ist Satz 3 bewiesen, wenn der folgende Hilfssatz gezeigt ist:

Hilfssatz 1. Für alle a, b und $p > 5$ ist

$$(21) \quad |F(a, b)| < p^{3/4} + \Theta_2 p^{1/4}, \quad \Theta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2b \equiv a^2 \pmod{p}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beweise werden zwei weitere Hilfssätze herangezogen.

Hilfssatz 2.

$$F(a, b)^2 = \left(\frac{a^2-b}{p} \right) \lambda(a, b) p + \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) \left(\frac{bx + a^2 - b}{p} \right) \chi(x),$$

wobei

$$(22) \quad \lambda(a, b) = \begin{cases} 0, & b \equiv 0 \pmod{p}, \\ 1 + \left(\frac{-1}{p} \right), & a \equiv 0, b \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$(23) \quad \chi(x) = \sum_{h=0}^{p-1} \left(\frac{h(h+1)(h+x)}{p} \right)$$

ist ⁷⁾.

⁶⁾ l. c. ⁴⁾, S. 274 u. 276.

⁷⁾ $\left(\frac{2}{p} \right) \chi(x)$ ist ein Spezialwert von $F(a, b)$. Es gilt: $\left(\frac{2}{p} \right) \chi(x) = F(2x-1, 1)$.

Beweis ⁸⁾. Es ist auch ⁹⁾.

$$(24) \quad F(a, b) = \left(\frac{2}{p}\right) \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{x^2 + 2ax + b}{p}\right),$$

so daß

$$F(a, b)^2 = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{y=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{y}{p}\right) \left(\frac{x^2 + 2ax + b}{p}\right) \left(\frac{y^2 + 2ay + b}{p}\right)$$

wird. Setzt man $y = zx$ und läßt die Summe über x mit $x = 0$ beginnen, so entsteht

$$F(a, b)^2 = \sum_{z=1}^{p-1} \left(\frac{z}{p}\right) \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{x^2 + 2ax + b}{p}\right) \left(\frac{z^2 x^2 + 2azx + b}{p}\right)$$

und nach Anwendung von Satz 2 in l. c. ⁴⁾, S. 274

$$(25) \quad F(a, b)^2 = \left[\lambda(a, b) + 1 - \left(\frac{b^2}{p}\right) \right] p + \sum_{z=0}^{p-1} \left(\frac{z}{p}\right) \cdot \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{(b-a^2)x^2 + (bz^2 - 2a^2z + b)x + (b-a^2)z^2}{p}\right).$$

Die innere Summe ist ⁹⁾ für $a^2 - b \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{2x + bz^2 - 2a^2z + b}{p}\right) \left(\frac{x^2 - (a^2 - b)^2 z^2}{p}\right)$$

oder, wenn x durch $(a^2 - b)zx$ ersetzt wird,

$$\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^2 - 1}{p}\right) \left(\frac{2(a^2 - b)zx + bz^3 - 2a^2z + b}{p}\right).$$

Wird nun nach Einsetzen dieses Ausdrucks in (25) wieder ¹⁰⁾ angewendet, so ist

$$F(a, b)^2 = \lambda(a, b)p + \left(\frac{2}{p}\right) \sum_{z=0}^{p-1} \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^2 - 1}{p}\right) \left(\frac{z^2 - b^2}{p}\right) \left(\frac{z - a^2 + (a^2 - b)x}{p}\right),$$

$a^2 - b \not\equiv 0 \pmod{p}.$

Unter der Voraussetzung $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ kann z durch $b(2z + 1)$ und x durch $2x + 1$ ersetzt werden:

$$(26) \quad F(a, b)^2 = \lambda(a, b)p + \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} \left(\frac{x(x+1)}{p}\right) \left(\frac{z(z+1)}{p}\right) \left(\frac{bz + (a^2 - b)x}{p}\right),$$

$\begin{matrix} a^2 - b \not\equiv 0 \\ b \not\equiv 0 \end{matrix} \pmod{p}.$

⁸⁾ Vgl. H. Davenport, l. c. ¹⁾, S. 53, 1. Formel, die ein Sonderfall von Hilfssatz 2 ist.

⁹⁾ l. c. ⁴⁾, Gl. (57), S. 275.

Schließlich ergibt die Substitution $x = \bar{t}z$ den behaupteten Hilfssatz 2, dessen Richtigkeit man auch in den durch (26) nicht erfaßten Sonderfällen durch passende Einfügungen in den Gang der Rechnung von (25) zu (26) erkennt.

Hilfssatz 3.

$$(27) \quad \sum_{b=0}^{p-1} F(a, b)^4 < 2p^3, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Beweis. Es sei

$$(28) \quad \delta(A) = \begin{cases} 1 & A \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & A \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

und $g(x)$ eine beliebige Funktion mit der Periode p . Dann ist

$$(29) \quad \sum_{b=0}^{p-1} \left[\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{bx+c}{p} \right) g(x) \right]^2 = \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{bx+c}{p} \right) \left(\frac{by+c}{p} \right) g(x) g(y) \\ = (1 - \delta(c)) p \sum_{x=0}^{p-1} g(x)^2 + (\delta(c) p - 1) \left[\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) g(x) \right]^2,$$

wegen ¹⁰⁾

$$(30) \quad \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{bx+c}{p} \right) \left(\frac{by+c}{p} \right) = - \left(\frac{xy}{p} \right) + p \cdot D,$$

$$D = \begin{cases} \left(\frac{xy}{p} \right), & c \equiv 0 \pmod{p}, \\ \left(\frac{xy}{p} \right) \delta(x-y) + \delta(x) \delta(y), & c \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Wird (29) mit $g(x) = \left(\frac{x+1}{p} \right) \chi(x+1)$ und $c \equiv a^2$, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ angewendet, so entsteht

$$(31) \quad \sum_{b=0}^{p-1} \left[F(a, b)^2 - \left(\frac{a^2-b}{p} \right)^2 \lambda(a, b) p \right]^2 = p \sum_{x=0}^{p-2} \chi(x+1)^2 \\ - \left[\sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x+1)}{p} \right) \chi(x+1) \right]^2 \\ = p(p^2 - 2p - 2) - \left[F(0, 1)^2 - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p \right]^2,$$

denn es ist, falls man (29) verwendet,

$$\sum_{x=0}^{p-1} \chi(x)^2 = p^2 - 2p - 1$$

¹⁰⁾ E. Jacobsthal, l. c. ⁵⁾.

und nach Hilfssatz 2

$$(32) \quad \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x+1)}{p} \right) \chi(x+1) = F(0, 1)^2 - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p.$$

Man stellt weiter leicht fest:

$$(33) \quad \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{a^2 - b}{p} \right)^2 \lambda(a, b)^2 = p - 2, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}$$

und

$$(34) \quad \sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{a^2 - b}{p} \right)^2 \lambda(a, b) F(a, b)^2 = p^2 - \left(2 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p - 2, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Bei der Herleitung von (34) ist

$$\sum_{b=0}^{p-1} \left(\frac{a^2 - b}{p} \right)^2 \left(\frac{bx + a^2 - b}{p} \right) = \delta(x-1)p - \left(\frac{x}{p} \right)$$

zu beachten.

Durch Zusammenfassen der Ausdrücke (31), (33), (34) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_{b=0}^{p-1} F(a, b)^4 &= 2p^3 - \left(4 + 2 \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p^2 - 6p \\ &\quad - \left[F(0, 1)^2 - \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p \right]^2, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ &= \begin{cases} 2p(p^2 - p - 3), & \left(\frac{-1}{p} \right) = -1, \\ 2p^3 - 6p^2 - 6p - [F(0, 1)^2 - 2p]^2, & \left(\frac{-1}{p} \right) = +1, \end{cases} \end{aligned}$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

In der Summe (27) stimmen $F(a, b)^4$ und $F(a, a^2 - b)^4$ überein, denn es ist¹¹⁾ nach (24)

$$F(a, a^2 - b) = \left(\frac{-2}{p} \right) F(a, b).$$

Es kann also aus (27)

$$(35) \quad |F(a, b)| < p^{3/4}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}$$

gefolgt werden, wenn $b \not\equiv a^2 - b \pmod{p}$ ist.

Für den Wert $F(a, b')$ mit $b' \equiv a^2 - b' \pmod{p}$ findet man aus (31)

$$[F(a, b')^2 - p]^2 < p^3,$$

d. h.

$$|F(a, b')| < p^{3/4} + \frac{1}{2} p^{1/4}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

¹¹⁾ Man ersetze in (24) x durch $-x-a$ und b durch $a^2 - b$.

Hilfssatz 1 gilt auch für $a \equiv 0 \pmod{p}$.

Beweis:

$$F(0, b) = 0, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = -1,$$

wie (19) bei Übergang von x zu $-x$ zeigt. Es ist stets $F(0, 0) = 0$ und nach Hilfssatz 2 und (32) ist

$$F(0, b)^2 = 2p + \left(\frac{b}{p}\right)[F(0, 1)^2 - 2p], \quad b \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = +1.$$

Ist N ein Nichtrest und R ein Rest mod p , so ergibt sich hieraus die bekannte Beziehung¹²⁾ wieder:

$$F(0, N)^2 + F(0, R)^2 = 4p,$$

aus der

$$(36) \quad |F(a, b)| < 2p^{1/2}, \quad a \equiv 0 \pmod{p}$$

folgt. $2p^{1/2}$ in (36) ist erst für $p > 16$ schärfer als (35). Es gilt aber (35) für $p > 5$. Man braucht sich nur zu überzeugen, daß für $p = 13$ das Maximum von $|F(0, b)|$ gleich $6 < 13^{3/4}$ ist.

Leipzig, Oktober 1932.

Zusatz bei der Korrektur (April 1933).

Wie ich soeben aus einer Arbeit von Herrn Davenport (Journ. of the London math. Soc. 8 (1933), 1. Heft, S. 46–52) erfahre, beweist Herr Mordell in einer demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Arbeit „On the number of solutions of some congruences in two variables“¹³⁾, daß

$$\Phi_f = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{f(x)}{p}\right) = O(p^{2/3}),$$

wenn $f(x)$ ein Polynom dritten oder vierten Grades in x mit ganzen rationalen Koeffizienten ist.

Unter Benutzung dieses Ergebnisses lautet Satz 3 schärfer als oben bewiesen

$$N(\varepsilon_1, \varepsilon_2, p) = \frac{p}{4} + O(p^{2/3}),$$

weil

$$F(a, b) = O(p^{2/3})$$

an Stelle von Hilfssatz 1 tritt.

¹²⁾ l. c. 10).

¹³⁾ Vgl. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 193–209.

Bemerkung über die Figuren zonal rotierender Flüssigkeiten, die von den Gleichgewichtsfiguren abzweigen.

Von

Wenceslas Jardetzky in Belgrad.

Die Methode von Liapounoff, die seinen Untersuchungen über Gleichgewichtsfiguren homogener sowie heterogener Flüssigkeiten zugrunde liegt, liefert eine Lösung des Problems der Gestalten einer permanent- und zonal rotierenden Flüssigkeit, die sich wenig von den Maclaurinschen Ellipsoiden unterscheiden ¹⁾. Es stellt sich nun die allgemeinere Frage nach der Existenz linearer Reihen von Figuren ein, die von einer gegebenen Gleichgewichtsfigur abzweigen, wenn die Flüssigkeit permanent und zonal rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist dabei eine Funktion des Abstandes s von der Rotationsachse. Die Analyse dieses Problems führt zu folgendem Ergebnis.

Es sei T_* eine bekannte Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit und es sei S_* ihre als Rotationsfläche um die z -Achse gedachte Oberfläche. Diese ist durch die Gleichung

$$(1) \quad U_* + \frac{\omega_*^2}{2f} s_*^2 = C_*$$

definiert, wo ω_* die konstante Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Rotation ist, $f U_*$ das Gravitationspotential, f die Gravitationskonstante,

¹⁾ W. Jardetzky (Žardecki), α) Sur les figures d'un fluide en rotation permanente peu différentes des ellipsoïdes de Maclaurin. „Glas“ d. serb. kön. Akad. **146** (Belgrad, 1931), S. 123.

β) Sur certaines figures d'une masse fluide hétérogène en rotation permanente et zonale (serb.) Ebenda **152** (Belgrad, 1932), S. 107. Die gekürzte Fassung in französischer Sprache wird in dem „Bulletin“ der Akademie erscheinen.

γ) Sur les séries de figures d'un fluide en rotation permanente et zonale peu différentes des ellipsoïdes. Int. Mathem. Kongreß, Sektionsvorträge. Zürich, 1932.

s_* der Abstand eines Punktes der freien Oberfläche von der Rotationsachse und C_* eine Konstante; die Dichte ist $\rho = 1$.

Es sei ferner

$$(2) \quad \omega = \omega(s^2, \lambda)$$

ein neues Gesetz der Rotation derselben Flüssigkeitsmasse, wobei der Parameter λ einen hinreichend kleinen Wert hat.

Wie man weiß, liefern die hydrodynamischen Gleichungen der Bewegung statt der Gleichung (1) diesmal die folgende Bedingung für die freie Oberfläche S :

$$(3) \quad U + \int \frac{\omega^2}{2f} ds^2 = C,$$

und man darf annehmen, daß die neue Figur der Flüssigkeit, die übrigens ebenfalls eine Rotationsfläche um die z -Achse bildet, wegen der Kleinheit des Parameters λ sich nur wenig von der anfänglichen Gleichgewichtsfigur unterscheiden wird.

Über das Gesetz (2) machen wir jetzt folgende Annahmen:

1. Der Ausdruck

$$A(s^2, \lambda) = \int \frac{\omega^2}{2f} ds^2$$

läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe von der Form

$$(4) \quad A(s^2, \lambda) = \frac{\omega_*^2}{2f} s^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda^k,$$

wo $A_k = A_k(s^2)$ Funktionen des Abstandes s sind, entwickeln. Der Konvergenzbereich

$$(5) \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad 0 \leq s^2 \leq s_1^2$$

ist so beschaffen, daß $s_1 > s_{*m}$, der größte Abstand der Punkte der Fläche S_* von der Rotationsachse, ist; λ_1 ist hinreichend klein.

2. Es gelten die Beziehungen

$$(6) \quad |A''| \leq A_1 \lambda_1^2, \quad \left| \frac{\partial A''}{\partial \xi} \right| \leq A_1 \lambda_1^2, \quad \left| \frac{\partial A''}{\partial \eta} \right| \leq A_1 \lambda_1^2,$$

$$A'' = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \lambda^k,$$

wobei die Koordinaten x, y, z der Punkte auf S_* als Funktionen der beiden Parameter ξ und η in der Form

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta)$$

ausgedrückt zu denken sind²⁾.

²⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931, S. 105–121.

Es sei $M(x, y, z)$ ein Punkt der Fläche S auf der Normale ν_* zu S_* im Punkt $M_*(x_*, y_*, z_*)$ dieser Fläche, und es sei $|\zeta|$ der Abstand $\overline{M_*M}$. Wir schreiben die Gleichung der Fläche S in der Form

$$(7) \quad \zeta = \zeta(\xi, \eta)$$

und nehmen ζ und seine partiellen Ableitungen $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ stetig, und dem absoluten Betrage nach hinreichend klein,

$$(8) \quad |\zeta|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right|, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right| \leq l \leq \varepsilon_0$$

an. Die Zulässigkeit der Annahme (8), die den Arbeiten von Liapounoff und von Herrn Lichtenstein zugrunde liegt, wird durch den schließlichen Erfolg bewiesen.

Ist die Bewegung der Flüssigkeit permanent, so ändert sich die freie Oberfläche und die Verteilung der Massen nicht mit der Zeit. Ferner liegt die gesuchte Figur in der Nachbarschaft der Gleichgewichtsfigur T_* ; das Newtonsche Potential von T kann, wie es aus den Untersuchungen von Herrn L. Lichtenstein folgt³⁾, in eine Reihe

$$(9) \quad U = U_* + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

entwickelt werden, wo das Glied $U^{(i)}$ von i -ter Ordnung in bezug auf ζ ist.

Aus den Gleichungen (1), (3), (4), (9) folgt, wenn man mit δ die Differenz $C - C_*$ bezeichnet,

$$(10) \quad U^{(1)} = \frac{\omega_*^2}{2f} (s_*^2 - s^2) + \delta - A_1 \lambda - A'' - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

Nun ist

$$s_*^2 = x_*^2 + y_*^2$$

und

$$s^2 = (x_* + \alpha \zeta)^2 + (y_* + \beta \zeta)^2,$$

wobei α, β, γ die Richtungskosinus der Normale ν_* in einem festen Achsenkreuz, dessen z -Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt, bezeichnen. Es sei τ der Kosinus des Winkels (ν_*, s_*) . Es gilt

$$\alpha x_* + \beta y_* = s_* \tau$$

und

$$s_*^2 - s^2 = -2 s_* \tau \zeta - (\alpha^2 + \beta^2) \zeta^2.$$

Die Gleichung (10) gibt jetzt

$$(11) \quad U^{(1)} + \frac{\omega_*^2 s_* \tau \zeta}{f} = \delta - A_1 \lambda + \Pi(\lambda, \zeta),$$

³⁾ Vgl. bsp. I. c. ²⁾, S. 112–115.

wo $\Pi(\lambda, \zeta)$ die Gesamtheit der Glieder zweiter und höherer Ordnung

$$(12) \quad \Pi(\lambda, \zeta) = -\frac{\omega_*^2}{2f} (\alpha^2 + \beta^2) \zeta^2 - A'' - U^{(2)} - U^{(3)} - \dots$$

bezeichnet. Man findet auf der linken Seite der Gleichung (11) den wohlbekannten Ausdruck und erhält die Integro-Differentialgleichung des Problems

$$(13) \quad \psi \zeta + \int_{S_*} \frac{\zeta' d\sigma'}{D} = \delta - A_1 \lambda + \Pi(\lambda, \zeta),$$

$$D^2 = \overline{MM'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

wobei $f\psi$ der Betrag der Schwerkraft im Punkt $M(\xi, \eta)$ ist.

Es sei $\dot{\zeta}$ eine ganz wie ζ beschaffene Ortsfunktion auf S_* .

Den allgemeinen Untersuchungen von Herrn L. Lichtenstein zufolge gelingt die Auflösung solcher Gleichungen durch sukzessive Approximationen, wenn aus

$$(14) \quad |\delta|, |\lambda| \leq \lambda_1, \\ |\zeta - \dot{\zeta}|, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\zeta - \dot{\zeta}) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\zeta - \dot{\zeta}) \right| \leq l_1 \leq 2l$$

die Ungleichheiten

$$(15) \quad \left| \Pi \right|, \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \right|, \left| \dot{\Pi} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial \xi} \right|, \left| \frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial \eta} \right| \leq A(l^2 + l\lambda_1 + \lambda_1^2), \\ \left| \Pi - \dot{\Pi} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\Pi - \dot{\Pi}) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial \eta} (\Pi - \dot{\Pi}) \right| \leq B(l + \lambda_1)l_1$$

folgen, wo A und B zwei Konstanten bezeichnen.

Man sieht fast unmittelbar, daß wegen der Bedingungen (6) für die zusätzlichen Glieder in unserem Problem solche Ungleichheiten gelten.

Darum ist ganz ähnlich wie in dem Falle der Gleichgewichtsfiguren⁴⁾

$$\zeta = \frac{1}{\psi} (\delta - A_1 \lambda) + \sum_{j=1}^m r_j u_j + \frac{1}{\psi} \Pi(\lambda, \zeta) \\ - \int_{S_*} H_1(M, M') \left[\frac{1}{\psi'} (\delta - A'_1 \lambda) + \frac{1}{\psi'} \Pi'(\lambda, \zeta') \right] d\sigma',$$

wo u_j die gemäß

$$\int_{S_*} \psi u_k u_j d\sigma = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ -1 & (k = j) \end{cases}$$

normierten Eigenfunktionen der homogenen Integralgleichung

$$(16) \quad \psi \zeta + \int_{S_*} \frac{\zeta' d\sigma'}{D} = 0$$

⁴⁾ Vgl. l. c. 2).

bedeuten,

$$r_j = - \int_{S_*} \psi' u'_j \zeta' d\sigma', \quad |r_j| \leq \lambda_1, \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

ist und

$$\frac{1}{D} = N_1(M, M') + \sum_{j=1}^m \psi \psi' u_j u'_j, \quad \psi' = \psi(M'), \quad u'_j = u_j(M')$$

gesetzt wird; H_1 ist der lösende Kern von $\frac{1}{\psi} N_1$.

Die Konvergenz der sukzessiven Approximationen ist gesichert. Zur Sicherstellung der Existenz der gesuchten Figuren einer permanent und zonal rotierenden Flüssigkeit in der Nachbarschaft einer bekannten Gleichgewichtsfigur mit Rotationssymmetrie gehört, falls $m > 1$ ist, d. h. (16) mindestens eine nichttriviale Nulllösung hat, eine Diskussion der Verzweigungsgleichungen. Die Gestalt der als vorhanden anzunehmenden neuen reellen Figuren hängt von dem Wert des Parameters λ ab. Ändert man diesen stetig, so bekommt man eine einparametrische Schar von Figuren, welche von der Gleichgewichtsfigur ($\lambda = 0$) abzweigt.

Wir bemerken noch, daß eine analoge Betrachtung in dem Fall einer heterogenen Flüssigkeit durchgeführt werden kann, da die zusätzlichen Glieder (4) in unserem Problem sich nicht ändern.

Belgrad, den 30. Oktober 1932.

(Eingegangen am 12. November 1932.)

Parallelism and Path-Spaces.

By

D. D. Kosambi in Poona (Indien).

1. The present paper is devoted to the geometrical study of an arbitrary system of second order differential equations of the form:

$$(I) \quad \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

The integral curves of (1) are assumed to be such that in some continuous n -dimensional region of the space (x^i) they possess the property of convexity: one and only one such curve — which we shall call *path* — passes through any two points of the region. The parameter t can be considered as an additional timelike coordinate, or an arbitrary arc-like parameter, the latter point of view being rarely stressed. Besides the tensor summation convention, I use the following notation for partial differentiation:

$$\frac{\partial A_{::}}{\partial x^k} = A_{::,k}, \quad \frac{\partial A_{::}}{\partial \dot{x}^k} = A_{::;k}.$$

In a previous memoir¹⁾ (the knowledge of which is not assumed here) I attempted to investigate the possibility of deducing the system (1) from a variational principle

$$(1.1) \quad \delta \int f(x, \dot{x}, t) dt = 0$$

this is equivalent to finding a metric for the path-space. It is seen at once that the integrand f must be a solution of

$$(1.2) \quad -\alpha^i f_{,i;j} + \dot{x}^i f_{,i;j} + \frac{\partial}{\partial t} f_{,i;j} - f_{,j} = 0.$$

These equations as they stand are tensor-invariant, but without simple or even geometrically interpretable compatibility conditions. If,

¹⁾ D. D. Kosambi, *The existence of a metric and the inverse variational problem*, Bull. U. P. Acad. of Science, vol. 2. The main ideas of the investigation were set forth in a lecture to the Aligarh Mathematical Seminar on March 5. 1931. Some of the results of the present paper have also been given in a note in the Rendiconti R. Accad. dei Lincei 16 (1932), S. 410—415.

however, an additional condition is imposed to the effect that f be a constant over the paths i. e. $\frac{df}{dt} = 0$ the system (1. 2) reduces at once to

$$(1. 3) \quad \begin{aligned} -\alpha^i f_{,i} + \dot{x}^i f_{,i} + \frac{\partial f}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{2} \alpha^i_{;j} f_{,i} - f_{,j} &= 0. \end{aligned}$$

The compatibility conditions for this first order system are easily worked out, and if $f_{,k}$ be eliminated wherever they occur, we obtain the following differential invariants as coefficients in successive equations:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i &= \alpha^i - \frac{1}{2} \alpha^i_{;k} \dot{x}^k, \\ -2 P_j^i &= \alpha^\sigma \alpha^i_{;\sigma;j} - \dot{x}^\sigma \alpha^i_{;\sigma;j} - \frac{1}{2} \alpha^\sigma_{;j} \alpha^i_{;\sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \alpha^i_{;j} + 2 \alpha^i_{,j}, \\ 3 R_{jk}^i &= P_{j;k}^i - P_{k;j}^i. \end{aligned}$$

The ordinary Riemann-Christoffel curvature tensor is $R_{jk;l}^i$. M. E. Cartan²⁾ has been kind enough to point out that one differential invariant, namely, $\alpha^i_{;j;k;l}$ does not so appear; but this may be regarded essentially as $\varepsilon^i_{;j;k}$. To see the geometrical bearing of these invariants it is necessary to develop the concept of parallelism for our spaces, and this is the main purpose of the present work.

Two fundamental ideas are sufficient to develop the full use of a parallelism: that the paths be autoparallel lines, and that the operator of the parallelism should have the tensorial character. From these, it is shown that a non-distributive parallelism results, but that a distributive bi-parallelism can be obtained by omitting an additive vector. If on the other hand, we keep consistently to the point of view that the inverse variational problem is essential, then the parallelism must give an invariative form to the equations of variation of the paths. And that too leads to much the same result. These methods show no way of obtaining an additional index for a given tensor, in a fashion analogous to covariant differentiation in the Ricci-calculus. But it is seen that since only the biderivate can be defined for the general tensor, this is not a fundamental question.

In the first paper referred to, there appeared a curious result in the guise of the theorem:

A necessary and sufficient condition that the integral of any twice differentiable function $\varphi(f)$ be stationary over the extremals of $\delta \int f dt = 0$ is that the integrand f be a constant along the extremals i. e. $\frac{df}{dt} = 0$.

²⁾ In a personal letter, an extract of which is published after this paper.
Mathematische Zeitschrift. 37.

This gives the same reduction as in the system (1. 3). To account for it, it is necessary to develop the analogue of the equations of Killing. The metric f can be regarded as an invariant of a certain fundamental group, and any function thereof will naturally be an invariant also. The second order equations given by Davis³⁾ in his treatment of the inverse variational problem can be deduced from (1. 2) by requiring the metric to be a relative invariant in place of an absolute invariant, which implies that $\frac{df}{dt} = \lambda f$. The arbitrary constant λ is then eliminated from the resulting compatibility conditions.

2. In the metric case, where the vanishing of the first variation gives the usual system of Euler's equations, or (as we then assume) the equivalent system (I), the important part played by the second variation of the integrand is well-known; this leads to the equations of variation, which we have to consider in order to restrict the end-points of the integral in (1. 1) to lie between two conjugate foci on the extremal. On the other hand, in the metric as well as in the non-metric case, the equations of variation can be obtained by taking

$$\bar{x}^i = x^i + u^i \delta \tau$$

where $\delta \tau$ is an infinitesimal, and $\bar{x}^i$ as well as x^i are assumed to lie on nearby paths or extremals. Substituting in (I) and neglecting higher powers of $\delta \tau$, we have:

$$(II) \quad \ddot{u}^i + \dot{u}^k \alpha_{,k}^i + u^k \alpha_{,k}^i = 0.$$

It will be seen that these are equivalent to the equations of second variation in the metric case, provided f is non-trivial, i. e.

$$\Delta \equiv |f_{,k;l}| \neq 0.$$

We shall take (I) and (II) as fundamental systems of equations for affine path-spaces, and proceed to investigate the possibility of deducing both from an unifying basis of parallelism.

3. The derivate $D(u)^i$ of a set of n quantities shall be defined along a given curve as

$$(3. 1) \quad D(u)^i = \dot{u}^i + \beta^i(x, \dot{x}, t).$$

³⁾ D. R. Davis in the Bull. Amer. Math. Soc. (1929), pp. 371—380. The equations given there would seem to be necessary, but not sufficient.

⁴⁾ For a detailed bibliography of the subject, and in particular for references to the numerous papers of Berwald, I refer the reader to the article of Koschmieder, Jahresber. d. D. M. V. 40, pp. 109—132. Other papers related to the present investigation are D. R. Davis, l. c. and Trans. Amer. Math. Soc. 33, p. 246 and J. Douglas, Ann. of Math. (II) 29.

We neglect here the possibilities of derivatives containing differential coefficients of x and u of higher order than the first. Even so, a more general form might seem to be

$$D(u)^i = f^i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t).$$

But if the derivative is to be fundamental, we must deduce (I) from

$$f^i(x, \dot{x}, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0.$$

This implies that the equations

$$f(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = 0$$

thought of as equations in five variables, are soluble for $\dot{u}$. Hence rather than attempt an investigation of all possible linear or functional combinations of the f^i , we might as well postulate a derivative as in (3.1). Since an invariantive form of equations is to be desired, we restrict the derivative to be such that on a non-singular transformation of coordinates, the transformed derivative also vanishes with the original, at least when the set derived forms the components of a contravariant vector. That is to say,

$$(3.2) \quad \overline{D}(u)^i = F_j^i D(u)^j.$$

The coefficients F_j^i must be non-singular for $D(u) = 0$, and their determinant $F = |F_j^i| \neq 0$. The simplest possible assumption that gives the result desired is that the derivative of a contravariant vector is itself a contravariant vector. The coefficients F_j^i are then $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$, functions of the transformation itself, and the non-vanishing of F is equivalent to the non-singularity of the transformation.

The assumption is more restrictive than others that can be made, but it leads directly to the tensor-invariance of all our fundamental equations.

The parallel displacement of a vector or even a set of n functions along a given curve will be said by definition to take place when and only when the derivative along the curve vanishes. The vector curvature of any curve will be defined as the derivative $D(x)$ along the curve itself. Finally, the paths are to be autoparallel, or curves of zero vector curvature:

$$(3.3) \quad D(\dot{x})^i \equiv \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0.$$

This gives at once, a restriction on the form of the derivative,

$$(3.4) \quad \beta^i(x, \dot{x}, \dot{x}, t) = \alpha^i(x, \dot{x}, t).$$

4. Since the equations (II) are fundamental in the metric K -space, it should be also possible to reduce them by an application of the principle of derivation to a tensor-invariant form. To this end, we shall assume $u = \frac{x-x}{\delta\tau}$ to be a contravariant vector, which is displaced parallelly along the path that is the *base* of the variation. The equations (II) must reduce to the form

$$(4.1) \quad D^2(u)^i \equiv D[D(u)]^i = \varphi^i(x, \dot{x}, u, t).$$

To compute φ^i equate the two forms of (II).

$$\begin{aligned} \ddot{u}^i + \dot{u}^k \alpha_{;k}^i + u^k \alpha_{;k}^i \\ \equiv \ddot{u}^i - \alpha^k \beta_{;k}^i + \dot{x}^k \beta_{;k}^i + \dot{u}^k \frac{\partial \beta^i}{\partial u^k} + \frac{\partial \beta^i}{\partial t} + \beta^i(x, \dot{x}, \dot{u} + \beta, t) - \varphi^i = 0. \end{aligned}$$

It follows immediately by observing the fashion in which $\dot{u}$ enters the identity that

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \beta^i(x, \dot{x}, u, t) &= \gamma_k^i u^k + \varepsilon^i, \\ \gamma_k^i &= \gamma_k^i(x, \dot{x}, t), \quad \varepsilon^i = \varepsilon^i(x, \dot{x}, t), \\ \frac{1}{2} \alpha_{;k}^i &= \gamma_k^i. \end{aligned}$$

Furthermore, recalling the previous identity (3.4) we have our complete formula for the derivate;

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon^i &= \alpha^i - \frac{1}{2} \dot{x}^k \alpha_{;k}^i, \\ D(u)^i &= \dot{u}^i + \frac{1}{2} u^k \alpha_{;k}^i + [\alpha^i - \frac{1}{2} \dot{x}^k \alpha_{;k}^i]. \end{aligned}$$

Note that the residual coefficients ε^i vanish identically if and only if $\alpha^i(\lambda \dot{x}) = \lambda^2 \alpha^i(\dot{x})$. Whenever the residual coefficients are zero, we have the derivate of the null vector also vanish, and the operation of the derivate becomes distributive;

$$(4.4) \quad D(u+v) - \{D(u) + D(v)\} = -\varepsilon^i = 0.$$

The vanishing of ε^i is seen to be a necessary as well as a sufficient condition for the last. Postulating a distributive law a priori for the derivate would have greatly restricted the spaces for which the operation had a meaning.

5. The equations (II) or (4.1) can now be written in the invariant form

$$D^2(u)^i = u^r S_r^i + D(\varepsilon)^i$$

where

$$(5.1) \quad S_r^i = \gamma_k^i \gamma_r^k - \alpha_{;r}^i - \gamma_{r;k}^i \alpha^k + \dot{x}^k \gamma_{r;k}^i + \frac{\partial \gamma_r^i}{\partial t} = P_r^i.$$

It can be seen that S_r^i is a mixed tensor. For if $D(u)^i$ is to be a vector with u^i then ε^i must be the components of a vector, which we call the residual vector. And we have assumed that u is a vector, and $D(u)$, $D^2(u)$ are then vectors also. The chief usefulness of our equations is seen to be in their normal form. That is, when the equations can be reduced by means of some change of coordinates that is non-singular, and brings (5.1) to

$$(5.2) \quad \ddot{u}^i = P_r^i u^r.$$

This implies that we can make

$$\ddot{u} = D^2(u) - D(\varepsilon)$$

along the path that forms the base. The transformation must therefore be that particular one which makes

$$\gamma_k^i = \frac{1}{2} \alpha_{;k}^i = 0$$

along the base. We can thus state a theorem.

A necessary and sufficient condition for the reduction of the equations of variation to the normal form is the existence of a non-singular transformation of coordinates for which $\gamma_k^i = \alpha_{;k}^i = 0$ along the given base⁵⁾.

Thus, we see the need for what amounts to an extended theorem of Fermi for our K-spaces. This is proved in a later section though when the residual vector is a identically null, the proof for symmetric affine connections is immediately extensible.

In the normal form, the equations (II) give the geodesic deviation of Levi-Civita. Successive roots of $|u_j^i| = 0$ give conjugate foci on the base. $|u_j^i|$ is the determinant of n independent solution of (5.2), or of (II). Dynamical stability for systems that are given by (I) would mean that u can be made arbitrarily small for all values of the parameter by choosing reasonably small values of u and $\dot{u}$ initially. But here again, the various definitions of stability will have to be considered separately.

By taking $v(x)$ to be a vector field one can consider the existence of a covariant derivative $v_{|r}^i$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} D(v)^i &= v_{|r}^i \dot{x} = \dot{x}^r [v_{,r}^i + \gamma_{kr}^i v^k + \varepsilon_r^i], \\ \dot{x}^r \gamma_{kr}^i &= \frac{1}{2} \alpha_{;k}^i, \quad \dot{x}^r \varepsilon_r^i = \alpha^i - \frac{1}{2} \dot{x}^k \alpha_{;k}^i. \end{aligned}$$

⁵⁾ Note that for other parallelisms, where $\gamma_k^i \neq \frac{1}{2} \alpha_{;k}^i$, we must have transformations that make both γ_k^i and $\alpha_{;k}^i$ vanish simultaneously on the base, for reduction to the normal form; this is the general necessary and suff. condition.

To be of any use at all the covariant derivative must be independent of the direction of derivation, which gives

$$(5.4) \quad \alpha^i = \dot{x}^k \dot{x}^j \Gamma_{jk}^i(x, t), \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$$

for the most general K-spaces in which a proper covariant derivative exists: the symmetric affine connections.

If, however, we use the general parallelism γ_k^i and ε^i where $\varepsilon^i = \alpha^i - \dot{x}^k \gamma_k^i$, $2\gamma_k^i \neq \alpha_{;k}^i$ we can still get valid results; these are seen to be;

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \gamma_k^i &= \dot{x}^r \gamma_{kr}^i(x, t) \\ \varepsilon_r^i(x, t) &= \alpha_{;k}^i - [\gamma_{kr}^i + \gamma_{rk}^i] \dot{x}^k \end{aligned}$$

i.:

$$\alpha^i = \gamma_r^i \dot{x}^r \dot{x}^k + \varepsilon_r^i \dot{x}^r.$$

These are the most general parallelisms admitting a covariant derivative independent of direction. And it is seen that the torsion tensor is given by

$$(5.6) \quad \Omega_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \gamma_{kj}^i = \gamma_{j;k}^i - \gamma_{k;j}^i.$$

6. As ε^i is a vector on the assumption that $D(u)$ is always a vector with u , we can have a restricted derivate, or the "biderivate"

$$(6.1) \quad \mathfrak{D}(u)^i = \dot{u}^i + \frac{1}{2} \alpha_{;k}^i u^k.$$

The operation so defined becomes distributive, and is also a vector with u . We get correspondingly bipaths and a biparallelism and the reduction of the equations of variation is simplified, though for the canonical form, the necessary and sufficient condition reads as before.

The same results are seen to be true even for a more general tensor analysis, of the sort suggested in the first paper. For instance, let the vector law of transformation be

$$(6.2) \quad \bar{u}^i = F_j^i(x, \dot{x}, t) u^j, \quad F = |F_j^i| \neq 0.$$

where the coefficients F_j^i are functions of the transformation, as well as of any particular curve along which the vector may be defined. We again assume that the derivate $D(u)$ is a vector with u and that the paths are given by $D(\dot{x}) \equiv \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$ as before. Then the identities following must hold for all vectors u .

$$(6.3) \quad \begin{aligned} D(u)^i &= \dot{u}^i + \beta^i(x, \dot{x}, u, t), \\ \bar{D}(\bar{u})^i &= F_j^i D(u)^j, \end{aligned}$$

$$\dot{u}^j F_j^i + u^j \frac{d}{dt} F_j^i + \beta^i(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, u^j F_j^i, t) \equiv F_j^i [\dot{u}^j + \beta^j(x, \dot{x}, u, t)].$$

The following results are then read off by inspection:

a) The β^i are linear in u ;

$$\beta^i(x, \dot{x}, u, t) = u^k \gamma_k^i(x, \dot{x}, t) + \varepsilon^i(x, \dot{x}, t).$$

b) The residual coefficients ε^i still form a vector;

$$\varepsilon^i = \alpha^i - \gamma_k^i \dot{x}^k,$$

$$\bar{\varepsilon}^i = F_j^i \varepsilon^j.$$

c) The law of transformation for γ_k^i is

$$\bar{\gamma}_k^i F_j^k + \frac{d}{dt} F_j^i = F_k^i \gamma_j^k.$$

We have again a vector biderivate. The complete determination of the γ_k^i requires further conditions, which we can impose as before, with the same results.

The most general transformation laws, which involve the vector itself, are not feasible, for

$$\bar{u}^i = u^j F_j^i(x, \dot{x}, u, t)$$

implies that

$$\bar{D}(\bar{u})^i = D(u)^j F_j^i(x, \dot{x}, D(u), t).$$

To solve the resulting equations, we ought to assume that

$$\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$$

when $D(\dot{x}) = 0$ but without the identical relationship.

The analysis becomes complicated, and as yet, I see no elegant presentation, or even any particularly interesting results that can be included here.

7. To revert to the discussion of reduction to a normal form of the equations (II), we note first of all that the standard proof by Eisenhart⁶) of the theorem of Fermi can be extended as it stands to the case $\varepsilon^i = 0$. Furthermore, the formula (6.3) c shows that the $\bar{\gamma}_k^i$ will all vanish provided only

$$(7.1) \quad \gamma_k^i \bar{F}_j^k + \frac{d}{dt} \bar{F}_j^i = 0.$$

If this is scrutinized accurately, one can see at once that a sufficient condition for the reducibility in question is the existence of n independent families of vectors $\lambda_{(j)}^i$ that are all *biparallel* along the base, and equal there to the coefficients of the inverse transformation to F_j^i . We must have

$$(7.2) \quad \lambda_{(j)}^i = \bar{F}_j^i \quad \bar{F}_j^k F_k^i = \delta_j^i = \bar{\lambda}_{(j)}^i$$

$$\mathfrak{D}(\lambda_{(j)}^i) = 0.$$

⁶) See Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Am. Math. Soc. Coll. (1927), pp. 64-67.

For the ordinary laws of point transformation, this can always be done, as is seen from the work of Eisenhart cited, formula (25.10), where such a transformation is built up for any curve as base; the process can be reproduced merely by using biparallelism to the K-space in question. Stability thus comes to discussing the roots of the characteristic equation

$$(7.3) \quad |\lambda \delta_j^i - S_j^i| = 0.$$

If these are all real and negative, we have a transformation for our normal coordinates, and finite oscillations in these.

$S_j^i = P_j^i$ is a mixed tensor, and the roots of (7.3) will therefore be invariants under point transformation.

With the general $F_j^i(x, \dot{x}, t)$ for transformation coefficients, reduction is not always possible, as there may not be a transformation corresponding to a given set of coefficients even along a curve; $\dot{x}$ is not in general a vector. The condition (7.1) and its interpretation are unchanged. Matrix laws of combination apply to the coefficients F , when two or more transformations are performed in succession. Lastly, a covariant biderivate can be defined;

$$(7.4) \quad \mathfrak{D} u_i = \dot{u}_i - \gamma_i^k u_k.$$

The coefficients of covariance being φ_j^i

$$\bar{u}_i = \varphi_i^j u_j.$$

For self-consistence and simplicity $\bar{F}_j^i = \varphi_j^i$ can be assumed, using the upper index for summation, though this is merely a sufficient condition. Biderivation for tensors of any rank can be defined by analogy with the usual formulae for covariant differentiation, giving always a tensor of the same type as the original.

8. The foregoing deductions can be motivated by considering groups of deformations of the space. If the infinitesimal transformation of the group be

$$(8.1) \quad \bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta \tau$$

invariants of the group of the form $f(x, \dot{x})$ will be given by

$$\delta f \equiv \delta \tau [\xi^i f_{,i} + \dot{\xi}^i f_{,i}] = 0$$

we demand that the transformation be parallel in the path-space:

$$(8.2) \quad \dot{\xi}^i + \gamma_k^i \xi^k + \varepsilon^i = 0.$$

This gives us at once

$$(8.3) \quad \xi^i [f_{,i} - \gamma_i^k f_{,k}] - \varepsilon^i f_{,i} = 0.$$

Sufficient conditions for invariance are

$$(8.4) \quad (a) \quad \varepsilon^i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} = 0,$$

$$(b) \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} - \gamma_i^k \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^k} = 0.$$

In addition to this, if f contains the parameter t explicitly, we can expand the group by adding to (8.1)

$$\bar{t} = t + \delta \tau.$$

By this, we shall say that t is an *affine parameter* for the path-space.

There is then added an extra term $\frac{\partial f}{\partial t}$ to (8.3) and (8.4) become

$$(8.5) \quad f_{,i} - \gamma_i^k f_{,k} = 0, \quad \varepsilon^i f_{,i} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

If the parallel transformations are $n+1$ in number, it is seen that (8.5) are necessary as well as sufficient conditions for invariance. If the stream-lines of the transformation defined by the congruence $\dot{x}^i = \xi^i$ are paths of the space, as would be expected from (8.2) we see from the relation $\varepsilon^i = \alpha^i - \gamma^i \dot{x}^k$ and from the condition for invariance that

$$(8.6) \quad \frac{df}{dt} \equiv -\alpha^i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

i. e. the function $f(x, \dot{x}, t)$ is constant along the path-streamline. The $n+1$ transformations imply that every path can be made a streamline in some sufficiently restricted n dimensional manifold of the space: we should expect the same result from (8.5). This indeed is seen at once to be true by eliminating γ_k^i . And this property of the invariant is independent of the particular γ_k^i — or parallelism — chosen. Our reduction of the equations of variation gave us $\gamma_k^i = \frac{1}{2} \alpha_{i,k}^i$, the transformation being one which carried paths into paths⁷).

9. If then, we are to deduce our geometry from some fundamental group to which the space is subjected, and the space has one or more metrics attached to it, we should expect the metric $f(x, \dot{x}, t)$ to be an invariant of the group, and the paths to be the geodesics of the metric, i. e. extremals of the variational principle

$$\delta \int f(x, \dot{x}, t) dt = 0.$$

This implies that f be a solution of

$$(9.1) \quad \delta_i f \equiv \alpha^i \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} - \dot{x}^j \frac{\partial^3 f}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

such that

$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \right| \neq 0.$$

⁷) And the group, if solutions of the equation of variation define one as would be expected, will be valid in that neighbourhood of a point within which no conjugate focus exists on any extremal through the point.

Now the actual condition of invariance $\frac{df}{dt} = 0$ along the paths reduces this system to one of the first order;

$$(9.2) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0.$$

The parallelism is then determined at once⁸⁾ as $\gamma^i_k = \frac{1}{2} \alpha^i_{;k}$. The same reduction can be obtained by imposing on f a property of the invariants: that any $\varphi(f)$ be also a possible metric with f .

As is well known from Hamilton's principle, or as can be proved directly, any solution of (9.1) has the property

$$(9.3) \quad \frac{d}{dt} \left[\dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} - f \right] + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

If f does not contain explicitly the parameter t , then $\dot{x}^i f_{;i} - f$ is a constant along the paths.

Whence any $f(x, \dot{x})$, homogeneous of any degree except one in $\dot{x}$, and a solution of (9.1) is also a solution of (9.2), and constant along a path-extremal. There will in general be a finite number of independent solutions if equations (9.2) are compatible with $\frac{df}{dt} = 0$; or else none. And just as all invariants of the group can be expressed as a function of a finite number of them, so also any invariant metric will be expressible in terms of these fundamental solutions, the analogy being complete. Of course, a metric proper would need certain other conditions to determine it completely.

Differential invariants of the space, including the two curvature tensors, appear as coefficients in successive compatibility conditions of (8.5) or (9.2) depending on the choice of parallelism.

⁸⁾ Or else extra compatibility conditions are introduced $(\alpha^i_{;k} - \gamma^i_k) f_{;i} = 0$.

Observations sur le mémoire précédent.

Par

Elie Cartan (à Paris).

(Extrait d'une lettre à M. D. D. Kosambi.)

... J'admets donc que dans les équations

$$(1) \quad \ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$$

t est un paramètre *imposé* (par exemple le temps). S'il en est ainsi, on peut formuler de deux manières différentes le problème à résoudre :

(A) *Trouver les propriétés géométriques qu'on peut attacher au système (1) et qui ont un caractère intrinsèque par rapport au groupe infini des transformations*

$$(x^i)' = F^i(x), \quad t' = t.$$

(B) *Trouver les propriétés géométriques qu'on peut attacher au système (1) et qui ont un caractère intrinsèque par rapport au groupe infini des transformations*

$$(x^i)' = F^i(x, t), \quad t' = t.$$

Dans le cas (A), qui est celui que vous semblez envisager, on a affaire à un espace et à un temps (qui a une signification absolue).

Dans le cas (B), on a affaire à un *espace-temps*, le temps ayant encore une signification absolue.

Du reste, toute notion géométrique fournie par le problème (B) conserve un sens dans le problème (A); mais la réciproque n'est pas vraie.

Il est remarquable que dans le problème (A) vous avez en somme trouvé *presque* tous les tenseurs fondamentaux, et cela par un procédé très élégant. Il n'y en a qu'un que vous n'avez pas obtenu; c'est le tenseur $\alpha^i_{j;k;l}$ (qui existe dans les deux problèmes (A) et (B)). Vous n'avez pas non plus obtenu les procédés les plus généraux de dérivation

covariante des tenseurs (formation par dérivation de nouveaux tenseurs à partir d'un tenseur donné), car il y en a d'autres que la dérivation par rapport aux $\dot{x}^h$. A mon avis, pour résoudre complètement le problème, il faut considérer l'espace à $2n + 1$ dimensions des $x, \dot{x}$ et t et considérer dans cet espace un transport parallèle à partir du point $(x, \dot{x}, t)$, en faisant varier les $x, \dot{x}$ et t sans que δx soit égal à $\dot{x} \delta t$. Admettons a priori que la différentielle covariante d'un vecteur X^i soit

$$D X^i = d X^i + [\gamma^i_k dt + \gamma^i_{kh} (d x^h - \dot{x}^h dt)] X^k \quad (\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{kj})$$

et plaçons-nous dans le cas du problème général (B). Les quantités $\omega^i_a = d x^i - \dot{x}^i dt$ déterminent manifestement un vecteur (d est un symbole de différentiation indéterminée). Introduisons deux symboles d et δ échangeables entre eux et formons $D \omega^i_\delta - \Delta \omega^i_a$. On obtient, en supposant $\gamma^i_{rh} = \gamma^i_{hr}$,

$$(2) \quad D \omega^i_\delta - \Delta \omega^i_a = dt [\delta \dot{x}^i + \alpha^i \delta t + \gamma^i_h (\delta x^h - \dot{x}^h \delta t)] \\ - \delta t [d \dot{x}^i + \alpha^i dt + \gamma^i_h (d x^h - \dot{x}^h dt)].$$

Posons

$$\tilde{\omega}^i_a = d \dot{x}^i + \alpha^i dt + \gamma^i_h (d x^h - \dot{x}^h dt).$$

Comme le système d'équations $\tilde{\omega}^i_a = \omega^i_a = 0$ n'est autre que le système donné (1), il a un caractère invariant, et la formule (2) montre que la forme $\tilde{\omega}^i_a$ a le caractère d'un vecteur. Formons alors

$$(3) \quad D \tilde{\omega}^i_\delta - \Delta \tilde{\omega}^i_a = (\alpha^i_k - 2 \gamma^i_k) [\tilde{\omega}^k_a \delta t - \tilde{\omega}^k_\delta dt] \\ + (\gamma^i_h - \gamma^i_{h;k}) (\omega^h_\delta \tilde{\omega}^k_a - \omega^h_a \tilde{\omega}^k_\delta) \\ + A^i_k (\omega^k_a \delta t - \omega^k_\delta dt) + A^i_{kh} (\omega^k_a \omega^h_\delta - \omega^k_\delta \omega^h_a).$$

On aura une détermination intrinsèque de la différentiation covariante en annulant les deux premiers coefficients:

$$(4) \quad \gamma^i_k = \frac{1}{2} \alpha^i_{;k}, \quad \gamma^i_{hk} = \frac{1}{2} \alpha^i_{;h;k}.$$

Les autres coefficients donneront alors vos deux tenseurs P^i_j et R^i_{jk} , qui jouent ainsi le rôle du tenseur de torsion. Quant au tenseur de courbure, il se calcule comme d'habitude et fait intervenir

1. le tenseur $P^i_{k;h}$;
2. le tenseur que vous avez indiqué $R^i_{hk;l}$;
3. le tenseur $\alpha^i_{;j;k;h}$.

Enfin si les composantes X^i d'un vecteur sont des fonctions de $x, \dot{x}$ et t , on a, en posant

$$D X^i = X^i_0 dt + X^i_k (d x^k - \dot{x}^k dt) + X^i_{;k} [d \dot{x}^k + \alpha^k dt + \frac{1}{2} \alpha^k_{;h} (d x^h - \dot{x}^h dt)],$$

les tenseurs dérivés $X^i_{|0}$, $X^i_{|k}$ et $X^i_{;k}$, avec

$$X^i_{|0} = \frac{\partial X^i}{\partial t} + \dot{x}^k X^i_{;k} - \alpha^k X^i_{;k} + \frac{1}{2} \alpha^i_{;k} X^k;$$

$$X^i_{|k} = X^i_{;k} + \frac{1}{2} \alpha^r_{;k} X^i_{;r} + \frac{1}{2} \alpha^i_{;k;r} X^r.$$

La différentiation covariante obtenue correspond à votre biparallélisme, seulement vous supposez que dans votre transport les x , $\dot{x}$, t varient de manière à satisfaire toujours à $d x^i - \dot{x}^i dt \equiv 0$.

Dans le problème (B), les espaces à courbure nulle sont ceux pour lesquels les fonctions sont réductibles à de simples fonctions des x^i et de t (les $\dot{x}^i$ n'entrant plus). Les espaces à courbure nulle et torsion nulle se réduisent à l'espace linéaire ($\alpha^i = 0$). ... Pour l'espace quelconque, si l'on considère la trajectoire d'un point mobile d'une manière quelconque ($d x^i - \dot{x}^i dt = 0$), ce point n'a pas de vitesse intrinsèque, comme vous le remarquez vous-même, puisqu'on peut à chaque instant faire une transformation permise annulant les $\dot{x}^i$; mais il a une accélération intrinsèque $\ddot{x}^i + \alpha^i$ et des accélérations covariantes de différents ordres.

Dans le problème (A), aux tenseurs fondamentaux de torsion et de courbure, s'ajoute le vecteur $\dot{x}^i$ (coefficient de dt dans ω^i) et le vecteur ε^i (coefficient de dt dans $\tilde{\omega}^i$). On a du reste

$$D \dot{x}^i - \tilde{\omega}^i = -\varepsilon^i dt - \varepsilon^i_{;k} (d x^k - \dot{x}^k dt), \quad \dot{x}^i_{|k} = -\varepsilon^i_{;k}.$$

Pour que l'espace soit linéaire, il ne suffit plus que la courbure et la torsion s'annulent, mais il faut et il suffit qu'en outre le vecteur ε^i soit nul (donc $P^i_j = 0$, $\varepsilon^i = 0$, $\alpha^i_{;j;k;h} = 0$). Ici, l'accélération covariante (dérivée covariante de la vitesse d'un point mobile) est $\ddot{x}^i + \alpha^i - \varepsilon^i$. Les espaces à connexion affine ordinaire sont ceux pour lesquels les deux tenseurs ε^i et $\alpha^i_{;j;k;h}$ sont identiquement nuls.

Enfin, on peut dans les problèmes (A) et (B) interpréter la condition $\alpha^i_{;j;k;h} = 0$. Remarquons pour cela qu'un vecteur est défini non seulement par ses composantes X^i , mais encore par son origine (x , $\dot{x}$, t); on pourrait dire que l'élément linéaire (x , $\dot{x}$) est l'élément d'appui d'un vecteur. Cela posé, supposons qu'on transporte le vecteur par parallélisme à temps constant ($dt = 0$) en faisant varier les x^i infiniment peu; si l'on obtient la même variation des X^i en changeant les paramètres directeurs de l'élément linéaire d'appui, c'est que le tenseur $\alpha^i_{;j;k;l}$ est nul et réciproquement. On pourrait naturellement varier ces considérations....

Note:

To compute the curvature tensor, the „usual method“ referred to by M. Cartan is that of parallel displacement about an infinitesimal circuit. In essence, this is

equivalent to computing the second covariant derivative of any vector

$$(\Delta D - D \Delta) X^i$$

This can be written as

$$X^k \{ A_{hk}^i (\omega_d^h \delta t - \omega_\delta^h dt) + B_{rhk}^i \omega_\delta^r \omega_d^h + C_{hrk}^i (\omega_d^h \tilde{\omega}_\delta^r - \omega_\delta^h \tilde{\omega}_d^r) \}.$$

The coefficients are seen to be tensors, and their actual values come out to be

$$A_{hk}^i = P_{h;k}^i + R_{hk}^i, \quad B_{rhk}^i = R_{rh;k}^i, \quad C_{hrk}^i = \frac{1}{2} \alpha_{i;h;r;k}.$$

The slight difference in the introduction of the tensor R_{jk}^i does not affect, of course, M. Cartan's deduction, since this is only $\frac{1}{3} (P_{j;k}^i - P_{k;j}^i)$.

(D. D. Kosambi.)

(Eingegangen am 2. Dezember 1932.)

Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen.

Von

J. Schauder in Lemberg, z. Z. in Leipzig *).

Im Rahmen seiner allgemeinen Untersuchungen über elliptische Differentialgleichungen bewies Herr S. Bernstein den folgenden Satz¹⁾:

Die elliptische Differentialgleichung

$$(1) \quad A(x, y, p, q) r + 2 B(x, y, p, q) s + C(x, y, p, q) t = 0$$

ist immer lösbar. Dabei wird die Differentialgleichung (1) in einem Kreise betrachtet und die Analytizität der Koeffizienten A, B, C vorausgesetzt. Herr Bernstein löst das Dirichletsche Problem für (1) durch Benutzung zweier von ihm eingeführter Hilfsmittel: a) der sogenannten Normalreihen, b) der sogenannten Hilfsfunktionen.

In der vorliegenden Arbeit werde ich in Weiterführung meiner früheren Untersuchungen²⁾ den folgenden *allgemeineren* Satz beweisen.

Satz: Falls im voraus bekannt ist, daß die „inhomogene“ Differentialgleichung vom elliptischen Typus

$$(2) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = \psi(x, y)$$

bei beliebigem $\psi(x, y)$ (rechte Seite) und beliebigen Randwerten $\varphi(s)$ höchstens eine Lösung zuläßt³⁾, dann besitzt die entsprechende „homogene“ Differentialgleichung

$$(3) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = 0^4)$$

für beliebiges (genügend reguläres) $\varphi(s)$ immer eine Lösung.

*) International Education Board Fellow (Rockefeller Foundation).

¹⁾ Serge Bernstein, Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Annalen 69 (1910), S. 82—136; théorème A, S. 126.

²⁾ J. Schauder, Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Annalen 106 (1932), S. 661—721.

³⁾ Die hier postulierte Eigenschaft soll also die Eindeutigkeit zum Ausdruck bringen. Es genügt übrigens die Eindeutigkeit für (ψ, φ) mit „kleinen“ ψ zu fordern.

⁴⁾ Die Variable z kann in den Koeffizienten A, B, C vorkommen.

Dabei wird die Methode der Normalreihen vollkommen ausgeschaltet. An ihrer Stelle benutzen wir die in letzter Zeit immer mehr in den Vordergrund tretenden „Hölderbedingungen“.

Die kurze Methode der Hilfsfunktionen, mittels welcher man die höheren Ableitungen der Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

(4) $A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q)$ abschätzt⁵⁾, falls eine solche Abschätzung bereits für die ersten Ableitungen vorliegt, wird beibehalten.

Diese Verbindung der Methode der Hölderschen Bedingungen mit der Methode der Hilfsfunktionen bringt Schwierigkeiten mit sich. Um sie zu überwinden, sind, wie dies in § 4 näher auseinandergesetzt wird, neue Sätze über lineare, elliptische Differentialgleichungen notwendig. Dadurch wird aber ein Weg zur erneuten und allgemeineren Behandlung der Randwertaufgaben im Großen in der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen geboten. Einen der diesbezüglichen Sätze findet man in § 6⁶⁾.

§ 1.

Es sei

$$(5) \quad a(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$b^2 - ac < 0, \quad a > 0$$

eine homogene elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir betrachten sie in einem offenen, beschränkten Gebiet G ⁷⁾ und setzen die Koeffizienten a, b, c in G als stetig, und darüber hinaus so beschaffen voraus, daß die Differentialgleichung (5) Lösungen hat, die in dem abgeschlossenen Bereiche G stetig sind und innerhalb G stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen. Es sei z eine solche Lösung. Wir betonen ausdrücklich, daß a, b, c und die Ableitungen $D_1 z, D_2 z$ wohl ins Unendliche anwachsen können, wenn wir uns der Grenze des Gebietes G nähern. Es möge:

a) $\mathfrak{G}$ ein Teilgebiet von G ,

b) $M_{\mathfrak{G}}$ bzw. $m_{\mathfrak{G}}$ das Maximum bzw. Minimum der Lösung am Rande von $\mathfrak{G}$ bezeichnen. Das heißt, es gelte

$$(6) \quad m_{\mathfrak{G}} \leq z_P \leq M_{\mathfrak{G}}$$

⁵⁾ loc. cit. ¹⁾, S. 119—125.

⁶⁾ Der Inhalt dieser Arbeit wurde in der Note: Sur le problème de Dirichlet généralisé pour les équations non linéaires du type elliptique [C. R. 195 (1932), S. 201—203] kurz zusammengefaßt. Über eine ältere Fassung der vorliegenden Resultate habe ich bereits im Jahre 1931 in einer Sitzung der poln. math. Gesellschaft (Abt. Lwów) referiert.

⁷⁾ Das abgeschlossene Gebiet, d. h. Gebiet + Rand nennen wir auch Bereich.

für alle am Rande des Gebietes $\mathfrak{G}$ gelegenen Punkte P . Bekanntlich gilt dann auch dieselbe Abschätzung für alle innerhalb $\mathfrak{G}$ gelegenen Punkte. In der Tat sei ε eine beliebige positive Zahl.

Wir betrachten, unter der Annahme, daß der Ursprung des Koordinatensystems in G liegt, die Funktion

$$z(x, y) = z + \frac{\varepsilon}{2} x^2.$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \cdot \varepsilon > 0;$$

u kann also innerhalb $\mathfrak{G}$ kein Maximum besitzen. Also — wenn wir mit d den Durchmesser des beschränkten Gebietes G bezeichnen —

$$z(x, y) + \frac{\varepsilon x^2}{2} \leq \text{Max} \left(z + \frac{\varepsilon}{2} x^2 \right) \text{ am Rande von } \mathfrak{G},$$

$$z(x, y) \leq M_{\mathfrak{G}} + \varepsilon d^2$$

und da die letzte Ungleichheit für beliebiges ε gilt

$$z(x, y) \leq M_{\mathfrak{G}}.$$

Ähnlich bekommt man auch die entsprechende Abschätzung nach unten.

Sind α, β, γ drei reelle Zahlen, so genügt offensichtlich auch die Funktion

$$z(x, y) - \alpha x - \beta y - \gamma$$

derselben Differentialgleichung (5). Also erreicht auch die Funktion $z - \alpha x - \beta y - \gamma$ ihre Extremalwerte am Rande jedes Teilgebietes. Demnach ist $z(x, y)$ eine Sattelfunktion in der Bezeichnung des Herrn T. Rado.

§ 2.

Für Sattelfunktionen gilt nun nach T. Rado ein bemerkenswerter Satz⁸⁾. Um ihn auszusprechen, müssen wir zuerst den Begriff der sogenannten Dreiecksbedingung näher erörtern.

Es möge auf dem Rande des Gebietes G eine stetige Wertfolge $z(P)$ gegeben sein. In dem dreidimensionalen x, y, z Raume stellt sie eine „Randkurve“ C dar. Man sagt, daß C eine Dreiecksbedingung mit der Konstante Δ erfüllt, falls für jede Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, die durch drei verschiedene Punkte der Randkurve C hindurchgeht,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \Delta$$

⁸⁾ T. Rado, Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Act. Lit. ac. Scient., Szeged (1924—1926), S. 228—253, und J. v. Neumann, Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung. Abhandl. d. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), S. 28—31.

gilt. Der Satz von Herrn T. Rado besagt nun, daß jede in einem *konvexen* Bereiche G stetige Sattelfunktion $z(x, y)$, deren Randwerte einer Dreiecksbedingung mit der Konstante Δ genügen, in G eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und daß die in G fast überall existierenden Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \leq \Delta, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \leq \Delta$$

zulassen. Einen schönen und kurzen Beweis dieses Satzes findet der Leser in der unter ⁸⁾ zitierten Arbeit des Herrn J. von Neumann.

Man kann sich nun die Frage stellen, welche Bedingungen praktisch den Randwerten auferlegt werden müssen, damit C eine Dreiecksbedingung, und zwar gerade mit der Konstante Δ erfülle.

Zu diesem Zwecke beschränken wir uns im folgenden auf ein Ovalgebiet G , dessen Rand — wir nennen ihn R — durch die Gleichungen

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

gegeben sei. Die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ der Bogenlänge s setzen wir als zweimal stetig differentiierbar voraus und nehmen die Krümmung als überall positiv an. Es möge weiter auf R eine zweimal differentiierbare Wertfolge $z(s)$ gegeben sein, wobei genauer

$$(7) \quad |z(s)| + |z'(s)| + |z''(s)| \leq \mu$$

sein soll. Dann behaupten wir: $C\{x(s), y(s), z(s)\}$ genügt einer Dreiecksbedingung, und für die entsprechende Dreieckskonstante Δ gilt eine Abschätzung von der Form

$$\Delta \leq k(\mu),$$

womit angedeutet wird, daß die obere Schranke von Δ nur von μ abhängt. Da nämlich die Krümmung positiv ist, so hat

$$\begin{vmatrix} x'(s), & y'(s) \\ x''(s), & y''(s) \end{vmatrix}$$

eine positive untere Grenze $\omega > 0$. Es ist also eine Zahl ϱ_0 vorhanden, so daß für genügend nahe gelegene Punkte s', s'' des Randovals R [d. h. für $|s' - s''| \leq \varrho_0$ ⁹⁾]

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x'(s'), & y'(s') \\ x''(s''), & y''(s'') \end{vmatrix} > \frac{\omega}{2} > 0$$

⁹⁾ Unter $|s' - s''|$ verstehen wir in diesem Paragraphen die kürzeste Entfernung der beiden Punkte längs des Randovals R .

wird. Wir betrachten nun verschiedene Punktetripel s_1, s_2, s_3 des Randovals R , zuerst solche, für welche

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad |s_1 - s_2| \leq \frac{\varrho_0}{3}; \quad |s_2 - s_3| \leq \frac{2\varrho_0}{3}^{10); \quad s_1 < s_2 < s_3^{10)}, \\ \text{dann solche, für welche} \\ (b) \quad |s_1 - s_2| \geq \frac{\varrho_0}{3}; \quad |s_1 - s_3| \geq \frac{\varrho_0}{3}; \quad |s_2 - s_3| \geq \frac{\varrho_0}{3}, \\ \text{und endlich solche,} \\ (c) \text{ die weder zu (a) noch zu (b) gehören.} \end{array} \right.$$

Für jede dieser drei Mengen beweisen wir die Dreiecksbedingung gesondert. Es sei zur Abkürzung $x(s_i) = x_i, y(s_i) = y_i, z(s_i) = z_i$ gesetzt. Nach dem Vorhergesagten ist der Beweis für die Ungleichheiten

$$|\alpha| = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 1, & y_1, & z_1 \\ 1, & y_2, & z_2 \\ 1, & y_3, & z_3 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{array} \right|} \leq k(\mu)$$

und analog für $|\beta|$ zu erbringen, falls die Punkte (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) voneinander verschieden sind. Für Punkte von der Form (9a) ist dies klar. Denn nach dem Mittelwertsatz gilt¹¹⁾

$$(10) \quad \alpha = \frac{\frac{y'(\bar{s}^*), z'(\bar{s}^*)}{y''(\bar{s}^*), z''(\bar{s}^*)}}{\frac{x'(\bar{s}), y'(\bar{s})}{y''(\bar{s}), y''(\bar{s})}}; \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 < \bar{s} < \bar{s} < s_3. \\ s_1 < \bar{s}^* < \bar{s}^* < s_3. \end{array} \right.$$

Da die Punkte $\bar{s}, \bar{s}$ einerseits, die Punkte $\bar{s}^*, \bar{s}^*$ andererseits voneinander wegen (9a) und (10) um weniger als ϱ_0 entfernt sind, ist wegen (8) der Nenner in (10) größer als $\omega/2$. Somit ist

$$|\alpha| \leq c \cdot \mu.$$

Dabei hängt c nur von R , keineswegs aber auch von μ ab.

Für Punkte der Klasse (9b) hat offensichtlich der Nenner von $|\alpha|$ und $|\beta|$ (der Nenner hängt nur von R , nicht aber von der Raumkurve C ab) eine positive untere Grenze, also gilt wieder

$$|\alpha| \leq c \cdot \mu; \quad |\beta| \leq c \cdot \mu.$$

¹⁰⁾ Eine Numerierung dieser Art ist immer möglich.

¹¹⁾ Vgl. z. B. Blaschke, Differentialgeometrie I, 1921 (Verlag Springer), Erste Auflage, S. 7—9.

Es bleibt also noch den Beweis für Punkte s_1, s_2, s_3 der dritten Klasse zu führen. Es genügt,

$$|s_1 - s_2| \leq \frac{\varrho_0}{3}, \quad |s_1 - s_3| \geq \frac{2}{3}\varrho_0; \quad |s_2 - s_3| \geq \frac{2}{3}\varrho_0$$

vorauszusetzen.

Ich behaupte, daß auch jetzt $\alpha^2 + \beta^2 \leq k(\mu)$ ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es

$$(11) \begin{cases} \text{a) Punktetripel } s_1^n, s_2^n, s_3^n \text{ mit} \\ \quad |s_1^n - s_3^n| \geq \frac{2}{3}\varrho_0, \quad |s_2^n - s_3^n| \geq \frac{2}{3}\varrho_0, \quad |s_1 - s_2| \leq \frac{\varrho_0}{3}, \\ \text{b) eine Funktionenfolge } z_n(s) \text{ mit} \\ \quad |z_n(s)| + |z'_n(s)| + |z''_n(s)| \leq \mu, \end{cases}$$

wobei die zugehörigen $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ ins Unendliche wachsen würden. Wegen (11b) kann man aus $z_n(s)$ eine Funktionenfolge $\bar{z}_n(s)$ aussondern, so daß gleichmäßig

$$\bar{z}_n(s) \rightarrow z(s), \quad \bar{z}'_n(s) \rightarrow z'(s), \\ |z(s)| + |z'(s)| \leq \mu; \quad Li(z') \leq \mu^{12})$$

besteht. Gleichzeitig möge aus (s_1^n, s_2^n, s_3^n) eine konvergente Teilfolge $\bar{s}_i^n \rightarrow s_i$ ($i = 1, 2, 3$) extrahiert werden.

Man muß jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem von den drei Grenzpunkten s_i zwei zusammenfallen oder nicht (alle drei Punkte können wegen (11a) nicht zusammenfallen). Der einzig mögliche Fall des Zusammenfallens entspricht den Beziehungen $s_1 = s_2 \neq s_3$. Die Ebene durch die drei Punkte $\bar{s}_1^n, \bar{s}_2^n, \bar{s}_3^n$ konvergiert dann gegen die durch die Tangente in $s_1 = s_2$ und durch den Punkt s_3 hindurchgehende Ebene. Ist aber $s_1 \neq s_2 \neq s_3$, so bekommt man als Grenzebene wieder eine Ebene durch s_1, s_2, s_3 . In keinem Falle stehen also die Grenzebenen auf der (x, y) Ebene senkrecht, so daß $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \rightarrow \infty$ unmöglich ist.

§ 3.

Wir spezialisieren das Gebiet weiter, indem wir es als ein Kreisgebiet K annehmen. Dies bringt keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit mit sich. Genauer, es möge K der Einheitskreis $x^2 + y^2 \leq 1$ sein.

Wir betrachten nun die quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen

$$(12) \begin{cases} \text{a)} & Ar + 2Bs + Ct = D, \\ \text{b)} & Ar + 2Bs + Ct = 0, \quad B^2 - AC < 0, \quad A > 0. \end{cases}$$

¹²⁾ $Li(f)$ bezeichnet die kleinste Lipschitz-Konstante der Funktion f .

Die Funktionen A, B, C, D der unabhängigen Variablen x, y, z, p, q denken wir uns für alle z, p, q und für alle (x, y) aus K definiert. Sie mögen in diesem fünf-dimensionalen Zylindergebiete stetig sein und nach allen unabhängigen Variablen partielle Ableitungen bis zu zweiter Ordnung inklusive besitzen. Die zweiten Ableitungen $D_2 A, D_2 B, D_2 C$ sollen überdies (im abgeschlossenen K) einer Hölderbedingung mit dem Exponenten $0 < \alpha < 1$ genügen.

Fassen wir insbesondere die homogene Differentialgleichung (12b) ins Auge. Eine Lösung z von (12b) möge sich an den Rand von K stetig anschließen, während die ersten und zweiten Ableitungen $D_1 z, D_2 z$ sich im Innern von K stetig verhalten sollen.

Denken wir uns für einen Moment $z, \frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$ in A, B, C eingesetzt, so erhalten wir im Innern von K stetige Funktionen $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$, und z erfüllt die lineare, elliptische Differentialgleichung von der Form (1). Somit ist z eine Sattelfunktion. Wird weiter vorausgesetzt, daß die Randwerte der Lösung von (12b) — sie sollen stets mit $\varphi(s)$ bezeichnet werden — der Ungleichheit

$$(13) \quad |\varphi| + |\varphi'| + |\varphi''| \leq \mu$$

genügen, so erfüllt die Raumkurve $C[x(s), y(s), \varphi(s)]$ nach dem Vorhergehenden eine Dreiecksbedingung mit einer Konstante $\Delta \leq k(\mu)$. Somit gilt nach dem Radoschen Satze die wichtige Abschätzung a priori

$$(14) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \leq k(\mu); \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \leq k(\mu),$$

und es wird nun unser Ziel sein, eine „a-priori“-Abschätzung auch für die höheren Ableitungen zu gewinnen.

§ 4.

Dies geschieht durch Zuhilfenahme eines sehr wichtigen Satzes des Herrn S. Bernstein¹³⁾, nach welchem man die zweiten Ableitungen der Lösung z sogar von (12a) abschätzen kann, nachdem eine solche Abschätzung bereits für die ersten Ableitungen vorliegt. Ich möchte aber bemerken, daß das Bernsteinsche Resultat nicht ohne weiteres auf den vorliegenden Fall angewendet werden kann. Denn bei ihm handelt es sich doch um Lösungen z , die sich im Innern von K analytisch verhalten und speziell am Rande, was besonders wichtig ist, Ableitungen $D_n(z)$ beliebig hoher Ordnung besitzen. Um nämlich die zweiten Ableitungen am Rande abzuschätzen, braucht man die Existenz der dritten usw., was zur Bildung der Normalreihen führt. Mein Ziel ist es nun, zu zeigen,

¹³⁾ Vgl. loc. cit. ⁵⁾.

wie diese Schwierigkeit umgangen werden kann. Es zeigt sich, daß bereits die Abschätzung der zweiten Ableitungen $D_2 z$ vollkommen genügt (bei der Differentialgleichung (12a)). Wir führen folgende Bezeichnungen ein. Mit $H_\alpha(f)$, kürzer $H(f)$ bezeichnen wir die kleinste Hölderkonstante der Funktion f , die dem Exponenten α ($0 < \alpha \leq 1$) entspricht. Mit Norm (in Formeln $\|f\|_{\alpha, n}$) bezeichnen wir den Ausdruck

$$\|f\|_{\alpha, n} = \text{Max}|f| + \text{Max}|D_1 f| + \dots + \text{Max}|D_n f| + H_\alpha D_n f.$$

Ich spreche nun den Abschätzungssatz in folgender allgemeineren Fassung aus.

Satz, Voraussetzungen: a) die Funktionen A, B, C, D der Variablen x, y, z, p, q besitzen in dem auf S. 629 genannten fünfdimensionalen Zylinderbereich nach allen unabhängigen Variablen α -Hölder-stetige Ableitungen bis zu zweiter Ordnung einschließlich; b) die Lösung z von (12a) besitzt im abgeschlossenen Kreise K partielle Ableitungen zweiter Ordnung, die auch (im abgeschlossenen K) einer Hölderbedingung mit dem Exponenten α ($0 < \alpha < 1$) genügen; c) die Randwerte $\varphi(s)$ der Lösung z sind dreimal α -Hölder-stetig differentiierbar¹⁴).

Behauptung: Wenn $|z(x, y)| + |D_1 z| < \mu$; $\|q\|_\alpha, 3 \leq \mu_1$ gilt, dann gibt es Konstanten $C_1(\mu, \mu_1)$ und $C_2(\mu, \mu_1)$, so daß

$$(15) \quad \begin{aligned} \text{a)} & \quad |D_2(z)| \leq C_1(\mu, \mu_1), \\ \text{b)} & \quad H_\alpha D_2 z \leq C_2(\mu, \mu_1). \end{aligned}$$

Bemerkung: Man beachte, daß in den Voraussetzungen die α -Hölder-stetigkeit der zweiten Ableitungen gefordert wird.

Beweis: Wir heben nur die Abweichungen von der Bernsteinschen Beweisführung hervor. Man unterscheidet nun zwei Fälle, je nachdem das Maximum der quadratischen Form $A r^2 + 2 B s r + C s^2$ bzw. ihrer geeigneten Transformierten 1. im Innern des Kreises K liegt, 2. am Rande des Kreises K erreicht wird. Im ersten Falle ist die Methode von Herrn Bernstein anwendbar¹⁵), wenn im Innern von K die Lösung viermal differentiierbar ist. Dies trifft hier in der Tat zu. Nach Voraussetzung b) ist nämlich die Lösung z zweimal Hölderstetig differentiierbar. Nun folgt aus einem Satze des Herrn E. Hopf¹⁶), da auch die Koeffizienten A, B, C, D zweimal α -Hölder-stetig differentiierbar sind, daß im Innern von K die Lösung z α -Hölder-stetige Ableitungen bis zur

¹⁴) Es dürfte wahrscheinlich die zweimalige Hölder-stetige Differentiierbarkeit der Randwerte $\varphi(s)$ genügen.

¹⁵) loc. cit. ⁵), S. 119—123.

¹⁶) E. Hopf, Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr. 34 (1931), S. 194—233, insbesondere Satz 2 und 3, S. 209—210.

vierten Ordnung einschließlich besitzt. Bleibt nun noch der zweite Teil der a-priori-Abschätzung der zweiten Ableitungen $D_2 z$ am Rande $x^2 + y^2 = 1$. Der einzige Punkt der schönen Bernsteinschen Methode der Hilfsfunktionen¹⁷⁾, der einer Änderung bedarf, ist der folgende. In einem gewissen Momente muß man wissen, daß die lineare Differentialgleichung

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$a = A \left[x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right] \text{ usw.}$$

im abgeschlossenen K immer lösbar ist und daß die Lösung u auch am Rande stetige Ableitungen erster Ordnung besitzt. Dies gilt nun nach den Sätzen, über die man heute verfügt, jedenfalls dann, wenn α) die Funktionen $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ im abgeschlossenen K einmal Hölderstetig differenzierbar sind, β) die vorgegebenen Randwerte zweimal Hölderstetig differenzierbar sind¹⁸⁾.

Die Bedingung α) ist hier wegen Voraussetzung b) erfüllt. Was aber β) anbetrifft, so ist der in Betracht kommende Randwert $u(s) = \frac{d\varphi}{ds}$. Wegen Voraussetzung c) gilt also auch β). Die Methode der Hilfsfunktionen läßt sich jetzt anwenden und liefert als Ergebnis die Möglichkeit der Abschätzung der zweiten Ableitungen $D_2 z$, d. h. die Formel (15a).

Damit ist noch nicht alles erledigt, denn es bleibt noch die Formel (15b)¹⁹⁾ zu beweisen. In letzter Zeit gelang es mir in Abänderung des früheren von mir benutzten Verfahrens, (15b) auf den folgenden allgemeinen Satz aus der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichung zurückzuführen.

$$\text{Es möge} \quad \sum a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f(x_1, \dots, x_n)$$

eine lineare, elliptische Differentialgleichung mit einer beliebigen Anzahl der unabhängigen Veränderlichen bezeichnen. Wenn die Koeffizienten a_{ik} eine Abschätzung von der Form

$$\|a_{ik}\|_1 \leq \varrho^{20)}; \quad \text{Diskriminante } (a_{ik}) = 1;$$

¹⁷⁾ loc. cit. 5), S. 123—125.

¹⁸⁾ Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Randwertaufgaben der Theorie der linearen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus I. Die erste Randwertaufgabe: „Allgemeine ebene Gebiete“. Journ. f. d. reine u. angew. Mathematik **142** (1912), S. 1—40, insbesondere S. 35—40.

¹⁹⁾ Ich bemerke, daß eine Abschätzung der dritten und höheren Ableitungen $D_n(z)$ nicht notwendig ist. Übrigens folgt leicht aus dem Hilfssatz 11 meiner unter (2) zitierten Arbeit, daß auch die dritten Ableitungen $D_3(z)$ existieren und sich samt ihren Hölder-Konstanten abschätzen lassen, sobald eine solche Abschätzung für die zweiten Ableitungen $D_2(z)$ und ihre Hölder-Konstanten bekannt ist.

²⁰⁾ Dies bedeutet genauer $\text{Max } |a_{ik}| \leq \varrho; \quad Li |(a_{ik})| \leq \varrho$. Es genügt $\|a_{ik}\| \alpha + \varepsilon \leq M$ vorauszusetzen.

im abgeschlossenen Gebiete G zulassen, dann gibt es eine Konstante $k(\varrho)$ so, daß

$$(16) \quad \|u\|_{\alpha, 2} \leq k(\varrho) (\|f\|_{\alpha} + \|\varphi\|_{\alpha, 2}).$$

Mittels Formel (16) ist auch die letzte Abschätzung (15b) erledigt. Dies sieht man wie folgt ein. Da die zweiten Ableitungen $D_2 z$ bereits durch (15a) abgeschätzt wurden, so gilt für die Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ eine Abschätzung von der Form

$$\|a\|_1 \leq \bar{C}(\mu, \mu_1); \quad \|b\|_1 \leq \bar{C}(\mu, \mu_1); \quad \|c\|_1 \leq \bar{C}(\mu, \mu_1)^{21},$$

womit wegen (16)

$$H_{\alpha} D_2 z \leq k[\bar{C}(\mu, \mu_1)] \cdot (\bar{C}(\mu, \mu_1) \|\varphi\|_{\alpha, 2}) = C_3(\mu, \mu_1).$$

Den Beweis des oben erwähnten Satzes findet der Leser in meiner in der Math. Zeitschrift später erscheinenden Arbeit über lineare elliptische Differentialgleichungen²²).

§ 5.

Wir besitzen jetzt alle Hilfsmittel, um den Beweis des in der Einleitung ausgesprochenen Satzes in Angriff zu nehmen. Wir ergänzen die Voraussetzungen, indem wir noch fordern, daß die Koeffizienten A, B, C nach den unabhängigen Variablen zweimal α -Hölder-stetig differenzierbar sind. Die Randwerte $\varphi(s)$ mögen dreimal α -Hölder-stetig differenzierbar sein. Der Beweis verläuft etwa so. Es sei $\varphi(s)$ diejenige Randfunktion, für welche die Existenz einer Lösung von (3) bewiesen werden soll. Ich betrachte die Funktionenfolge $\varphi_{\lambda}(s) = \lambda \varphi(s)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Setzen wir $\|\varphi\|_{\alpha, 2} = \mu_1$, so ist auch

$$\|\varphi_{\lambda}\|_{\alpha, 2} \leq \mu_1; \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

²¹) Setzen wir $d(x, y) = D(x, y, z, p, q)$, so gilt auch $\|d\|_1 \leq \bar{C}(\mu, \mu_1)$. Durch eine Division kann man in bekannter Weise immer erreichen, daß $\text{discrim}(a_{ik}) = 1$.

²²) Einen Bericht über die Sätze dieser Arbeit findet man z. B. in meinen Notizen C. R. 195, 27. XII. 1932, S. 1365 und C. R. 196, 9. I. 1933, S. 89. Es handelt sich um den Satz II der ersten Note. Aber noch besser wäre es, sich auf den Satz III dieser Note zu stützen. Er besagt, daß, falls man bei einer quasilinearen Differentialgleichung die ersten Ableitungen $D_1 z$ und die Hölder-Konstanten $H D_1 z$ abschätzen kann, daß man dann auch $D_2 z$ und $H D_2 z$ abschätzen kann. Die Möglichkeit der Abschätzung von $H D_1 z$ ist aber wegen (15a) in unserem Falle offensichtlich. Die hier gegebenen Abschätzungen gelten für beliebige quasilineare Differentialgleichungen (12a).

Für $\lambda = 0$ hat man $\varphi_0 \equiv 0$, und für diesen Randwert ist natürlich (3) lösbar, indem nämlich $z_0 \equiv 0$ ²³⁾ zu setzen ist. Ich versuche nun allgemeiner die Differentialgleichung

$$(2) \quad A r + 2 B s + C t = \psi(x, y)$$

für alle Funktionenpaare (ψ, φ) , die sich wenig von „Null“ unterscheiden, d. h. der Bedingung $\|\psi\|_\alpha < \varepsilon$, $\|\varphi\|_{\alpha, 3} < \varepsilon$ (ε genügend klein) gemäß gewählt sind, aufzulösen. Dies ist in der Tat möglich. Denn nach einem von mir früher bewiesenen Satze²⁴⁾ folgt aus der Eindeutigkeit von (2) und aus der Existenz der Lösung für φ_0, ψ_0 die wirkliche Lösbarkeit von (2) auch für benachbarte φ, ψ . Insbesondere ist also die homogene Differentialgleichung (3) für alle φ_λ mit genügend kleinem λ mit einer zweimal α -Hölder-stetig differentiierten Lösung lösbar. Wir können nun die Lösung schrittweise fortsetzen (le Roy, Bernstein). Wäre nämlich die Differentialgleichung (3) für $\varphi(s) = \varphi_1(s)$ (d. h. für $\lambda = 1$) nicht lösbar, so gäbe es eine Schwelle λ_0 , so daß für $\lambda < \lambda_0$ die Gleichung (3) mit $\varphi_\lambda = \lambda \varphi$ lösbar wäre, während dies für $\lambda > \lambda_0$ nicht immer zutreffen würde. Für λ_0 ist (3) immer — wie dies aus der im § 4 gegebenen a priori Abschätzung (15) folgt — noch lösbar. Man beachte, daß nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen für alle $z_\lambda(x, y)$, sofern sie existieren, die gleichmäßige Abschätzung

$$\|z_\lambda\|_{\alpha, 2} < C(\mu, \mu_1)$$

besteht. Es gehört also $z_{\lambda_0}(x, y)$ wieder derselben Klasse an²⁵⁾.

Nach meinem bereits erwähnten Satze wäre infolgedessen sogar die inhomogene Differentialgleichung (2) für alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon(\lambda_0)$ lösbar. λ_0 ist also keine Schwelle, w. z. b. w.

§ 6.

Die Behandlung der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung

$$(17) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = \psi(x, y)$$

bereitet nun keine Schwierigkeiten. Falls die Schranken von $z, D_1 z, D_2 z$ gegeben sind, so schätzt man nach S. Bernstein²⁶⁾ auch die dritten Ableitungen $D_3 z$ ab unter Benutzung der in § 4 gegebenen Abänderungen. Es bleibt noch die Abschätzung der α -Hölderkonstanten der dritten Ableitungen. Dies gelingt wieder am besten unter Heranziehung des in § 4 er-

²³⁾ Mit $z_\lambda(x, y)$ bezeichnen wir die dem Randwerte φ_λ entsprechende Lösung von (3).

²⁴⁾ Vgl. loc. cit. ²⁾, Satz IV', S. 705.

²⁵⁾ Das heißt, ist im abgeschlossenen K zweimal Hölder-stetig differentierbar.

²⁶⁾ Loc. cit. ¹⁾.

wählten Satzes aus der Theorie der linearen, elliptischen Differentialgleichungen. Um die Lösung schrittweise fortsetzen zu können, braucht man noch einen Satz, der uns die Lösbarkeit im kleinen sichert.

Aber gerade die Lösbarkeit im kleinen von (17) ist unter allgemeinen Eindeutigkeitsvoraussetzungen durch den Satz IV meiner in der Fußnote ² erwähnten Arbeit gesichert. Und wir gelangen damit zu dem folgenden Satze:

Voraussetzung: *Es ist a priori bekannt, daß die elliptische Differentialgleichung (17) bei vorgegebenem φ und ψ höchstens eine Lösung zuläßt.*

Behauptung: *Damit (17) für beliebige hinreichend reguläre (ψ, φ) in der Tat immer eine Lösung besitzt, ist es notwendig und hinreichend, daß die zweiten Ableitungen ²⁷⁾ der Lösung z im voraus als Funktionaloperationen von φ und ψ abgeschätzt werden können.* Oder mit anderen Worten: die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit von (17) besteht in folgender für jedes $r > 0$ gültigen Eigenschaft. Falls $\|\varphi\|_{\alpha,4} \leq r$, $\|\psi\|_{\alpha,1} \leq r$ ist, so soll es eine konstante $k(r)$ geben, so daß $\text{Max}|z| + \text{Max}|D_1 z| + \text{Max}|D_2 z| \leq k(r)$ gilt.

²⁷⁾ Würde man die Möglichkeit der Abschätzung a priori auch der dritten Ableitungen fordern, so wäre der Satz leicht zu beweisen. Übrigens kann man eine analoge Behauptung auch dann aufstellen, wenn es sich nicht um *alle* Funktionenpaare (ψ, φ) handelt, sondern nur solche, welche in dem Funktionenraume der Paare (ψ, φ) eine *zusammenhängende* und schwachabgeschlossene [vgl. die in der Fußnote ²) zitierte Arbeit] Menge ergeben.

(Eingegangen am 31. Dezember 1932.)

Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen.

(Dritte Mitteilung.)

Von

M. Fekete in Jerusalem.

1. In meinen früheren Mitteilungen „Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen“¹⁾ habe ich gezeigt, daß der transfinite Durchmesser eine für alle beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmengen M (und nur für solche) definierte²⁾, nichtnegative Mengenfunktion $d\{M\}$ ist, die u. a. die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

a) Ist N in M enthalten, so ist $d\{N\} \leq d\{M\}$ (Monotonie)³⁾.

b) Ist M nicht leer und bedeutet $M(\varrho)$ die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene, die in den um die Punkte von M mit dem Radius $\varrho > 0$ beschriebenen Kreisflächen liegen, so ist $\lim_{\varrho \rightarrow 0} d\{M(\varrho)\} = d\{M\}$ (Stetigkeit)⁴⁾.

c) Ist M_p diejenige Punktmenge, die aus den Wurzeln der Gleichung

$$p(x) \equiv x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_k = z$$

besteht, wobei z die (nichtleere) Menge M durchläuft, so gilt⁵⁾ die Beziehung

$$d\{M_p\} = \sqrt[k]{d\{M\}}.$$

Aus der Definition des transfiniten Durchmessers leuchtet uns sofort auch die vierte Eigenschaft ein:

¹⁾ Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 108–114 und S. 215–221. Ich zitiere in Nachfolgenden diese Mitteilungen unter I bzw. II.

²⁾ Betreffe die Definition des transfiniten Durchmessers einer nichtleeren Punktmenge s. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten; Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 228–249; S. 231. Der transfinite Durchmesser der leeren Menge hat definitionsgemäß den Wert 0.

³⁾ I; S. 111.

⁴⁾ I; S. 112.

⁵⁾ II; S. 216.

d) Ist $a \cdot M$ die Menge aller Produkte $a \cdot z$, wobei z die (nichtleere) Menge M durchläuft und $a \neq 0$ irgendeine feste komplexe Zahl bedeutet, so gilt⁶⁾ die Beziehung

$$d\{a \cdot M\} = |a|d\{M\}.$$

2. Im nachfolgenden will ich zeigen, daß das Eigenschaftensensemble a) bis d) für den transfiniten Durchmesser in folgendem Sinne charakteristisch ist:

I. Wenn eine, für alle beschränkten abgeschlossenen ebenen Punktmengen M definierte, nichtnegative Mengenfunktion $f\{M\}$ nicht identisch verschwindet, so muß sie mit $d\{M\}$ übereinstimmen, sobald sie die ebenerwähnten vier Eigenschaften besitzt, also mit anderen Worten den Beziehungen

$$(1) \quad f\{N\} \leq f\{M\},$$

$$(2) \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} f\{M(\varrho)\} = f\{M\}, \quad M \neq 0,$$

$$(3) \quad f\{M_p\} = \sqrt[k]{f\{M\}}, \quad M \neq 0,$$

$$(4) \quad f\{a \cdot M\} = |a|f\{M\}, \quad M \neq 0$$

genügt, wobei M , N , ϱ , $M(\varrho)$, M_p , k , a , $a \cdot M$ die obige Bedeutung behalten.

3. Um den jetzt formulierten Satz für nichtleere⁷⁾ Punktmengen zu beweisen, will ich zunächst feststellen, daß die Anwendung der Beziehung (3) im Spezialfalle, wo M mit der Peripherie E bzw. mit der abgeschlossenen Fläche $\overline{E}$ des Einheitskreises zusammenfällt, $p(x)$ aber sich auf x^2 reduziert, sofort auf die Gleichungen

$$f\{E\}^2 = f\{E\}, \quad f\{\overline{E}\}^2 = f\{\overline{E}\}$$

führt, folglich muß

$$(5a) \quad f\{E\} = 1,$$

bzw.

$$(5b) \quad f\{\overline{E}\} = 1$$

bestehen, es sei denn, daß $f\{E\} = 0$ bzw. $f\{\overline{E}\} = 0$ ist. Das Verschwinden von $f\{E\}$ würde aber nach (2) für den durch die Ungleichungen

⁶⁾ $d\{M\} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n\{M\}$, wobei $d_n\{M\}^{n(n-1)/2}$, ($n \geq 2$), den Maximalwert von $\prod_{1 \leq i < k \leq n} (z_i - z_k)$ bedeutet, wenn $z_1, z_2, \dots, z_n$ voneinander unabhängig die Menge M durchlaufen (vgl. a. a. O.²⁾, S. 230—231) und ähnlich $d\{a \cdot M\} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n\{a \cdot M\}$; jedoch gilt offenbar $d\{a \cdot M\} = |a|d\{M\}$.

⁷⁾ Die leere Menge ist definitionsgemäß als Teilmenge irgendeiner Menge M zu betrachten, daher ist, wegen (1), $f\{0\} \leq f\{M\}$. Andererseits ist annahmsweise $f\{0\} \geq 0$. Aus diesen Beziehungen und aus der Tatsache, daß es nichtleere Mengen mit verschwindendem transfiniten Durchmesser gibt, folgt $f\{0\} = 0$, d. h. $f\{0\} = d\{0\}$, wenn nur die Gleichung $f\{M\} = d\{M\}$ für nichtleere Punktmengen richtig ist.

$1 - \varrho \leq |z| \leq 1 + \varrho$ charakterisierten Ring R die Ungleichung $f\{R\} < \frac{1}{2}$ involvieren, sobald der (zwischen 0 und 1 liegende) ϱ genügend klein festgesetzt wird und daher für den Ring R^* , der durch $(1 - \varrho)^k \leq |z| \leq (1 + \varrho)^k$ gegeben ist ($k =$ natürliche Zahl), müßte, wegen (3), $f\{R^*\} < (\frac{1}{2})^k$ ausfallen. Nun gibt es, nach der Voraussetzung, eine Menge M mit positivem Wert von $f\{M\}$ und man kann von ihr annehmen, daß sie den Nullpunkt nicht enthält⁸⁾. Ein solches M ist offenbar in R^* enthalten, sobald k genügend groß ist; folglich müßte wegen (1) und $f\{R^*\} < (\frac{1}{2})^k$ dann $f\{M\} < (\frac{1}{2})^k$ bestehen, was von einem gewissen Werte des k an unmöglich ist. Also es gilt (5a).

Mit Hinsicht auf (1) kann deshalb auch $f\{\overline{E}\}$ nicht verschwinden. Also es gilt (5b). Aus (5a) bzw. aus (5b) folgt mit Hinsicht auf (4) für den durch $|z| = r$ bzw. $|z| \leq r$ gegebene Kreislinie K bzw. Kreisfläche $\overline{K}$ die Beziehung

$$(6a) \quad f\{K\} = r,$$

bzw.

$$(6b) \quad f\{\overline{K}\} = r,$$

(also unsere Behauptung für die genannten speziellen Fälle⁹⁾), woraus sich für die durch die Gleichung $|p(x)| = r$ bzw. Ungleichung $|p(x)| \leq r$ gegebene Lemniskate L bzw. Lemniskatenfläche $\overline{L}$ nach (3) (es ist ja $L = K_p$, $\overline{L} = \overline{K}_p$) die Gültigkeit von

$$(7a) \quad f\{L\} = r^{1/k},$$

$$(7b) \quad f\{\overline{L}\} = r^{1/k},$$

d. h. die Richtigkeit der Behauptung¹⁰⁾ für eine weitere Klasse von Punktmengen spezieller Natur ergibt.

4. Von (7b) führt nun ein kurzer Weg zu jenem wichtigen Teile des zu beweisenden Satzes, der sich in der Form der Ungleichung

$$(8) \quad f\{M\} \leq d\{M\}$$

ausdrücken läßt. Ist nämlich M eine nicht leere Punktmenge und $t_n(z) = z^n + \dots$ das zu M gehörige Tschebyscheffsche Polynom n -ten Grades, d. h. dasjenige Polynom, für welches das Maximum m_n des absoluten Betrages auf M kleiner ausfällt als für irgendein anderes Polynom mit

⁸⁾ Jede beschränkte Menge M , die den Nullpunkt enthält, kann durch eine geeignete Translation in eine solche Menge M^* überführt werden, welche ihn nicht enthält; M^* geht aus M durch die Transformation $x + c = z$ hervor, folglich muß nach (3) $f\{M^*\} = f\{M\}$ bestehen.

⁹⁾ Es ist ja $d\{K\} = d\{\overline{K}\} = r$; vgl. a. a. O. ²⁾, § 4, S. 237—240.

¹⁰⁾ $d\{L\} = d\{\overline{L}\} = \sqrt[k]{r}$. Vgl. a. a. O. ²⁾, § 3. Fußnote ⁴⁾, S. 234.

demselben höchsten Gliede, so gelten für die durch $|t_n(z)| \leq m_n$ definierten „Überdeckungslemniskatenflächen“ $\bar{L}^{(n)}$ der Menge M , wegen (1), die Ungleichungen

$$f\{M\} \leq f\{\bar{L}^{(n)}\},$$

während, nach (7b), die Gleichung

$$f\{\bar{L}^{(n)}\} = \sqrt[n]{m_n}$$

besteht, und nach bekannten Sätzen¹¹⁾,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m_n} = d\{M\}$$

ist.

5. Im Besitze der Ungleichung (8) erhält man die volle Richtigkeit der fraglichen Behauptung aus dem Gegenstück von (8):

$$(9) \quad f\{M\} \geq d\{M\}.$$

Um diese, für endliche Punktmengen offenbar gültige¹²⁾ Beziehung für unendliche Punktmengen zu beweisen, bedienen wir uns des folgenden Hilfssatzes:

II. Es sei M eine beschränkte abgeschlossene unendliche Punktmenge in der z -Ebene, $n \geq 2$ und $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ ein solches Punktsystem in M , für das $|\prod_{1 \leq i < k \leq n} (z_i - z_k)|$ den größtmöglichen Wert erreicht, wenn $z_1, z_2, \dots, z_n$ von einander unabhängig die Menge M durchlaufen. Man bezeichne mit μ_n den Maximalbetrag von $\tau_n(z) = (z - \zeta_1^{(n)})(z - \zeta_2^{(n)}) \dots (z - \zeta_n^{(n)})$ auf M . Dann ist die durch

$$|\tau_n(z)| = \mu_n$$

definierte Lemniskate $A^{(n)}$ in $M(\varrho)$ enthalten, sobald $n \geq n_0 = n_0(\varrho)$. Hierbei haben ϱ und $M(\varrho)$ die in § 1 erklärte Bedeutung.

Aus II folgen nämlich, mit Hinsicht auf (1) und (7a), sobald $n \geq n_0(\varrho)$, die Relationen

$$f\{M(\varrho)\} \geq f\{A^{(n)}\} = d\{A^{(n)}\},$$

daher besteht, mit Hinsicht¹³⁾ auf a), für jeden positiven Wert von ϱ , die Ungleichung

$$f\{M(\varrho)\} \geq d\{M\},$$

was, nach (2), das Bestehen von (9) nach sich zieht.

¹¹⁾ Vgl. a. a. O.³⁾, §§ 1–3, S. 230–237.

¹²⁾ Nach Voraussetzung ist immer $f\{M\} \geq 0$; im Spezialfalle einer endlichen Menge M verschwindet $d\{M\}$, folglich gilt $f\{M\} \geq d\{M\}$.

¹³⁾ Man beachte, daß $d\{\bar{A}^{(n)}\} = d\{A^{(n)}\}$, wobei $\bar{A}^{(n)}$ die durch $A^{(n)}$ begrenzte Lemniskatenfläche bedeutet.

6. Was den tiefliegenden Satz II selbst¹⁴⁾ betrifft, man kann ihn etwa so beweisen: Wäre — der Behauptung entgegen — bei einem Wert von ϱ für die ins Unendliche wachsende Folge

$$(10) \quad n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

von ganzen Zahlen je ein Punkt $\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \dots, \zeta_{n_k}, \dots$ der Lemniskaten $A^{(n_1)}, A^{(n_2)}, \dots, A^{(n_k)}, \dots$ außerhalb der Menge $M(\varrho)$ gelegen, so würden für eine geeignete Teilfolge

$$(10') \quad n'_1, n'_2, \dots$$

von (10) die entsprechenden ζ -Werte gegen einen im Endlichen¹⁵⁾ gelegenen Punkt ζ_0 konvergieren, dessen Abstand von M nicht kleiner als ϱ ist und welcher in diejenige zusammenhängende Komponente der Komplementärmenge $\tilde{M}$ von M gehört, welche den unendlichfernen Punkt enthält¹⁶⁾. Aus der Existenz eines solchen Punktes ζ_0 folgt aber ein Widerspruch.

Ist nämlich C eine einfachgeschlossene Kurve, die die Menge M einschließt und die Kreisfläche $|z - \zeta_0| \leq \varrho$ ausschließt¹⁷⁾, so existiert bei geeignetem, zwischen 0 und ϱ liegendem δ ein Polynom $p(z; t)$ in z (mit von t abhängigen Koeffizienten) derart, daß

$$(11) \quad \text{Max } |p(z; t)| \leq \frac{3}{4}, \quad p(t; t) = 1$$

ist, solange z innerhalb oder auf C und t innerhalb oder auf der Peripherie der Kreisfläche $|t - \zeta_0| \leq \delta$ gelegen ist.

¹⁴⁾ Er enthält den klassischen Satz von Herrn D. Hilbert, wonach jede einfach geschlossene Kurve sich beliebig fein durch Lemniskaten (von außen) approximieren läßt. Vgl. Göttinger Nachrichten 1897, S. 63—70.

¹⁵⁾ Alle Punkte z von $A^{(n)}$ ($n > 2$) liegen in $M(s)$, wobei s die Spanne von M bezeichnet. Es folgt ja aus $|(z - \zeta_1^{(n)}) \dots (z - \zeta_n^{(n)})| = \mu_n$, daß $\text{Min}_{i=1, 2, \dots, n} |z - \zeta_i^{(n)}| \leq \sqrt[n]{\mu_n}$

ist. Nun ist aber $\sqrt[n]{\mu_n} < s$. Denn sei z_0 ein Punkt von M , wo $|\tau_n(z)|$ sein Maximum erreicht; dann ist $\sqrt[n]{\mu_n} = \sqrt[n]{|z_0 - \zeta_1^{(n)}| \dots |z_0 - \zeta_n^{(n)}|} \leq \text{Max}_{i=1, 2, \dots, n} |z_0 - \zeta_i^{(n)}| \leq s$.

¹⁶⁾ Die Lemniskatenfläche $|\tau_n(z)| \leq \mu_n$ enthält M und hat ein zusammenhängendes, den unendlichfernen Punkt enthaltendes Komplementärgebiet; kein Punkt von $A^{(n)}$ kann also zu einer eventuell existierenden, im Endlichen liegenden, zusammenhängenden Komponente von $\tilde{M}$ gehören.

¹⁷⁾ Die Existenz einer solchen Kurve C folgt aus der eben charakterisierten gegenseitigen Lage von M und ζ_0 .

[Denn bekanntlich gibt es¹⁸⁾ ein Polynom $q(z)$ so, daß innerhalb oder auf C gleichmäßig

$$\left| \frac{1}{\zeta_0 - z} - q(z) \right| \leq \frac{1}{2|\zeta_0 - z|}$$

und folglich

$$|1 - (\zeta_0 - z)q(z)| \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Daher genügt das Polynom

$$p(z; t) = 1 - (t - z)q(z)$$

den Beziehungen (11), sobald δ genügend klein festgesetzt wurde.]

Erklärt man nun mit Hilfe von $p(z; t)$ die Polynome $P_n(z; t)$, $n = 2, 3, \dots$ durch die Definitionsgleichung

$$(12) \quad P_n(z; t) = \frac{1 - p(z; t)^v}{t - z},$$

wobei v die größte in $\frac{n}{g+1}$ enthaltene ganze Zahl, g aber den Grad von $q(z)$ angibt, so erhält man Polynome mit folgenden Eigenschaften:

1. der Grad (in z) von $P_n(z; t)$ ist $\leq n - 1$;

2. für alle z in M , für alle t der Kreisfläche $|t - \zeta_0| \leq \delta$ und für alle $n \geq 2$ gilt

$$(13) \quad \left| \frac{1}{t - z} - P_n(z; t) \right| \leq c \cdot \Theta^n,$$

wobei Θ eine gewisse zwischen 0 und 1 liegende Zahl und c eine positive Konstante bedeutet¹⁹⁾.

[Es ist ja, nach (12) und (11)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t - z} - P_n(z; t) \right| &\leq \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^v}{\text{Min } |t - z|} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^{v(g+1)}}{\text{Min } |t - z|} \\ &\leq \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^g \text{Min } |t - z|} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^n. \end{aligned}$$

Beachtet man jetzt, daß das Lagrangesche Interpolationspolynom $J_n(z; t)$, das zu der Funktion $\frac{1}{t - z} - P_n(z; t)$ und zu den Interpolationsstellen $z = \zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ gehört, wegen der vorausgesetzten Extremaleigenschaften der

¹⁸⁾ Man kann nach Runge elementar beweisen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q(z) = q_\varepsilon(z; \zeta_0)$ derart, daß, wenn ζ_0 außerhalb der geschlossenen Jordanschen Kurve C liegt, für alle Punkte z innerhalb und auf C die Ungleichung $\left| \frac{1}{\zeta_0 - z} - q(z) \right| \leq \varepsilon$ gilt; man kann jedoch $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Max}_{z \text{ auf } C} |\zeta_0 - z|}$ festsetzen.

¹⁹⁾ Die hier angewandte Beweismethode stammt von Herrn G. Szegö. Vgl. seinen Aufsatz: Tschebyscheffsche Polynome und nicht fortsetzbare Potenzreihen, Math. Ann. 87, (1922), S. 90–111. Vgl. auch G. Szegö. Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion, Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-naturw. Abt. 1927, S. 69–71.

letzteren, mit Hinsicht auf (13) (für die Werte z, t, n unter 2.) der Ungleichung

$$(14) \quad |J_n(z; t)| \leq cn\Theta^n$$

genügt²⁰⁾ und sich offenbar als Differenz der beiden, zu den Funktionen $\frac{1}{t-z}$ und $P_n(z; t)$ gehörigen Interpolationspolynome, d. h. in der Form

$$\frac{\tau_n(t) - \tau_n(z)}{(t-z)\tau_n(t)} P_n(z; t) \text{ darstellen läßt, d. h.}$$

$$(15) \quad J_n(z; t) = \frac{1}{t-z} - P_n(z; t) - \frac{\tau_n(z)}{(t-z)\tau_n(t)}$$

ist, so folgert man aus (13), (14), (15) die Beziehung

$$(16) \quad \left| \frac{\tau_n(z)}{\tau_n(t)} \right| \leq |t-z| \cdot c(n+1)\Theta^n,$$

für alle oben charakterisierten Werte von n, z und t .

Der angedeutete Widerspruch tritt nun in Evidenz bei der Anwendung von (16) auf genügend große Glieder der Folge (10') als Werte von n , auf Punkte z aus der Menge M , für welche $|\tau_n(z)| = \mu_n$ ist und auf Punkte ζ_n als t -Werte, da ja $|\tau_n(\zeta_n)| = \mu_n$ und darum die linke Seite von (16) gleich der Einheit ist, während die rechte Seite beliebig klein ist. W. z. b. w.

7. Der eben beendete Beweis von I wurde auf den folgenden drei Tatsachen aufgebaut:

1. Jede nichtleere Menge M läßt sich durch eine Lemniskatenfläche $\bar{L}$ überdecken, so daß $d\{\bar{L}\}$ sich um beliebig wenig, (ϵ) , von $d\{M\}$ unterscheidet.

2. Unter den Lemniskatenflächen, welche M überdecken, gibt es solche, deren ganze Peripherie A in $M(\rho)$ enthalten ist, wie auch der (positive) Wert von ρ festgesetzt wurde.

3. Wenn die Mengenfunktion $f\{M\} \neq 0, \geq 0$ ist und die Eigenschaften (1) — (4) besitzt, so ist ihr Wert gleich dem Werte des entsprechenden transfiniten Durchmessers, sobald die Menge M sich auf eine abgeschlossene Lemniskatenfläche $\bar{L}$ oder auf eine Lemniskatenlinie L reduziert.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse festzustellen, daß nach dem ebengesagten die allgemeine Gültigkeit von

$$(17) \quad f\{M\} = d\{M\}$$

aus der Forderung der Monotonie und der Stetigkeit von $f\{M\}$ ((1) und (2)) folgt, sobald (17) in den Spezialfällen, wo $M = L$ und $M = \bar{L}$

²⁰⁾ Siehe M. Fekete, Über Interpolation; Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 6, (1926), S. 410—413; s. insbes. S. 411.

ist, besteht. Mit anderen Worten: man kann die Forderungen (3) und (4) — bei Beibehaltung der Forderungen (1) und (2) — mit Postulierung des Bestehens von (17) im speziellen Falle der Lemniskatenflächen und Lemniskatenlinien ersetzen.

8. Die letzte Bemerkung führt zur Fragestellung hinüber, ob und bei welcher andersartigen Reduktion des Postulatsystems (1) bis (4) man noch immer auf die spezielle Mengenfunktion $d\{M\}$ stößt? Ich will meine vorangeschickten Betrachtungen mit der Untersuchung der Frage ergänzen, ob für die nichtnegative, identisch nicht verschwindende Mengenfunktion $f\{M\}$ schon aus (1), (2) und (3) das Bestehen von (17) folgen muß?

Ich werde zeigen, daß dem zwar nicht so ist, daß jedoch *die einzigen Funktionen, die die jetztgenannten drei Eigenschaften besitzen, die folgende Gestalt haben:*

(18) $f\{M\} = d\{M\}^\alpha$, $\alpha \geq 0$ und unabhängig von M , wenn $d\{M\} \geq 1$,

(19) $f\{M\} \equiv 0$, oder²¹⁾ $= d\{M\}^\beta$, $\beta \geq 0$ und unabhängig von M , wenn $d\{M\} < 1$.

9. Die Beziehungen (1), (2) und (3) sind offenbar erfüllt, wenn (18) und (19) bestehen. Denn ist N in M enthalten, so ist — nach a) — $d\{N\} \leq d\{M\}$. Daher gilt $f\{N\} \leq f\{M\}$ bereits wegen (18), wenn $d\{N\} \geq 1$ oder bereits wegen (19), wenn $d\{M\} < 1$, endlich wegen (18) und (19), wenn $d\{N\} < 1 \leq d\{M\}$.

Noch einfacher läßt sich (2) beweisen. In der Tat, es ist $d\{M(\varrho)\}$ bei positivem ϱ wegen a) bzw. bei genügend kleinem positivem ϱ wegen b) nichtkleiner bzw. kleiner als 1, wenn $d\{M\}$ nichtkleiner bzw. kleiner als 1 ist. Daher ist im Falle $d\{M\} \geq 1$, wegen (18) und b),

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} f\{M(\varrho)\} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} d\{M(\varrho)\}^\alpha = (\lim_{\varrho \rightarrow 0} d\{M(\varrho)\})^\alpha = d\{M\}^\alpha = f\{M\}$$

und ähnlich ergibt sich die Gültigkeit von (2) auch für den Fall $d\{M\} < 1$.

Was endlich die Beziehung (3) betrifft, so folgt ihr Bestehen wegen (18) bzw. (19), aus der Tatsache, daß — wegen c) — $d\{M_p\}$ und $d\{M\}$ gleichzeitig nicht kleiner oder kleiner als 1 ausfallen müssen.

10. Viel komplizierter ist der Beweis, daß für nichtnegative Mengenfunktionen, die die Eigenschaften (1), (2) und (3) besitzen und nicht identisch verschwinden, (18) bzw. (19) gelten müssen. Aus der in § 7 unter 1. und 2. formulierten Tatsachen folgt, daß man im Beweise sich auf die beiden speziellen Fälle beschränken kann, wo M eine Lemniskatenfläche oder eine Lemniskatenlinie ist.

²¹⁾ Ist $M \neq 0$, $d\{M\} = 0$, $\beta = 0$, so soll man unter $d\{M\}^\beta$ den Wert 1 verstehen. Ist $M = 0$, $\beta = 0$, so soll man unter $d\{M\}^\beta$ irgendeinen festen Wert ϑ zwischen 0 und 1 verstehen, wobei auch $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ zugelassen sind.

In der Tat, enthält die Lemniskatenfläche $\bar{L}$ die Menge M und ist dabei die sodann wegen a) notwendigerweise nichtnegative Differenz $d\{\bar{L}\} - d\{M\} < \varepsilon$, so involviert die nach (1) bestehende Ungleichung $f\{M\} \leq f\{\bar{L}\}$ — falls $d\{M\} \geq 1$ und somit $d\{\bar{L}\} \geq 1$ ist, also nach der für richtig angenommenen Behauptung (18), $f\{\bar{L}\} = d\{\bar{L}\}^\alpha$ gilt — die Beziehung

$$f\{M\} \leq (d\{M\} + \varepsilon)^\alpha;$$

daher muß, mit Hinsicht auf 1.,

$$(20\ a) \quad f\{M\} \leq d\{M\}^\alpha$$

bestehen.

Ist andererseits die Peripherie A der die Menge M überdeckenden Lemniskatenfläche $\bar{A}$ in $M(\varrho)$ enthalten, so folgt zunächst, nach (1),

$$f\{A\} \leq f\{M(\varrho)\};$$

ferner gilt, im Falle $d\{M\} \geq 1$, wegen a), $d\{\bar{A}\} \geq 1$ und deshalb, wegen der Gleichung $d\{\bar{A}\} = d\{A\}$, auch $d\{A\} \geq 1$; folglich ist, falls (18) für Lemniskaten bewiesen,

$$d\{A\}^\alpha \leq f\{M(\varrho)\},$$

was seinerseits, wiederum wegen $d\{M\} \leq d\{\bar{A}\} = d\{A\}$, die Beziehung

$$d\{M\}^\alpha \leq f\{M(\varrho)\}$$

involviert; diese Ungleichung besteht, nach 2., für jedes positive ϱ . Somit gilt, wegen (2),

$$(20\ b) \quad d\{M\}^\alpha \leq f\{M\}.$$

Die Beziehungen (20 a) und (20 b) zusammen ergeben die Behauptung (18). Ähnlicherweise kann man auch die Behauptung (19) für beliebige nichtleere²²⁾ Punktmengen verifizieren, wenn sie einmal für die fraglichen speziellen Fälle bewiesen ist. Dabei muß man nur zwei Tatsachen beachten: α) bei geeignetem ε sind $d\{M\}$ und $d\{\bar{L}\}$ gleichzeitig kleiner als 1; β) bei geeignetem ϱ sind samt $d\{M\}$ auch $d\{M(\varrho)\}$ und $d\{A\}$ kleiner als 1.

11. Die vorangehenden Erörterungen haben gezeigt, daß man den Beweis von (18) und (19) auf zwei Spezialfälle zurückführen kann: in einem von diesen ist M eine Lemniskatenlinie, im anderen ist es eine Lemniskatenfläche. Nun lassen sich diese Fälle ihrerseits auf noch einfachere zurückführen: der erste auf den Fall der Kreise, der zweite aber auf den der Kreisflächen, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt der Zahlenebene gelegen ist:

²²⁾ Auch für die leere Menge ist die Relation (19) erfüllt. Dies kann man, wenn sie einmal für nichtleere Mengen bewiesen ist, so einsehen: Es ist $0 < f\{0\} \leq f\{M\}$, wobei M irgendwelche nichtleere Menge mit $d\{M\} < 1$ bedeutet [vgl. Fußnote 7)]; $f\{M\} \equiv 0$ für $M \neq 0$, $d\{M\} < 1$ liefert also $f\{0\} = 0$. Anderenfalls wähle man speziell $d\{M\} = 0$, so ist nach (19) $f\{M\} = 0$ oder 1 je nachdem $\beta > 0$ oder $\beta = 0$ ist und folglich $f\{0\} = d\{0\}^\beta$ [vgl. Fußnote 21)].

Bezeichne man den Wert der Funktion $f\{M\}$, wenn M mit $|z| = r$ bzw. mit $|z| \leq r$ zusammenfällt ($r > 0$), mit $\varphi(r)$ bzw. $\psi(r)$; dann gehört, nach (3), zur Lemniskatenlinie $|p(x)| = |x^k + \dots + c_k| = r$, bzw. zur Lemniskatenfläche $|p(x)| \leq r$ der Funktionswert $\sqrt[k]{\varphi(r)}$ bzw. $\sqrt[k]{\psi(r)}$. Hat man also bereits bewiesen, daß die Beziehungen

$$(21) \quad \varphi(r) \equiv \psi(r) \equiv r^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad \text{für } r \geq 1;$$

$$(22) \quad \varphi(r) \equiv \psi(r) \equiv 0, \quad \text{oder } \equiv r^\beta, \quad \beta \geq 0, \quad \text{für } r < 1$$

notwendigerweise bestehen müssen, wenn nur $f\{M\}$ eine nichtnegative, identisch nicht verschwindende Mengenfunktion mit den Eigenschaften (1), (2), (3) bedeutet, so folgt daraus nach dem Obigen

$$f\{|p(x)| = r\} = f\{|p(x)| \leq r\} = r^{\alpha/k}, \quad \text{wenn } r \geq 1,$$

$$f\{|p(x)| = r\} = f\{|p(x)| \leq r\} \equiv 0 \quad \text{oder } = r^{\beta/k}, \quad \text{wenn } r < 1.$$

Diese Beziehungen sind aber, mit Hinsicht auf

$$d\{|p(x)| = r\} = d\{|p(x)| \leq r\} = r^{1/k}$$

mit (18) und (19) äquivalent.

12. Zum Schluß werde ich noch (21) und (22) beweisen. Zunächst soll unter der Annahme

$$(21a) \quad \psi(r) = r^\alpha (\alpha \geq 0), \quad \text{wenn } r \geq 1$$

die Erfüllung der Beziehung

$$\varphi(r) = \psi(r), \quad \text{wenn } r \geq 1$$

gezeigt werden: Wenn das positive ε beliebig vorgeschrieben ist, so gibt es nach (2) ein positives $\varrho = \varrho(\varepsilon, r) < r$ derart, daß für den Ring $r - \varrho \leq |z| \leq r + \varrho$ der Wert der Funktion $f\{M\} \leq \varphi(r) + \varepsilon$. Deshalb gehört, nach (3), zum Ring $(r - \varrho)^k \leq |z| \leq (r + \varrho)^k$ ein Funktionswert, der $\leq (\varphi(r) + \varepsilon)^k$ ist. Nun enthält der neue Ring eine Kreisfläche vom Radius $\frac{(r + \varrho)^k - (r - \varrho)^k}{2} = r_k$ und der ihr zugehörige Funktionswert ist gleich $\psi(r_k)$, da, nach (3), der Wert von $f\{M\}$ bei Translation von M unverändert bleibt. Wähle man k so groß, daß samt r auch $r_k \geq 1$ ausfällt. Dann ist wegen der Annahme (21a)

$$\psi(r_k) = r_k^\alpha$$

und dieser Wert muß wegen der Monotonie von $f\{M\}$ nur $\leq (\varphi(r) + \varepsilon)^k$ betragen. Aus der Ungleichung

$$\left(\frac{(r + \varrho)^k - (r - \varrho)^k}{2} \right)^\alpha \leq (\varphi(r) + \varepsilon)^k,$$

die man auch in der Form

$$r_k^\alpha \left(\frac{\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)^k - \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)^k}{2} \right)^\alpha \leq (\varphi(r) + \varepsilon)^k$$

schreiben kann, folgt offenbar — für genügend große Werte von k — die Relation

$$r^k \leq (\varphi(r) + \varepsilon)^k$$

und daher besteht

$$r^\alpha \leq \varphi(r), \text{ d. h. } \psi(r) \leq \varphi(r).$$

Andererseits ist, nach (1), $\varphi(r) \leq \psi(r)$. Damit habe ich bewiesen, w. z. b. w. Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß aus der Annahme

$$(22a) \quad \psi(r) = r^\beta \ (\beta \geq 0), \text{ wenn } r < 1$$

die Erfüllung der Beziehung

$$\varphi(r) = \psi(r), \text{ wenn } r < 1$$

folgt; man bedenke nur, daß bei geeignet kleinem ϱ samt r auch r_k kleiner als 1 ausfällt.

Da noch die Beziehung

$$(22b) \quad \psi(r) \equiv 0, \text{ wenn } r < 1,$$

wegen $0 \leq \varphi(r) \leq \psi(r)$, die Beziehung

$$\varphi(r) \equiv 0, \text{ wenn } r < 1$$

involviert, so genügt es nach dem vorangehenden beim Beweise von (21) und (22) sich auf die Herleitung (21a) und (22a) zu beschränken, wobei ich das Bestehen letzterer Relation unter der Ausschließung der Möglichkeit von (22b) zu zeigen habe.

13. Die so beschränkte Aufgabe löse ich auf Grund der Funktionalgleichung

$$(23) \quad \psi(\xi^\eta) = \psi(\xi)^\eta,$$

welcher, wie ich bald zeigen werde, die Funktion ψ für alle positiven Werte von ξ und η genüge leistet.

Durch die Substitution $\xi = e$, $\eta = \log_{\text{nat}} r$ ergibt sich nämlich aus (23) für $r \geq 1$ die Relation

$$(24) \quad \psi(r) = \psi(e)^{\log_{\text{nat}} r}.$$

Andererseits zeigen die Ausführungen im § 3, daß, unter unseren Annahmen in bezug auf $f\{M\}$, $\psi(1) = 1$, folglich — wegen (1) — $\psi(e) \geq 1$ und somit $\alpha = \log \psi(e) \geq 0$ sein muß. Dieses Resultat, mit (24) verknüpft, liefert das Bestehen von (21a).

Auf ähnliche Weise, durch die Substitution $\xi = \frac{1}{e}$, $\eta = -\log_{\text{nat}} r$ erhält man aus der Funktionalgleichung im Falle $r < 1$ das Ergebnis

$$\psi(r) = \psi\left(\frac{1}{e}\right)^{-\log_{\text{nat}} r}.$$

Danach, wenn der nichtnegative [wegen $\psi(1) = 1$ und wegen (1) die Einheit nicht übertreffende] Wert von $\psi\left(\frac{1}{e}\right)$ positiv ausfällt und somit

— $\log \operatorname{nat} \psi\left(\frac{1}{e}\right) = \beta \geq 0$ ist, folgt die gewünschte Beziehung (22a), während im Falle $\psi\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ die andere Alternative: (22b) eintreffen muß.

14. Es ist noch die Verifikation von (23) übrig geblieben. Diese Relation folgt für alle positiven Werte von ξ und für sämtliche natürliche Zahlenwerte k von η aus (3): Man wähle einfach für M die Kreisfläche $|z| \leq \xi^k$ und setze $p(x) = x^k$; dann ist M_p identisch mit $|x| \leq \xi$ und (3) ist gleichbedeutend mit

$$(25) \quad \psi(\xi^k) = \psi(\xi)^k.$$

Setzt man hier anstatt ξ die positive Wurzelgröße $\sqrt[k]{\xi}$ aus der positiven Zahl ξ hinein, so ergibt sich

$$(26) \quad \psi(\sqrt[k]{\xi}) = \sqrt[k]{\psi(\xi)}.$$

Aus (25) und (26) erhält man (23) für sämtliche positive rationale Werte m/n von η (m, n natürliche Zahlen), wenn ξ auch weiterhin > 0 ist:

$$\psi(\xi^{m/n}) = \sqrt[n]{\psi(\xi^m)} = \sqrt[n]{\psi(\xi)^m} = \psi(\xi)^{m/n}.$$

Daraus folgt (23) — durch Grenzübergang — auch für positive irrationalen Werte von η , auf Grund der Stetigkeit der Funktion $\psi(r)$ von oben, die ihrerseits eine Folge von (2) ist: Ist M die Kreisfläche $|z| \leq r$, so ist $M(\varrho)$ die Kreisfläche $|z| \leq r + \varrho$; folglich ist (2) in diesem Falle mit

$$\lim_{0 < \varrho \rightarrow 0} \psi(r + \varrho) = \psi(r)$$

gleichbedeutend.

Damit ist der Beweis von (23) in allen Stücken dargetan.

Jerusalem, 5. Febr. 1931.

(Eingegangen am 16. Februar 1931.)

Notes on random functions.

By

R. E. A. C. Paley †, N. Wiener and A. Zygmund.

1. The introduction of the notion of the random into analysis is in the first instance the work of Borel¹⁾. His theory of *probabilités dénombrables* concerns itself with quantities depending upon an infinite sequence of choices and with their average values. In the simplest case, the choices in question are between two alternatives, which may be taken as the signs + and —. Thus questions as to the probability of convergence of the series

$$(1.01) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pm C_n$$

and of the distribution of its sums belong to this order of ideas. Such questions have been much discussed in the pages of *Fundamenta Mathematicae* and *Studia Mathematica*, and are associated with the names of Steinhaus and Rademacher, among others. To Steinhaus in particular is due the reduction of such questions to questions concerning the Lebesgue integral.

The next step forward in introducing the notion of probability into analysis consists in replacing numbers dependent on an infinite sequence of choices by functions dependent on an infinite sequence of choices. This step was taken by Paley and Zygmund²⁾, who have developed the theory of the analytic properties shared by “almost all” functions of the form

$$(1.02) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pm C_n f_n(x),$$

and the closely related problem of the properties shared by “almost all” functions of the form

$$(1.03) \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{2\pi i g_n} f_n(x),$$

¹⁾ Borel.

²⁾ Paley and Zygmund (1), (2), (3) hereinafter referred to as PZ 1, 2, 3.

where the numbers ϑ_n vary independently in the interval $(0, 1)$. In this they were systematically developing a method of Littlewood for the production of *Gegenbeispiele*. From this point of view, random functions present themselves as a somewhat sophisticated analytical tool, and may seem to belong rather to the pathology than to the natural history of functions of the real variable.

There is however a way in which functions with an element of randomness present themselves to the physicist. The Brownian movement, the motion of a suspended particle in a fluid in response to the irregularities of the molecular collisions to which it is subjected, is of so strikingly random a character that it does not even seem to possess a velocity. The physicist Perrin³⁾ has commented on the striking way in which this motion suggests the non-differentiable continuous functions of Weierstrass, and Borel⁴⁾ has commented on this in connection with his theory of denumerable probabilities. The components of the displacement of such a particle, regarded as functions of the time, are random functions in a sense differing considerably from that of Zygmund and Paley. Wiener⁵⁾ has reduced the theory of such random functions to a mathematically definite form, also depending upon a Lebesgue integration. For the purposes of the present paper, we shall represent one of the components of the displacement of the moving particle in the Wiener theory by $\chi(\alpha, t)$, where t is the time and α the parameter on which Lebesgue integration is performed for the purpose of averaging over all functions and determining probabilities. Wiener's $\chi(\alpha, t)$ is then, as he shows, a continuous function of t for almost all values of α , defined for $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, and vanishing for $t = 0$.

The purpose of this paper is to bridge the gap between the PZ and the W theories, by proving for the W random functions theorems analogous to those proved in the PZ papers. The analogy in question takes two different forms, which are in a manner of speaking Fourier duals of one another. The simplest and most obvious correspondence between the two theories is that $\chi(\alpha, t)$ determines what is really the limit of a large number of choices of sign of small quantities, each choice being whether over a small period of time a particle subject to the Brownian motion will wander to the right or to the left. Thus formally

$$(1.04) \quad \int_0^1 f(x, t) c(t) d_t \chi(\alpha, t)$$

³⁾ E. Perrin (1)

⁴⁾ E. Borel (1), (2).

⁵⁾ N. Wiener (1).

is an analogue to (1.02). On the other hand, it may be established that if $\{\gamma_n(t)\}$ is a set of normal and orthogonal functions $(0,1)$, the quantities

$$(1.05) \quad \int_0^1 \gamma_n(t) d_t \chi(\alpha, t)$$

appropriately defined all have a Gaussian distribution with the same modulus, and are completely independent of one another. Thus

$$(1.06) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \int_0^1 \gamma_n(t) d_t \chi(\alpha, t)$$

is an analogue of (1.02), and like it depends on an infinite sequence of like independent probabilities, with the difference that the probabilities of (1.02) are all-or-none probabilities such as arise in the tossing of a coin, whereas the probabilities of (1.06) are continuously distributed like those of the errors in shooting at a target.

It will turn out that by far the greater part of the PZ theory has a precise W analogue in both possible senses. The W theory is a little less adapted to the construction of Gegenbeispiele than the PZ theory, in that the absolute magnitude of the coefficients in (1.02) is determined in advance, while that in (1.06) itself depends on probability considerations. On the other hand, many averages concerning which the PZ theory only yields inequalities are expressible in closed form in the W theory.

If the finite range of t in $\chi(\alpha, t)$ is replaced by an infinite range, as is easily possible, the theory undergoes but little change. On the other hand, the Fourier series is replaced by the Fourier integral, and the symmetry of the latter makes the two analogues of the PZ theory reduce essentially to one. Furthermore, a new type of functional arises over the infinite range — the mean as contrasted with the integral, and the evaluation of the distribution of such means introduces new considerations. Under certain circumstances, such means will almost always assume a certain fixed value.

2. By W 1, if $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1$,

$$(2.01) \quad \int_0^1 F(\chi(\alpha, t_1), \chi(\alpha, t_2) - \chi(\alpha, t_1), \dots, \chi(\alpha, t_n) - \chi(\alpha, t_{n-1})) d\alpha$$

$$= \pi^{-n/2} \prod_1^n (t_k - t_{k-1})^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_n$$

$$\exp. \left[- \sum_1^n \frac{u_k^2}{t_k - t_{k-1}} \right] F(u_1, \dots, u_n).$$

From this it is easy to show that if $t_2 \geq t_1$,

$$(2.02) \quad \int_0^1 [\chi(\alpha, t_2) - \chi(\alpha, t_1)]^{2n} d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2^n} (t_2 - t_1)^n;$$

$$\int_0^1 [\chi(\alpha, t_2) - \chi(\alpha, t_1)]^{2n+1} d\alpha = 0;$$

and that if none of the intervals $(t_{1,p}, t_{2,p})$ overlap,

$$(2.03) \quad \int_0^1 \prod_{p=1}^r [\chi(\alpha, t_{2,p}) - \chi(\alpha, t_{1,p})]^{n_p} d\alpha$$

$$= \prod_{p=1}^r \int_0^1 [\chi(\alpha, t_{2,p}) - \chi(\alpha, t_{1,p})]^{n_p} d\alpha.$$

Since $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ represents the number of distinct ways of parcelling $2n$ objects into pairs, it follows from (2.02) and (2.03) that the integral in (2.03) may be evaluated by parcelling the product in the integrand into pairs in all possible ways, integrating the product of each pair, multiplying the integrals for all the pairs in each parcelling, and adding these products over all parcellings. From this it results immediately that

$$(2.04) \quad \int_0^1 \chi(\alpha, t_1) \chi(\alpha, t_2) \dots \chi(\alpha, t_{2n}) d\alpha$$

$$= \int_0^1 \chi(\alpha, t_1) \chi(\alpha, t_2) d\alpha \int_0^1 \chi(\alpha, t_3) \chi(\alpha, t_4) d\alpha \dots \int_0^1 \chi(\alpha, t_{2n-1}) \chi(\alpha, t_{2n}) d\alpha$$

+ all similar sums for all other parcellings of $t_1, \dots, t_{2n}$ into pairs;

$$\int_0^1 \chi(\alpha, t_1) \chi(\alpha, t_2) \dots \chi(\alpha, t_{2n+1}) d\alpha = 0.$$

This enables us to establish:

Lemma 1. *Let $\varrho_1(t), \varrho_2(t), \dots, \varrho_{2n}(t)$ be functions of limited total variation over $(0, 1)$. Then*

$$(2.05) \quad \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \chi(\alpha, t_1) d\varrho_1(t_1) \int_0^1 \chi(\alpha, t_2) d\varrho_2(t_2) \dots \int_0^1 \chi(\alpha, t_{2n}) d\varrho_{2n}(t_{2n})$$

$$= \int_0^1 d\varrho_1(t_1) \dots \int_0^1 d\varrho_{2n}(t_{2n}) \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_n \{ \chi(\alpha_1, t_1) \chi(\alpha_1, t_3) \chi(\alpha_2, t_3) \chi(\alpha_2, t_4) \dots$$

$$\chi(\alpha_n, t_{2n-1}) \chi(\alpha_n, t_{2n}) + \text{etc.} \},$$

where the "etc." stands for all other distributions of the $2n$ t_k 's over the n α_k 's, two to each, permutations of the α_k 's among themselves not being counted as distinct.

Another very easy result to establish is that if ϱ_1 and ϱ_2 are of limited total variation and $\varphi_1(1) = \varphi_2(1) = 0$,

$$\begin{aligned}
 (2.06) \quad & \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \chi(\alpha, t_1) d\varrho_1(t_1) \int_0^1 \chi(\alpha, t_2) d\varrho_2(t_2) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 t_1 d\varrho_1(t_1) \int_{t_1}^1 d\varrho_2(t_2) + \frac{1}{2} \int_0^1 t_2 d\varrho_2(t_2) \int_{t_2}^1 d\varrho_1(t_1) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 t \{ \varrho_2(t) d\varrho_1(t) + \varrho_1(t) d\varrho_2(t) \} = \frac{1}{2} \int_0^1 \varrho_1(t) \varrho_2(t) dt.
 \end{aligned}$$

Thus we may give to Lemma 1 the somewhat compacter form:

Lemma 1'. Let $\varrho_1(t), \dots, \varrho_{2n}(t)$ be functions of limited total variation over $(0, 1)$. Then

$$\begin{aligned}
 (2.07) \quad & \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \chi(\alpha, t_1) d\varrho_1(t_1) \dots \int_0^1 \chi(\alpha, t_{2n}) d\varrho_{2n}(t_{2n}) \\
 &= 2^{-n} \int_0^1 \varrho_1(t) \varrho_2(t) dt \int_0^1 \varrho_3(t) \varrho_4(t) dt \dots \int_0^1 \varrho_{2n-1}(t) \varrho_{2n}(t) dt + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

In particular, if $\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt = 1$, and $\varrho(t)$ is of limited total variation,

$$(2.08) \quad \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho(t) \right]^{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2^n}.$$

From this we may readily prove that if $P(w)$ is any polynomial in w ,

$$(2.09) \quad \int_0^1 d\alpha P \left[\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho(t) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(u) e^{-u^2} du.$$

We may readily extend this result to:

Lemma 2. Let $\varrho(t)$ be a function of limited total variation, and let $\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt = 1$. Let

$$(2.10) \quad I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-u^2} du$$

exist as a Lebesgue integral. Then

$$(2.11) \quad \int_0^1 d\alpha F \left[\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho(t) \right] = I.$$

This may be expressed in words by saying that $\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho(t)$ has a

Gaussian distribution with modulus dependent only on $\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt$.

A reasoning of the same sort will establish:

Lemma 3. Let $\varrho_1(t), \dots, \varrho_n(t)$ be functions of limited total variation for which

$$(2.12) \quad \int_0^1 \varrho_k(t) \varrho_l(t) dt = \begin{cases} 0; & [k \neq l] \\ 1; & [k = l] \end{cases}$$

and let

$$(2.13) \quad \pi^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_n F(u_1, \dots, u_n) e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n u_k^2}$$

exist as a Lebesgue integral. Then

$$(2.14) \quad \int_0^1 d\alpha F \left[\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho_1(t), \dots, \int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho_n(t) \right]$$

exists and has the same value.

Let it be noted that we have hereby established that the set of functions

$$(2.15) \quad g_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(\alpha) = \int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho_{\lambda_1}(t) \dots \int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho_{\lambda_n}(t) \\ [\lambda_j \neq \lambda_k \text{ if } j \neq k]$$

is normal and orthogonal. They are analogous to a set of normal and orthogonal functions given by Walsh, and assuming only the values ± 1 . Unlike the Walsh functions, they are continuous.

We may put Lemma 3 more strikingly by saying that the quantities $\int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho_u(t)$ are completely independent — not merely linearly independent — of one another, and that they all have a Gaussian distribution with the same modulus.

3. Let us now introduce:

Definition 1. If $\varrho(t)$ is a function of limited total variation over $(0, 1)$, we shall write

$$(3.01) \quad \int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) = \varrho(1)\chi(\alpha, 1) - \int_0^1 \chi(\alpha, t) d\varrho(t)$$

As before, let $\{\varrho_n(t)\}$ be a complete set of normal and orthogonal functions of limited total variation. Let $\sum_1^\infty a_n^2$ converge. We wish to consider the behaviour of

$$(3.02) \quad \int_0^1 \left[\sum_1^n a_k \varrho_k(t) \right] d\chi(\alpha, t)$$

as $n \rightarrow \infty$. By Lemma 3, this question may be answered in terms of the distribution of $\sum_1^n a_k u_k$ when the individual variables u_k have inde-

pendent Gaussian distributions with the same modulus. This again is formally the same question as that of the distribution of $\chi(\alpha, a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$. As has been said, Wiener has shown that for almost all values of α , $\chi(\alpha, t)$ is continuous in t . Thus almost always

$$(3.03) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\alpha, \sum_1^n a_k^2) = \chi(\alpha, \sum_1^\infty a_k^2)$$

from which it follows that $\sum_1^\infty a_k u_k$ almost always converges, and that

$$(3.04) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\sum_1^n a_k \varrho_k(t) \right] d\chi(\alpha, t)$$

almost always exists. We now introduce:

Definition 2. Let $\varrho(t)$ belong to L_2 , and let

$$(3.05) \quad \varrho(t) \sim \sum_1^\infty a_k \varrho_k(t).$$

Then we shall put

$$(3.06) \quad \int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left[\sum_1^n a_k \varrho_k(t) \right] d\chi(\alpha, t).$$

We now wish to show that Definitions 1 and 2 are consistent, in the sense that they almost always lead to the same value of $\int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t)$ when they are both applicable. Let us then adhere to Definition 1, and let us suppose that

$$(3.07) \quad \int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt - \sum_1^n a_k^2 < \varepsilon^2.$$

It will follow from Lemma 2 that

$$(3.08) \quad \left| \int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) - \int_0^1 \left[\sum_1^n a_k \varrho_k(t) \right] d\chi(\alpha, t) \right| < \varepsilon$$

except over a set of values of α of measure not exceeding

$$(3.09) \quad \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon u)^2 e^{-u^2} du = \varepsilon/2.$$

Thus (3.08) cannot tend almost everywhere to any limit other than 0, and we have established the consistency of the two definitions. A precisely similar argument will show that Definition 2 is independent of the particular choice of the set $\{\varrho_k(t)\}$.

Let it be noted that by (2.08)

$$(3.10) \quad \int_0^1 d\alpha \left[\sum_1^n a_k \int_0^1 \varrho_k(t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \left[\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt \right]^m.$$

Let it also be noted that

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d\alpha \left\{ \int_0^1 \left[\sum_1^n a_k \varrho_k(t) \right] d\chi(\alpha, t) - \int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) \right\}^2 = 0.$$

This results from (3.06) and the fact that by (2.08)

$$(3.111) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^1 d\alpha \left\{ \int_0^1 \sum_m^n a_k \varrho_k(t) \right\} d\chi(\alpha, t) \Big\}^2 = 0.$$

From (3.11) and (3.10) it readily follows that

$$(3.12) \quad \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \left[\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt \right]^m.$$

Applying this to

$$(3.13) \quad \varrho_*(t) = \varrho(t) - \sum_1^n a_k \varrho_k(t),$$

we get

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \varrho_*(t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} = 0.$$

This together with (2.08) yields

$$(3.15) \quad \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \left[\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt \right]^m.$$

We have thus established:

Lemma 2'. *Let*

$$(2.10) \quad I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-u^2} du$$

exist as a Lebesgue integral, and let $\int_0^1 [\varrho(t)]^2 dt = 1$. *Then*

$$(3.16) \quad \int_0^1 d\alpha F \left[\int_0^1 \varrho(t) d\chi(\alpha, t) \right] = I.$$

Lemma 3 also possesses an extension of the same sort to functions $\varrho_k(t)$ not of limited total variation. Once these lemmas are established, it follows that Definition 2 will yield the same result even if the ϱ_k 's are not functions of limited total variation. Of course, in this form it would be circular and of no value as a definition.

4. Let us now consider a function of t and the parameter τ of the form

$$(4.01) \quad \Phi_n(\tau, t) = \sum_1^n \sigma_k(\tau) \varrho_k(t)$$

where the functions $\varrho_k(t)$ are normal and orthogonal over $(0, 1)$ and

$$(4.02) \quad \sum_1^n \int_0^1 [\sigma_k(\tau)]^2 d\tau = S < \infty.$$

Then except for a set of values of τ of zero measure,

$$(4.03) \quad \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \Phi_n(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \left[\sum_1^n [\sigma_k(\tau)]^2 \right]^m \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \left[\int_0^1 [\Phi_n(\tau, t)]^2 dt \right]^m.$$

It follows that

$$(4.04) \quad \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi_n(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \int_0^1 \left[\sum_1^n [\sigma(\tau)]^2 \right]^m d\tau.$$

Thus if $\Phi(\tau, t)$ is any function belonging to L_2 as a function of t and τ simultaneously, and

$$(4.05) \quad \Phi_n(\tau, t) = \sum_1^n \varrho_k(t) \int_0^1 \Phi(\tau, s) \varrho_k(s) ds,$$

an argument precisely similar to that of the last paragraph will show that for almost all values of α

$$(4.06) \quad \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_n(\tau, t) d\chi(\alpha, t)$$

exists, and that as before we may define $\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t)$ by

$$(4.07) \quad \int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Phi_0(\tau, t) d\chi(\alpha, t).$$

The consistency of this definition with previous definitions and its independence of the choice of ϱ_n 's involve no new discussion. If we reflect that the finiteness of

$$(4.08) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m$$

carries with it the boundedness of

$$(4.09) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi_n(\tau, t)]^2 dt \right]^m$$

for all n , and the fact that

$$(4.10) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi_m(\tau, t) - \Phi_n(\tau, t)]^2 dt \right]^m = 0,$$

then the methods by which we have established Lemma 3' are adequate to establish:

Theorem I. *If*

$$(4.11) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m < \infty,$$

then

$$(4.12) \quad \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \\ \rightarrow \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m,$$

and

$$(4.13) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m}$$

exists for almost all values of α .

Particular cases for which (4.11) is valid in case $q = 2m$ are: (a)

$$(4.14) \quad \Phi(\tau, t) = \beta(t) f(\tau, t),$$

where $\beta(t)$ belongs to L_2 and

$$(4.15) \quad \int_0^1 |f(\tau, t)|^q d\tau < B$$

and B is an absolute constant; (b)

$$(4.16) \quad \Phi(\tau, t) \sim \sum_1^\infty b_n f_n(\tau) \varrho_n(t),$$

where

$$(4.17) \quad \sum_1^\infty b_n^2 < \infty;$$

$$(4.18) \quad \int_0^1 \varrho_k(t) \varrho_l(t) dt = \begin{cases} 1; [k = l] \\ 0; [k \neq l] \end{cases},$$

$$(4.19) \quad \int_0^1 |f_n(\tau)|^q d\tau < B;$$

and B is an absolute constant. These two cases form the two different analogues by the two methods we have mentioned, of Theorem II of PZ 1. A more precise analogue of this is:

Theorem II. *If hypothesis (a) or hypothesis (b) holds, and $q \geq 2$, without necessarily being an integer,*

$$(4.20) \quad \int_0^1 d\tau \left| \int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right|^q$$

exists for almost all values of α .

Here the proof is exactly alike in the two cases. We have in case (a) for $2m - 2 < q \leq 2m$

$$\begin{aligned}
 (4.21) \quad & \left\{ \int_0^1 d\alpha \left| \int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right|^{q \cdot 1/q} \right\} \leq \left\{ \int_0^1 d\alpha \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \right\}^{1/2m} \\
 & = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \right)^{1/2m} \left[\int_0^1 [\beta(t)]^2 [f(\tau, t)]^2 dt \right]^{1/2} \\
 & \leq C_q \left[\int_0^1 [\beta(t)]^2 |f(\tau, t)|^q dt \right]^{1/q} \left[\int_0^1 [\beta(t)]^2 dt \right]^{q-2/2q}
 \end{aligned}$$

where C_q depends only on q .

Raising both sides to the q th power, and integrating with respect to τ , we get:

$$\begin{aligned}
 (4.22) \quad & \left| \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\tau \int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right|^q \\
 & \leq C_q^q \left[\int_0^1 [\beta(t)]^2 dt \right]^{q-2/2} \int_0^1 d\tau \int_0^1 [\beta(t)]^2 |f(\tau, t)|^q dt \\
 & \leq C_q^q \left[\int_0^1 [\beta(t)]^2 dt \right]^{q/2} B,
 \end{aligned}$$

from which Theorem II follows at once.

It follows at once from Theorem I that:

Theorem III. *Let*

$$(4.23) \quad \int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \leq w^2$$

where w is independent of τ . Then if

$$(4.24) \quad G(u) = \sum_0^\infty a_n u^n$$

has only positive coefficients in its Maclaurin series, and

$$(4.25) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty G(uw) e^{-u^2} du < \infty$$

then for almost all α

$$(4.26) \quad \int_0^1 d\tau G \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right] < \infty.$$

In particular, almost always

$$(4.27) \quad \int_0^1 d\tau \exp \lambda \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^2 < \infty$$

where

$$(4.28) \quad \lambda < 1/w^2.$$

In the particular case where $\Phi(\tau, t)$ is of form (4.16), where (4.17) and (4.18) hold, and where (4.19) is replaced by the condition that $f_n(\tau)$ is bounded for all values of n and τ , the methods of Theorem III of PZ 1 will enable us to show that condition (4.28) is unnecessary.

5. Now that we have obtained the formulae for the mean values of expressions of the form

$$(5.01) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m}$$

let us investigate the mean squares of the departures from these means. We have formally:

$$(5.02) \quad \int_0^1 d\alpha \left\{ \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m \right\}^2 \\ = \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^{2m} \int_0^1 \Phi(\sigma, t) d\chi(\alpha, t) \int_0^1 \Phi(\tau, t) d\chi(\sigma, t) \\ - \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2m-1}{2^m} \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m \right\}^2.$$

If we evaluate (5.02) in accordance with Lemma 1', we get for the case $m = 1$

$$(5.03) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\sigma, t) \Phi(\tau, t) dt \right]^2;$$

for the case $m = 2$,

$$(5.04) \quad \frac{9}{8} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \int_0^1 \Phi(\sigma, t) \Phi(\tau, t) dt \int_0^1 [\Phi(\sigma, t)]^2 dt \int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \\ + \frac{3}{4} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\sigma, t) \Phi(\tau, t) dt \right]^3;$$

and for the case $m = 3$,

$$(5.05) \quad \frac{9}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\sigma, t) \Phi(\tau, t) dt \right]^2 \int_0^1 [\Phi(\sigma, t)]^2 dt \int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \\ + \frac{3}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi(\sigma, t) \Phi(\tau, t) dt \right]^4.$$

By the Schwarz inequality, each of these expressions will be finite with the appropriate

$$(5.06) \quad \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 [\Phi(\tau, t)]^2 dt \right]^m.$$

In the first instance, we have only established (5.03), (5.04), and (5.05) in the case of functions $\Phi(\sigma, t)$ of limited total variation in t , but there is no difficulty in extending them by processes now familiar to the general case for which (5.06) is finite.

If the mean square departure of a quantity from the value A is B^2 , the quantity cannot differ from A by an amount exceeding B except over a set of values of measure not exceeding B^2/C_u^2 . We thus obtain:

Theorem IV. *Let*

$$(5.07) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 d\tau \int_0^1 dt [\Phi_n(\tau, t)]^2 = A \quad [n = 1, 2, \dots]$$

and let

$$(5.08) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi_n(\sigma, t) \Phi_n(\tau, t) dt \right]^2 \right\}^{1/2}$$

converge. Then except for a set of values of α of zero measure,

$$(5.09) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 d\tau \left[\int_0^1 \Phi_n(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right]^2 = A.$$

Similar theorems hold for cases (5.04), (5.05), etc.

In particular, let

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \Phi_n(\tau, t) &= n^2 \text{ if } \tau - \frac{1}{n^4} < t < \tau, a + \frac{1}{n^4} < \tau < t; \\ \Phi_n(\tau, t) &= 0 \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

Then

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \Phi_n(\sigma, t) \Phi_n(\tau, t) dt &= O(1) \text{ if } |\sigma - \tau| < n^{-4}; \\ \int_0^1 \Phi_n(\sigma, t) \Phi_n(\tau, t) dt &= O \text{ otherwise.} \end{aligned}$$

Thus the series of (5.08) reduces to

$$(5.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-2}) < \infty,$$

Formula (5.09) becomes

$$(5.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \int_{a + \frac{1}{n^4}}^b \left[\chi(\alpha, \tau) - \chi\left(\alpha, \tau - \frac{1}{n^4}\right) \right]^2 d\tau = \frac{1}{2}(b - a).$$

We have already proved, however (W 1) that except for a set of values of α of zero measure, there is an A such that

$$(5.14) \quad [\chi(\alpha, \tau) - \chi(\alpha, \sigma)]^2 < A |\tau - \sigma|^{1/2}$$

for all τ and σ . Without substantial change, the argument will show that there is almost always an A such that

$$(5.15) \quad [\chi(\alpha, \tau) - \chi(\alpha, \sigma)]^2 < A |\tau - \sigma|^{5/10}$$

for all τ and σ . Thus if $(n+1)^{-4} \leq \varepsilon \leq n^{-4}$,

$$(5.16) \quad n^4 \int_{a+n^{-4}}^b [\chi(\alpha, \tau - \varepsilon) - \chi(\alpha, \tau - n^{-4})]^2 d\tau = O(n^{-2})$$

uniformly in ε , so that by (5.13) we have almost always

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \int_{a+n^{-4}}^b [\chi(\alpha, \tau) - \chi(\alpha, \tau - \varepsilon)]^2 d\tau = \frac{1}{2}(b-a)$$

and hence

$$(5.18) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{a+\varepsilon}^b [\chi(\alpha, \tau) - \chi(\alpha, \tau - \varepsilon)]^2 d\tau = \frac{1}{2}(b-a)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ in any way whatever. This is almost always, true for every rational a and b , and it may consequently be proved to hold almost always for *every* a and b in $(0, 1)$

6. We now come to the consideration of random functions over an infinite range. If we put:

$$(6.01) \quad \xi(\alpha, t) = \sqrt{\pi} \int_{1/2}^{\frac{1}{\pi} \cot^{-1}(-t)} \chi(\alpha, u) d \csc \pi u - \chi\left(\alpha, \frac{1}{\pi} \cot^{-1}(-t)\right) \sqrt{1+t^2} + \chi\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$$

we shall find that $\xi(\alpha, 0) = 0$, and that if $-\infty \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$

$$(6.02) \quad \int_0^1 F(\xi(\alpha, t_2) - \xi(\alpha, t_1), \xi(\alpha, t_3) - \xi(\alpha, t_2), \dots, \xi(\alpha, t_n) - \xi(\alpha, t_{n-1})) d\alpha \\ = \pi^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{k=2}^n (t_k - t_{k-1}) \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_n \exp\left[-\sum_{k=2}^n \frac{u_k^2}{t_k - t_{k-1}}\right] \\ F(u_2, \dots, u_n).$$

Formally,

$$(6.03) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\alpha, t) d\varrho(t) = \sqrt{\pi} \int_0^1 \chi(\alpha, t) d[\csc \pi t \varrho(-\cot \pi t)]$$

so that if $\varrho(t)$ belongs to L_2 , and $\varrho(t) \sqrt{1+t^2}$ is of limited total variation over $(-\infty, \infty)$ we may define

$$(6.04) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t) d\xi(\alpha, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\alpha, t) d\varrho(t).$$

Up to Definition 2, the theory of random functions over the infinite interval is precisely parallel to that over the finite interval. In Definition 2, we may now generalize $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t) d\xi(\alpha, t)$ so as to eliminate not merely the condition that $\varrho(t)$ should be of limited total variation, but all conditions concerning its order of magnitude, and as before, we now merely require that $\varrho(t)$ shall belong to L_2 , this time over $(-\infty, \infty)$. Up to

Theorem III, no change is made by introducing an infinite range of both t and τ , and even in Theorem III the changes that are introduced over a finite range of τ are trivial and obvious. In particular, the reasoning of Theorem IV is still valid, and all that part of W1 which

applies to the proof that the spectral density of $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t) d\xi(d, t)$ is almost always

$$(6.05) \quad \frac{1}{4\pi} \left| \text{l. i. m.}_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \varrho(t) e^{-iut} dt \right|^2$$

will remain valid when $\varrho(t)$ merely belongs to L_2 , and

$$(6.06) \quad \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(t) \varrho(t+u) dt \right]^2 < \infty$$

If we put

$$(6.07) \quad \varrho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l. i. m.}_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \psi(u) e^{iut} du,$$

these conditions reduce themselves to the condition that $\psi(u)$ should belong both to L_2 and L_4 .

7. We now restrict ourselves to the case (4.14) and prove a theorem analogous to Theorem VIII of PZ 1. We have first to generalize Lemma 6 of that paper. This may be done in the following way. Let

$$(7.01) \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = 1$$

divide the interval $(0, 1)$ into N portions. We write

$$(7.02) \quad F_x(\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_n(x) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \beta(t) \alpha \chi(\alpha, t)$$

where $\varphi_n(x)$ denotes Rademacher's function, defined in PZ 1. We denote by $S_x(\alpha)$ the maximum

$$(7.03) \quad S_x(\alpha) = \text{Max}_{0 \leq m \leq N-1} \left| \sum_{n=0}^m \varphi_n(x) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \beta(t) d\chi(\alpha, t) \right|.$$

We wish to investigate the behaviour of the average

$$(7.04) \quad \int_0^1 S_0''(\alpha) d\alpha.$$

We observe first that, if we write,

$$(7.05) \quad \nu(t) = n \quad (t_n \leq t < t_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq N-1)$$

then, for a given value of x , we may write

$$(7.06) \quad \varphi_{\nu(t)}(x) d\chi(\alpha, t) = d\chi(\alpha', t),$$

since the left hand side of (7.06) clearly represents an arbitrary Brownian motion. The correspondance between α and α' is 1 — 1 except in a set of measure zero, and measure (in space α) is preseired. It follows that

$$(7.07) \quad S_x(\alpha) = S_0(\alpha'),$$

and that

$$(7.08) \quad \int_0^1 S_x^q(\alpha) d\alpha = \int_0^1 S_0^q(\alpha) d\alpha.$$

Applying Lemma 6 of PZ 1, we have

$$\begin{aligned} (7.09) \quad \int_0^1 S_0^q(\alpha) d\alpha &= \int_0^1 dx \int_0^1 S_x^q(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 d\alpha \int_0^1 S_x^q(\alpha) dx \\ &\leq C_q \int_0^1 d\alpha \int_0^1 |F_x(\alpha)|^q dx \\ &= C_q \int_0^1 dx \int_0^1 |F_x(\alpha)|^q d\alpha \\ &\leq C_q \left(\int_0^1 \beta^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}q}, \end{aligned}$$

where the constants C_q depend only on q . Now denote by $S^*(\alpha)$ the upper bound

$$(7.10) \quad S^*(\alpha) = \sup_{0 \leq t' \leq 1} \left| \int_0^{t'} \beta(t) d\chi(\alpha, t) \right|.$$

By proceeding to the limit in (7.09) we obtain

$$(7.11) \quad \int_0^1 S^{*q}(\alpha) d\alpha \leq C_q \left(\int_0^1 \beta^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}q}.$$

The above result is analogous to Lemma 6. We may now prove the following result, analogous to Theorem VIII.

Theorem V. Let $S^*(\tau, \alpha)$ denote

$$(7.12) \quad \sup_{0 \leq t' \leq 1} \left| \int_0^{t'} \beta(t) f(\tau, t) d\chi(\alpha, t) \right|,$$

where

$$(7.13) \quad \int_0^1 \beta^2(t) dt < \infty,$$

$$(7.14) \quad \int_0^1 |f(\tau, t)|^q d\tau < B,$$

and B is an absolute constant. Then, for almost all α , we have

$$(7.15) \quad \int_0^1 S^{*q}(\tau, \alpha) d\tau < \infty.$$

Suppose that $\beta(t)$ is a function of bounded variation for which

$$(7.16) \quad \int_0^1 \beta^2(t) dt = \infty.$$

It may be shown*) that, for almost all α , the integral

$$(7.17) \quad \int_0^1 \beta(t) d\chi(\alpha, t)$$

does not exist in the sense (3.01). We may now prove the following theorem analogous to Theorem IX of PZ 1.

Theorem VI. Suppose that, corresponding to every set E of positive measure in the interval $(0, 1)$, we can find a set $G = G(E)$, such that

$$(7.18) \quad \int_G \beta^2(t) dt = \infty,$$

$$(7.19) \quad \int_E f^2(\tau, t) d\tau > \delta_E \quad (t < G)$$

where δ_E is a positive constant, which may depend on E . Then, for almost all α , the integral

$$(7.20) \quad \int_0^1 \beta(t) f(\tau, t) d\chi(\alpha, t)$$

exists in the sense (3.01) for almost no τ .

8. It was proved in PZ 1 that almost all the functions

$$(8.01) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \varphi_n(t) \quad (z = r e^{i\theta}),$$

where $\sum a_n^2$ converges, satisfy the inequality

$$(8.02) \quad \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(r e^{i\theta})| = O\left(\sqrt{\log \frac{1}{1-r}}\right).$$

A *gegenbeispiel* was given to show that (8.02) was best possible. This *gegenbeispiel* was a lacunary trigonometric series, and therefore, being of a somewhat special type, may not be regarded as altogether sufficient evidence that almost all functions are unbounded. Leater, in PZ. 3, it was shown that the function (8.01) was unbounded for almost all t subject only to the divergence of the series

$$(8.03) \quad |a_0| + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} a_n^2 \right)^{1/2}.$$

*) The proof is almost identical with that of Theorem B in the paper Zygmund (1).

Here we give a very simple *gegenbeispiel* with smooth coefficients, which illustrates the phenomenon in a rather different way. We write

$$(8.04) \quad F_y^{(r)}(r, \Theta) = \sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{[kr]} \frac{2 \sin \frac{n}{\nu}}{n} \varrho^{-n} r^n \cos n \Theta y_n,$$

where ν is an even integer, k is a number which remains to be chosen, and $y_1, y_2, \dots, y_n$ represent independent Gaussian distributions of modulus 1, and $\varrho = \varrho_\nu$ is defined by the equation

$$(8.05) \quad \varrho^{-\nu} = e.$$

Clearly the average value of

$$(8.05_1) \quad \int_0^{2\pi} (F_y^{(r)}(1, \Theta))^2 d\Theta$$

is less than on absolute constant independent of ν (but depending on k). Now consider

$$\begin{aligned} (8.06) \quad F_y^{(\nu)}(\varrho, \Theta) &= \sqrt{\nu} \sum_{n=1}^{(k\nu)} \frac{2 \sin \frac{n}{\nu}}{n} \cos n \Theta y_n \\ &= \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \left(\Theta + \frac{1}{\nu} \right)}{n} y_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \left(\Theta - \frac{1}{\nu} \right)}{n} y_n \right) \\ &\quad - \sqrt{\nu} \left(\sum_{n=[k\nu]+1}^{\infty} \frac{\sin n \left(\Theta + \frac{1}{\nu} \right)}{n} y_n - \sum_{n=[k\nu]+1}^{\infty} \frac{\sin n \left(\Theta - \frac{1}{\nu} \right)}{n} y_n \right) \\ &= F_y^*(\varrho, \Theta) + R_y(\Theta) \end{aligned}$$

Wiener has shown*) that

$$(8.07) \quad \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \Theta}{n} y_n$$

represents an arbitrary Brownian motion $\chi(\alpha, \Theta)$, and thus

$$(8.08) \quad F_y^*\left(\varrho, \frac{2\lambda}{\nu}\right) \quad (\lambda = 0, 1, \dots, \tfrac{1}{2}\nu - 1)$$

represent independent Gaussian distributions

$$(8.09) \quad \sqrt{\nu} \left(\chi\left(\alpha, \frac{2\lambda+1}{\nu}\right) - \chi\left(\alpha, \frac{2\lambda-1}{\nu}\right) \right),$$

whose modulus is independent of ν . Also

$$\begin{aligned} (8.10) \quad \text{Average} \max_{0 \leq \Theta \leq 2\pi} |F_y^*(\varrho, \Theta)| &\geq \text{Average} \max_{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\nu - 1} \left| F_y^*\left(\varrho, \frac{2\lambda}{\nu}\right) \right| \\ &= \int_0^1 \sqrt{\nu} \max_{0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\nu - 1} \left| \chi\left(\alpha, \frac{2\lambda+1}{\nu}\right) - \chi\left(\alpha, \frac{2\lambda-1}{\nu}\right) \right| d\alpha. \end{aligned}$$

*) Wiener (2).

The last integral may be evaluated by means of (2.01), and exceeds a fixed multiple of $\sqrt{\log v}$. It follows that

$$(8.11) \quad \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |F_y^*(\varrho, \theta)| \geq B \sqrt{\log \left(\frac{1}{1-\varrho} \right)}.$$

Insuring now to $R_y(\theta)$, we observe that, since

$$(8.12) \quad \text{Average} \int_0^{2\pi} R_y^2(\theta) d\theta = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

we have

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \sqrt{v} \sum_{[k\nu]+1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{v} \cos n \theta}{n} \bar{q}^n y_n \right| \\ = O \left\{ k^{-1/2} \sqrt{\log \left(\frac{1}{1-\bar{q}} \right)} \right\}, \end{aligned}$$

$\bar{q}$ being a number which remains to be chosen. Also since

$$(8.14) \quad \text{Average} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sqrt{v} \sum_{[k\nu]+1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{v} \cos n \theta}{n} r^{1/2} y_n \right\} \right]^2 d\theta = O\left(\frac{v}{(1-r)}\right),$$

it follows that

$$(8.15) \quad \begin{aligned} \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sqrt{v} \sum_{[k\nu]+1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{v} \cos n \theta}{n} r^n y_n \right\} \right| \\ = O \left(\frac{v \log \left(\frac{1}{1-r} \right)}{1-r} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Integrating the result (8.15) from $r = \bar{q}$ to $r = 1$, we get

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \sqrt{v} \sum_{[k\nu]+1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{v} \cos n \theta}{n} (1 - \bar{q}^n) y_n \right| \\ = O \left\{ v (1 - \bar{q}) \log \left(\frac{1}{1-\bar{q}} \right) \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

If we now choose $\bar{q}$ so that $k v (1 - \bar{q}) = 1$, then, combining (8.13) and (8.16), we have

$$(8.17) \quad \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \sqrt{v} \sum_{[k\nu]+1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{v} \cos n \theta}{n} y_n \right| = O \left(\frac{\log(k\nu)}{k} \right)^{1/2}.$$

Finally by choosing k sufficiently large, and combining (8.11) with (8.17), we obtain the desired result

$$(8.18) \quad \text{Average Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |F_y^{(\nu)}(\varrho, \theta)| \geq \frac{1}{2} B \sqrt{\log \left(\frac{1}{1-\bar{q}} \right)}.$$

It is not difficult to combine functions of the form $F_y^{(\nu)}$ so as to form a function $F_y(r, \theta)$ for which

$$(8.19) \quad \text{Max}_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |F_y(r, \theta)| = O \left\{ \varepsilon (1-r) \sqrt{\log \left(\frac{1}{1-r} \right)} \right\},$$

for almost all y , $\varepsilon(1-r)$ being an arbitrary function which tends to zero with $1-r$.

Suppose that $\vartheta_n(m)$ denote a set of functions for which

$$(8.20) \quad \sum_{m=1}^N \vartheta_n^2(m) = 1;$$

$$(8.21) \quad \sum_{m=1}^N \vartheta_n(m) \vartheta_{n'}(m) = 0.$$

We may show, by means of the argument already given, that, if $y_1, y_2, \dots, y_N$ denote independent Gaussian distributions of modulus 1, then

$$(8.22) \quad \text{Average} \max_{1 \leq m \leq N} \left| \sum_{n=1}^N \vartheta_n(m) y_n \right| \geq B \sqrt{N \log N},$$

where B is an absolute constant.

A further property of $\chi(\alpha, t)$, which has attracted the attention of Perrin as an experimentally observable fact, is that for almost all values of α , it nowhere possesses a derivative with respect to t . We shall in fact prove the more comprehensive.

Theorem VII. *The values of α for which there exists at such that*

$$(9.01) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\chi(\alpha, t + \varepsilon) - \chi(\alpha, t)) / \varepsilon^\lambda < \infty \quad [\lambda > \frac{1}{2}]$$

form a set of zero measure.

To prove this, let us subdivide the interval $(0, 1)$ binarily. If $(m2^{-q}, (m+1)2^{-q})$ is a subdivision of the q^{th} order, its middle point will be $(2m+1)2^{-q-1}$, and the differential determining the distribution of the pair of quantities $\chi(\alpha, (2m+1)2^{-q-1}) - \chi(\alpha, m2^{-q}) = u_1$, and $\chi(\alpha, (m+1)2^{-q}) - \chi(\alpha, (2m+1)2^{-q-1}) = u_2$, will be

$$(9.02) \quad \frac{1}{\pi 2^{-q-1}} \exp. \left(-\frac{u_1^2 + u_2^2}{2^{-q-1}} \right) du_1 du_2.$$

If we put $u_1 + u_2 = u$, this becomes

$$(9.03) \quad \frac{1}{\pi 2^{-q-1}} \exp. \left(-\frac{u_1^2 + (u - u_1)^2}{2^{-q-1}} \right) du, du \\ = \frac{1}{\pi 2^{-q-1}} \exp. \frac{-\left(u_1 - \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{4}}{2^{-q-1}} du_1 du.$$

From this we may readily conclude that the probability that either u_1 or u_2 is less than A_q in modulus does not exceed

$$(9.04) \quad \frac{4}{\sqrt{\pi 2^{-q-2}}} \int_{-A}^A e^{-\frac{u^2}{2^{-q-2}}} du \leq \frac{16}{\sqrt{\pi}} A 2^{q/2}.$$

The probability that of the 2^{q+1} quantities $|\chi(\alpha, (\mu+1)2^{-q-1}) - \chi(\alpha, \mu 2^{-q-1})|$, at least N_q do not exceed A_q , whatever the distribution

of the 2^q analogous quantities of the proceeding series, thus does not exceed

$$(9.05) \quad \sum_{v=N}^{2^{q+1}} \frac{(2^{q+1})!}{v! (2^{q+1}-v)!} \left(1 - \frac{16}{\sqrt{\pi}} A 2^{q/2}\right)^{2^{q+1}-v} \left(\frac{16}{\sqrt{\pi}} A 2^{q/2}\right)^v$$

$$< \frac{\int_0^\infty \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{\pi}}}{N - \frac{16}{\sqrt{\pi}} A 2^{\frac{3}{2}q} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{\sqrt{\pi}} A 2^{\frac{3}{2}q} + 1}}$$

Let us now put

$$(9.06) \quad A_q = 2^{-\lambda q} a, \quad N_q = \frac{16}{\sqrt{\pi}} 2^q \left(\frac{3}{2} - \mu\right) \quad [0 \leq \mu < \lambda]$$

Then the dominant expression in (9.05) becomes:

$$(9.07) \quad \int_{(2^{(\lambda-\mu)q-2a})_2}^\infty \frac{e^{-u^2} du}{\sqrt{\pi}} = T_q$$

and we have

$$(9.08) \quad \sum_1^\infty T_q < \infty.$$

Thus it is infinitely improbable that more than a finite number of q 's can be found for which at least N_q of the 2^{q+1} quantities $|\chi(\alpha, (\mu+1)2^{-q-1}) - \chi(\alpha, \mu 2^{-q-1})|$ do not exceed A_q , N_q and A_q being defined as in (9.06). On the other hand, the probability that the N_q intervals of the q^{th} stage have any point in common for all values of q from $Q_1 + 1$ to Q_2 , does not exceed

$$(9.09) \quad 2^{Q_2+1} \prod_{Q_1+1}^{Q_2} \frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{2^q \left(\frac{3}{2} - \mu\right)}{2^{q+1}} \leq C_1 C_2 2^{\left(\frac{1}{2} - \mu\right) Q_2^2}$$

where C_1 and C_2 are constants. If $\mu > \frac{1}{2}$, this tends to 0 as $Q_2 \rightarrow \infty$. Thus it is infinitely improbable that there is any point common to S_q for all q 's from some stage on, S_q consisting of all the points in the N_q intervals of the q^{th} stage for which

$$(9.10) \quad |\chi(\alpha, (\mu+1)2^{-q-1}) - \chi(\alpha, \mu 2^{-q-1})| \leq 2^{-\lambda q} a.$$

It is thus, infinitely improbable that there exist any point common to an infinite sequence of intervals satisfying (9.10), and *a fortiori* infinitely improbable that any point lie in intervals of the binary subdivision, all of which from some stage on satisfy (9.10). This is in the first instance true for one value of a , but since the sum of a denumerable number of sets of zero measure is itself of zero measure, we may extend it to the

case in which (9.10) is supposed to hold for *any* value of a . From this, Theorem VII follows at once.

We have already noted that if $\lambda < \frac{1}{2}$, then except for a set of cases of zero probability,

$$(9.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\chi(\alpha, t + \varepsilon) - \chi(\alpha, t))/\varepsilon^\lambda = 0$$

uniformly for all values of t .

This was proved in W_1 for the case $\lambda = 1/4$, and the methods are substantially unchanged. The study of precisely what happens in the case $\lambda = \frac{1}{2}$ demands the use of more refined methods, and is not treated here.

Bibliography

E. Borel (1): Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. di Palermo 27 (1904), p. 247—271.

Borel (2): The book of the opening of the Rice Institute. Houston (Texas) 1917.

R. E. A. C. Paley and A. Zygmund (1), (2), (3): On some series of functions (1), (2), Proc. Camb. Phil. Soc. 26 (1930), p. 337—357, 458—474, (3) to appear soon.

E. Perrin (1): Les atomes, 4^e éd. Paris, 1914.

Perrin (2): Brownian movement and molecular reality. Tr. by F. Soddy, London, 1910.

H. Rademacher (1): Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonal-funktionen. Math. Annalen 87 (1922), S. 112—138.

N. Wiener (1): Generalized harmonic analysis, Acta Mathematica 55 (1930), p. 117—258.

Wiener (2): Differential-space. Journal of Mathematics and Physics 2 (1923), p. 131—174.

A. Zygmund (1): On the convergence of lacunary trigonometric series, Fundamenta Math. 16, (1930), p. 90—107.

(Eingegangen am 24. April 1932.)

Note on a theorem of Kolmogoroff and Menchoff.

By

R. E. A. C. Paley †.

1. In a recent paper¹⁾ Kolmogoroff and Menchoff prove the following theorems.

Theorem I. *There exists a system of functions $\varphi_n(x)$, orthogonal over the interval $(0, 1)$, taking only the values ± 1 on the interval, and a sequence of real constants a_n such that the series $\sum a_n^2$ converges while the series*

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

diverges everywhere.

Theorem II. *Given any positive function $W(n)$, satisfying the condition $W(n) = o(\log n)$, we can construct a system of functions $\varphi_n(x)$, orthogonal in $(0, 1)$, and taking only the values ± 1 , and a sequence of real constants a_n , such that the series diverges everywhere, while the series $\sum W(n) a_n^2$ converges.*

Clearly Theorem I is an immediate consequence of Theorem II. The latter theorem is shown to be a fairly straightforward consequence of the following lemma.

Lemma 1. *Given any positive number n , there exists a sum*

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

with the following properties:

I. *The functions $\varphi_k(x)$ are orthogonal over the interval $(0, 1)$, and take only the values ± 1 .*

$$\text{II.} \quad \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1.$$

¹⁾ A. Kolmogoroff and D. Menchoff, "Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales", Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 432—441.

III. *There exists, for each point of a set E of measure equal to $\frac{1}{2}$, a number $p \leq n$, such that*

$$\sum_{k=1}^p a_k \varphi_k(x) \geq C \sqrt{\log n} \quad (x \in E),$$

C being an absolute positive constant.

In exactly the same way Theorem I is a consequence of the following less stringent lemma, of which the proof is considerably simpler than that of Lemma 1. It seems however unlikely that the method used can be adopted at all easily to prove the stronger result of Theorem II.

Lemma 2. *Given any positive number n , there exists a sum*

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

with the properties I and II of Lemma 1, and also the property:

IIIa. *There exist, for each point of a set E of measure equal to $\frac{1}{3}$, numbers p_1, p_2 satisfying $1 \leq p_1 < p_2 \leq n$, such that*

$$\sum_{k=p_1}^{p_2} a_k \varphi_k(x) \geq G(n) \quad (x \in E),$$

where $G(n)$ is infinite with n .

2. We use the following lemma, of which the proof is almost identical with that of a known theorem²).

Lemma 3. *Let N be a given number. We can find a prime $\tilde{\omega} \equiv 1 \pmod{4}$, and an integer $h \leq \tilde{\omega}$, such that, if $\chi(n)$ denotes the real primitive Dirichlet's character to modulus $\tilde{\omega}$, then*

$$\left| \sum_{m=1}^h \chi(m) \right| \geq N \sqrt{\tilde{\omega}}.$$

We modify the proof of the lemma of the paper quoted by choosing $x \geq Ce^N$, where C is an appropriate positive constant, and by choosing k_0 to be a positive prime satisfying the original congruences, but no longer restricted to be between 1 and $T+1$. The rest of the proof is similar.

Let $\chi(n)$ be the particular character defined by means of Lemma 3. We write $G = 2\tilde{\omega} + 2$ and define the functions φ as follows.

$$\varphi_{2k+1}(x) = \varphi_{2k+2}(x) = \chi(n-k)$$

$$\left(\frac{2n}{G} \leq x < \frac{2n+1}{G}, k = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1, n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1, n \neq k \right),$$

²) R. E. A. C. Paley, "A theorem on characters", Journal London Math. Soc. 7 (1932), 28-32.

$$\varphi_{2k+1}(x) = -\varphi_{2k+2}(x) = \chi(n-k)$$

$$\left(\frac{2n+1}{G} \leq x < \frac{2n+2}{G}, k=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1, n=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1, n \neq k\right),$$

$$\varphi_{2k+1}(x) = -\varphi_{2k+2}(x) = +1$$

$$\left(\frac{2k}{G} \leq x < \frac{2k+1}{G}, k=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1\right),$$

$$\varphi_{2k+1}(x) = \varphi_{2k+2}(x) = -1$$

$$\left(\frac{2k+1}{G} \leq x < \frac{2k}{G}, k=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1\right),$$

$$\varphi_{2k+1}(x) = \varphi_{2k+2}(x) = +1$$

$$\left(\frac{2\tilde{\omega}}{G} \leq x < \frac{2\tilde{\omega}+1}{G}, k=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1\right),$$

$$\varphi_{2k+1}(x) = -\varphi_{2k+2}(x) = +1$$

$$\left(\frac{2\tilde{\omega}+1}{G} \leq x \leq 1, k=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1\right),$$

$$\varphi_{2\tilde{\omega}+1}(x) = +1 \quad \left(0 \leq x < \frac{2\tilde{\omega}+1}{G}\right),$$

$$\varphi_{2\tilde{\omega}+1}(x) = -1 \quad \left(\frac{2\tilde{\omega}+1}{G} \leq x \leq 1\right),$$

$$\varphi_{2\tilde{\omega}+2}(x) = +1 \quad \left(\frac{2n}{G} \leq x < \frac{2n+1}{G}, n=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1\right),$$

$$\varphi_{2\tilde{\omega}+2}(x) = -1$$

$$\left(\frac{2n+1}{G} \leq x < \frac{2n+2}{G}, n=0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1, \frac{2\tilde{\omega}}{G} \leq x \leq 1\right).$$

Finally we take $a_k = 1/\sqrt{G}$, ($k = 1, 2, \dots, G$).

3. To prove that the functions φ so defined are orthogonal is not difficult. First we observe that, if $k \neq l$, $k \neq \tilde{\omega}$, $l \neq \tilde{\omega}$, then

$$\int_0^1 \varphi_{2k+1}(x) \varphi_{2l+2}(x) dx = \int_{\frac{2k}{G}}^{\frac{2k+2}{G}} + \int_{\frac{2l}{G}}^{\frac{2l+2}{G}} = \frac{2}{G} \chi(k-l) - \frac{2}{G} \chi(l-k),$$

and vanishes, since [in virtue of $\tilde{\omega} \equiv 1 \pmod{4}$] $\chi(k-l) = \chi(l-k)$. It may be verified quite simply that, if either $k = l$ or $k = \tilde{\omega}$ or $l = \tilde{\omega}$

$$(2) \quad \int_0^1 \varphi_{2k+1}(x) \varphi_{2l+2}(x) dx = 0,$$

and thus (2) is satisfied generally.

Suppose again that $k \neq l$, $k \neq \tilde{\omega}$, $l \neq \tilde{\omega}$. Then

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{2k+1}(x) \varphi_{2l+1}(x) dx &= \int_{\frac{2k}{G}}^{\frac{2k+2}{G}} + \int_{\frac{2l}{G}}^{\frac{2l+2}{G}} + \int_{\frac{2\tilde{\omega}}{G}}^1 + \frac{2}{G} \sum_{n=1}^{\tilde{\omega}} \chi(n-k) \chi(n-l) \\ &= 0 + 0 + \frac{2}{G} \left(1 + \sum_{n=1}^{\tilde{\omega}} \chi(n-k) \chi(n-l) \right). \end{aligned}$$

The expression

$$1 + \sum_{n=1}^{\tilde{\omega}} \chi(n-k) \chi(n-l)$$

is known³⁾ to vanish for $k \equiv l \pmod{\tilde{\omega}}$, and thus, for $k \neq l$, $k \neq \tilde{\omega}$, $l \neq \tilde{\omega}$, we have

$$(3) \quad \int_0^1 \varphi_{2k+1}(x) \varphi_{2l+1}(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \varphi_{2k+2}(x) \varphi_{2l+2}(x) dx = 0.$$

It may easily be verified that (3) is satisfied in the case when either k or l is $\tilde{\omega}$, and thus the functions φ have been shown to be orthogonal.

Finally we observe that, if h is the number of Lemma 3, then either

$$\left| \sum_{k=1+2n}^{2h+2n} a_k \varphi_k(x) \right| \geq \frac{2}{\sqrt{G}} \sqrt{\tilde{\omega}} N,$$

or

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{2h+2n-2\tilde{\omega}} + \sum_{k=1+2n}^{2\tilde{\omega}} a_k \varphi_k(x) \right| &\geq \frac{2}{\sqrt{G}} \sqrt{\tilde{\omega}} N \\ \left(\frac{2n}{G} \leq x < \frac{2n+1}{G}, n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega}-1 \right), \end{aligned}$$

so that, in a set of measure $\tilde{\omega}/(2\tilde{\omega}+2) \geq \frac{1}{3}$, we have, by appropriate choice of p_1, p_2 ,

$$\sum_{k=p_1}^{p_2} a_k \varphi_k(x) \geq \frac{\sqrt{\tilde{\omega}}}{\sqrt{G}} N > \frac{1}{3} N,$$

and Lemma 3 follows at once.

³⁾ The result has been proved, but not yet published, by Mr. H. Davenport.

4. By modifying the proof of Lemma 3 (quite considerably), we may prove that lemma with $\tilde{\omega} \equiv 3 \pmod{4}$, and in this case the construction of the functions φ is considerably simpler. We may put $G = \tilde{\omega} + 1$, and

$$\varphi_{k+1}(x) = \chi(n - k)$$

$$\left(\frac{n}{G} \leq x < \frac{n+1}{G}, k = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1; n = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1, n \neq k\right),$$

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 \quad \left(\frac{k}{G} \leq x < \frac{k+1}{G}, \frac{\tilde{\omega}}{G} \leq x \leq 1, k = 0, 1, \dots, \tilde{\omega} - 1\right),$$

$$\varphi_{\tilde{\omega}+1}(x) = 1 \quad \left(0 \leq x < \frac{\omega}{G}\right),$$

$$\varphi_{\tilde{\omega}+1}(x) = -1 \quad \left(\frac{\omega}{G} \leq x \leq 1\right).$$

(Eingegangen am 28. Juli 1932.)

Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten.

Von

G. Szegő in Königsberg i. Pr.

In einem Briefe vom 12. Januar 1930 hat mir Herr H. Lewy die folgende, von ihm und Herrn K. Friedrichs ausgesprochene Vermutung mitgeteilt:

I. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\gamma)(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\beta)} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} A_{pqr} \alpha^p \beta^q \gamma^r$$

sind sämtlich positiv.

Im folgenden soll diese Vermutung bestätigt werden. Nach gewissen vorbereitenden Hilfssätzen über Besselsche Funktionen (§ 1) zeigen wir in § 2 sehr schnell, daß die fraglichen Koeffizienten nichtnegativ sind. Der Beweis der Positivität erfordert eine etwas genauere Analyse. Die angewendeten Hilfsmittel stehen allerdings in keinem Verhältnis zu der Einfachheit des Satzes. Weiter folgen in § 3 einige Verallgemeinerungen von Satz I und in § 4 verschiedene andere Formulierungen dieser Ergebnisse, welche vom Standpunkt der Integralrechnung und der Algebra nicht ohne Interesse sein dürften.

In einem Anhang diskutieren wir das „Gibbssche Phänomen“ für die sogenannten Sonineschen Integrale (vgl. § 1).

§ 1.

Hilfssätze über Besselsche Funktionen.

Zum Beweis von Satz I benutzen wir in der Hauptsache drei Formeln aus der Theorie der Besselschen Funktionen.

1. Eine Formel von Weber¹⁾: Es seien h und a positiv. Dann ist

$$W(h, a) = \int_0^{\infty} e^{-h\omega} J_0(2\sqrt{a\omega}) d\omega = \frac{1}{h} e^{-\frac{a}{h}}.$$

Diese Formel gilt offenbar auch für komplexe h mit $\Re h > 0$.

2. Eine Formel von Sonine²⁾: Es seien a, b, c positive Zahlen. Dann wird

$$S(a, b, c) = \int_0^{\infty} J_0(a\sqrt{t}) J_0(b\sqrt{t}) J_0(c\sqrt{t}) dt = \frac{1}{\pi \Delta} \text{ bzw. } 0,$$

je nachdem ob es ein Dreieck mit den Seiten a, b, c gibt oder nicht; im ersten Falle bezeichnet Δ den Flächeninhalt dieses Dreiecks³⁾.

3. Das Additionstheorem⁴⁾: Es gilt für alle Werte von x und y

$$J_0(x) J_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) d\varphi.$$

Weiter sei die wohlbekannte asymptotische Formel [vgl. ¹⁵⁾]

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

angeführt.

Zu den Verallgemeinerungen in § 3 braucht man freilich weitergehende Hilfsmittel, namentlich gewisse Verallgemeinerungen von 1. bis 3., die in § 3 an der nötigen Stelle angeführt sind.

§ 2.

Beweis von Satz 1.

Es seien α, β, γ beliebige komplexe Zahlen, deren reeller Teil kleiner als 1 ist. Für $t > 0$ folgt dann aus der Weberschen Formel

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega_1(1-\alpha) - \omega_2(1-\beta) - \omega_3(1-\gamma)} J_0(2\sqrt{\omega_1 t}) J_0(2\sqrt{\omega_2 t}) J_0(2\sqrt{\omega_3 t}) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ (1) \quad &= \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} e^{-t\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}\right)}. \end{aligned}$$

Durch Integration von $t = 0$ bis $t = +\infty$, Vertauschung der Reihenfolge der Integration und Berücksichtigung der Sonineschen Formel geht hieraus

¹⁾ Man vgl. G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions (Cambridge, University press, 1922), im folgenden mit „W.“ zitiert; S. 393, (1).

²⁾ Man vgl. W., S. 411, (3).

³⁾ Ist das Dreieck entartet, d. h. $\Delta = 0$, so ist das Integral eigentlich divergent mit dem Werte $+\infty$.

⁴⁾ Man vgl. W., S. 358 ff.

die Behauptung unmittelbar hervor. Unsere Aufgabe besteht darin, diese „formale“ Überlegung zu präzisieren.

1. Mit ε bezeichnen wir eine beliebige positive Zahl. Durch Multiplikation mit $e^{-\varepsilon t}$ und durch Integration in dem Intervall $0 \leq t < \infty$ folgt dann aus (1)

$$(2) \quad \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\omega_1(1-\alpha) - \omega_2(1-\beta) - \omega_3(1-\gamma)} \left\{ \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_0(2\sqrt{\omega_1}t) J_0(2\sqrt{\omega_2}t) J_0(2\sqrt{\omega_3}t) dt \right\} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(1-\beta)(1-\gamma) + (1-\gamma)(1-\alpha) + (1-\alpha)(1-\beta) + \varepsilon(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

so daß die fraglichen Entwicklungskoeffizienten die folgende Darstellung zulassen:

$$(3) \quad A_{pqr} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \frac{\omega_1^p}{p!} \frac{\omega_2^q}{q!} \frac{\omega_3^r}{r!} \left\{ \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_0(2\sqrt{\omega_1}t) J_0(2\sqrt{\omega_2}t) J_0(2\sqrt{\omega_3}t) dt \right\} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 + ((\varepsilon)),$$

wobei der Rest $((\varepsilon))$ von p, q, r abhängt und für $\varepsilon \rightarrow +0$ gegen Null konvergiert.

2. Es seien a, b, c positive Zahlen. Das Integral

$$(4) \quad S(\varepsilon; a, b, c) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} J_0(a\sqrt{t}) J_0(b\sqrt{t}) J_0(c\sqrt{t}) dt$$

konvergiert für $\varepsilon \rightarrow +0$ gegen das Soninesche Integral $S(0; a, b, c) = S(a, b, c)$. Wir zeigen (und zwar ohne Benutzung der Sonineschen Formel), daß für alle positiven Werte von ε, a, b, c die Ungleichung

$$(5) \quad S(\varepsilon; a, b, c) > 0$$

besteht. Wir gehen dazu in gewohnter Weise ⁵⁾ von dem Additionstheorem aus, dessen zweimalige Anwendung die Formel

$$(6) \quad J_0(x) J_0(y) J_0(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi J_0(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy \cos \varphi - 2z \cos \psi \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) d\varphi d\psi$$

liefert. Sie gilt für alle Werte von x, y, z . Setzt man hier

$$x = a\sqrt{t}, \quad y = b\sqrt{t}, \quad z = c\sqrt{t}$$

⁵⁾ Ähnlich berechnet man in vielen Fällen Integrale, in denen das Produkt von mehreren Besselschen Funktionen gleicher Ordnung auftritt. Vgl. § 3.

und wendet wieder die Webersche Formel an, so ergibt sich die Behauptung unmittelbar.

3. Die Ungleichung (5) liefert schon unseren Satz in der etwas weniger scharfen Form, daß die Koeffizienten $A_{p,q,r}$ sämtlich *nichtnegativ* sind. Um auch ihre Positivität nachzuweisen, bestimmen wir zunächst einen Punkt (a_0, b_0, c_0) des (a, b, c) -Raumes, für welchen $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $c_0 > 0$ gilt und die drei Zahlen

$$-a_0 + b_0 + c_0, \quad a_0 - b_0 + c_0, \quad a_0 + b_0 - c_0$$

positiv sind. In den Punkten (a, b, c) einer genügend kleinen Vollkugel K um (a_0, b_0, c_0) als Mittelpunkt liegen dann die sechs Zahlen

$$a, b, c,$$

$$-a + b + c, \quad a - b + c, \quad a + b - c$$

oberhalb einer positiven Schranke. Wir behaupten, daß das Soninesche Integral für die Punkte (a, b, c) aus K *gleichmäßig* konvergiert. In der Tat erhält man durch Anwendung der in § 1 angeführten asymptotischen Formel von $J_0(x)$

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty J_0(a\sqrt{t}) J_0(b\sqrt{t}) J_0(c\sqrt{t}) dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{abc}} \int_1^\infty \frac{\cos\left(a\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(b\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(c\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right)}{t^{3/4}} dt + ((a, b, c)), \end{aligned}$$

wobei der Rest ein in K gleichmäßig konvergentes Integral ist. Nun kann der Zähler in dem Integral auf der rechten Seite nach Multiplikation mit 4 in der Form

$$\begin{aligned} & \cos\left\{(-a + b + c)\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right\} + \cos\left\{(a - b + c)\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right\} \\ & + \cos\left\{(a + b - c)\sqrt{t} - \frac{\pi}{4}\right\} + \cos\left\{(a + b + c)\sqrt{t} - \frac{3\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Die Faktoren von $\sqrt{t}$ liegen hier oberhalb einer festen positiven Zahl, woraus die Behauptung hervorgeht. Diese hat aber zur Folge, daß auch der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S(\varepsilon; a, b, c) = S(a, b, c)$$

in der Vollkugel K gleichmäßig existiert. Infolge der Sonineschen Formel bleibt ferner $S(a, b, c)$ in K oberhalb einer festen positiven Zahl. Dasselbe gilt also für $S(\varepsilon; a, b, c)$ für hinreichend kleine ε und für alle (a, b, c) aus K . Zerlegt man jetzt den Integrationsbereich von (3) in zwei Teilbereiche, je nachdem ob der Punkt $a = 2\sqrt{\omega_1}$, $b = 2\sqrt{\omega_2}$, $c = 2\sqrt{\omega_3}$ der Vollkugel K angehört oder nicht, so liefert der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow +0$ einen bestimmt

positiven und einen nichtnegativen Summanden, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Man beachte, daß der explizite Wert des Sonineschen Integrals bei diesem Beweise nirgends benutzt worden ist. Nur die gleichmäßige Konvergenz desselben in einem gewissen Gebiete, sowie die Tatsache, daß es daselbst positiv ausfällt, war von Bedeutung.

§ 3.

Verallgemeinerungen.

1. Die nächstliegende Verallgemeinerung des eben bewiesenen Satzes ist die folgende:

II. Es sei

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{f'(1)} = \sum A_{q_1 q_2 \dots q_n} \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_n^{q_n} \quad (q_1, q_2, \dots, q_n = 0, 1, 2, \dots)$$

sind sämtlich positiv.

Für $n = 3$ geht dieser Satz in den obigen über. Für $n = 2$ ist er trivial. Statt $f'(1)$ kann natürlich auch $f'(x)$ mit $x > 0$ genommen werden.

Es sei $n > 3$. Wir setzen wieder für $\Re \alpha_k < 1$, $t > 0$,

$$(1) \quad \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_n \left\{ \prod_{k=1}^n e^{-\omega_k(1-\alpha_k)} J_0(2\sqrt{\omega_k t}) \right\} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n = \frac{1}{f'(1)} e^{-t \frac{f'(n)}{f'(1)}},$$

woraus nach Multiplikation mit $e^{-\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$, und Integration

$$(2) \quad \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_n \left\{ \prod_{k=1}^n e^{-\omega_k(1-\alpha_k)} \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} \prod_{k=1}^n J_0(2\sqrt{\omega_k t}) dt \right\} d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n \\ = \frac{1}{f'(1) + \varepsilon f(1)}$$

folgt. Die Positivität des Integrals nach t kann man auf Grund des Additionstheorems ähnlich beweisen wie im Falle $n = 3$. Ferner genügt es wieder nachzuweisen, daß das Integral

$$(3) \quad S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_0^\infty \prod_{k=1}^n J_0(a_k \sqrt{t}) dt$$

in einem gewissen Gebiete des Raumes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) gleichmäßig konvergiert und positiv ist.

Man hat, wenn x positiv ist, $|J_0(x)| < Ax^{-1/2}$, wo $A > 0$ eine absolute Konstante bedeutet. Der Integrand in (2) besitzt somit die Majorante

$$\left(2^{-\frac{1}{2}}A\right)^n t^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n e^{-\omega_k(1-\Re\alpha_k)} \omega_k^{-\frac{1}{4}},$$

so daß (2) im Falle $n > 4$ für $\varepsilon \geq 0$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wählt man nun für die α_k reelle Zahlen, $\alpha_k < 1$, so folgt aus (2) für $\varepsilon = 0$, da das Integral nach t nach der obigen Überlegung stets nichtnegativ ist, daß das obige Integral (3) für $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) eine stetige, nichtnegative und nicht identisch verschwindende Funktion darstellt. Damit ist der Fall $n > 4$ erledigt.

Für $n = 4$ kann das Integral (3) analog behandelt werden wie für $n = 3$. Es ist hierbei eine der Sonineschen analoge Formel für $S(a_1, a_2, a_3, a_4)$ zu benutzen, die von J. W. Nicholson herrührt⁶⁾. Sie besagt, daß das fragliche Integral den Wert Null hat, wenn man aus den positiven Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 kein Viereck bilden kann, während es im entgegengesetzten Falle bestimmt positiv ist. Diese „Vierecksbedingung“ bedeutet, daß die vier Zahlen

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2a_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

positiv sind. Der von Nicholson herrührende explizite Ausdruck des Integrals wird auch in diesem Falle nicht benutzt.

Wir sehen, daß die wesentliche Schwierigkeit in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ liegt.

2. Eine weitere Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse beruht auf der Weberschen Formel⁷⁾

$$(4) \quad W_\nu(h, a) = \int_0^\infty e^{-h\omega} \omega^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{a\omega}) d\omega = \frac{a^{\nu/2}}{h^{\nu+1}} e^{-a/h},$$

$$(a > 0, \Re h > 0; \nu > -1),$$

die für $\nu = 0$ in die Formel § 1, 1. übergeht. (Unter $h^{\nu+1}$ ist bei komplexem h der Hauptwert zu verstehen.) Man erhält hieraus, wie oben, wenn $\Re\alpha_k < 1$, $t > 0$ ist,

$$(5) \quad \underbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}_{n} \prod_{k=1}^n e^{-\omega_k(1-\alpha_k)} \omega_k^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{\omega_k t}) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n$$

$$= \frac{t^{\frac{\nu n}{2}}}{\{f(1)\}^{\nu+1}} e^{-t \frac{f'(1)}{f(1)}}.$$

⁶⁾ Man vgl. W., S. 413–414, (8), (9).

⁷⁾ W., S. 394, (4).

Durch Multiplikation mit $e^{-\varepsilon t} t^{\varrho-1}$ und Integration von $t = 0$ bis $t = +\infty$ folgt auf der rechten Seite

$$(6) \quad \frac{\Gamma\left(\varrho + \frac{\nu n}{2}\right)}{\{f'(1)\}^{\nu+1} \left\{\frac{f'(1)}{f(1)} + \varepsilon\right\}^{\varrho + \frac{\nu n}{2}}}.$$

Dabei ist $\varepsilon > 0$, $\varrho + \frac{\nu n}{2} > 0$ vorauszusetzen. Andererseits zeigen wir, zumindest für $\nu > -\frac{1}{2}$,

$$(7) \quad \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} t^{\varrho-1} \prod_{k=1}^n J_\nu(2\sqrt{\omega_k t}) dt > 0, \quad (\omega_k > 0).$$

Man benutzt dazu am einfachsten die folgende, von Sonine und anderen⁸⁾ herrührende Erweiterung des Additionstheorems. Es gilt für $\nu > -\frac{1}{2}$

$$(8) \quad \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \frac{J_\nu(y)}{y^\nu} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{J_\nu(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi})}{(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi})^\nu} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi.$$

Hieraus folgt (7) analog wie in § 2 durch sukzessive Zusammenfassung von je zwei Faktoren J_ν und Ersetzen des Produktes durch das Integral (8). Man führt damit schließlich die Behauptung auf die folgende zurück:

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} t^{\varrho + \frac{\nu(n-1)}{2} - 1} J_\nu(2\sqrt{\omega t}) dt > 0, \quad (\omega > 0),$$

was nach der Weberschen Formel (4) richtig ist, sofern ϱ gemäß der Bedingung

$$\varrho + \frac{\nu(n-1)}{2} - 1 = \frac{\nu}{2}, \quad \text{d. h.} \quad \varrho + \frac{\nu n}{2} = \nu + 1$$

gewählt wird. Man zeigt weiter, wie oben (1), daß das Integral (7) für $\varepsilon = 0$ absolut konvergiert, wenn nur

$$-\frac{n}{4} + \varrho - 1 < -1, \quad \text{d. h.} \quad n > 4 \frac{\nu+1}{2\nu+1}$$

gilt.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen, der (abgesehen von der etwas weniger besagenden „Nichtnegativität“ statt „Positivität“) die Sätze I und II verallgemeinert:

III. Es sei $\nu \geq -\frac{1}{2}$ und $f(x)$ habe dieselbe Bedeutung wie in Satz II. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{\{f'(1)\}^{\nu+1}} = \sum A_{q_1 q_2 \dots q_n}^{(\nu)} \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_n^{q_n}, \quad (q_1, q_2, \dots, q_n = 0, 1, 2, \dots)$$

⁸⁾ Man vgl. W., S. 367, (16).

sind sämtlich nichtnegativ; für $n > 4 \frac{\nu+1}{2\nu+1}$, $\nu > -\frac{1}{2}$, sind sie sogar sämtlich positiv.

Die Frage der Positivität dieser Koeffizienten wollen wir hier nicht weiter verfolgen. In § 4 zeigen wir, daß die untere Grenze der ν -Werte, für welche dieser Satz richtig ist, zwischen $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{4}$ liegen muß.

§ 4.

Bemerkungen.

1. Eine andere Formulierung der obigen Resultate ist die folgende:

IV. Es sei $f(x)$ ein Polynom n -ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, $\nu \geq -\frac{1}{2}$. Die Koeffizienten der Entwicklung

$$(1) \quad \left\{ \frac{x^{n-1}}{f'(x)} \right\}^{\nu+1} = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_m}{x^m} + \dots$$

sind als homogene Formen der Wurzeln von $f(x)$ darstellbar; und zwar ist $C_m = C_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ eine homogene Form m -ten Grades in diesen Wurzeln. Die Koeffizienten dieser Formen sind sämtlich nichtnegativ; für $\nu = 0$, ferner für $n > 4 \frac{\nu+1}{2\nu+1}$, $\nu > -\frac{1}{2}$, sind sie sogar sämtlich positiv.

2. Im Falle $n = 2$ ist IV, wie (für $\nu = 0$) schon oben bemerkt, trivial. Für $n = 3$ kann die wesentlich weniger besagende Behauptung

$$(2) \quad C_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0 \quad \text{für} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$$

leicht bewiesen werden. (Dabei kann sogar $\nu > -\frac{3}{2}$ sein. Für $\nu = -1$ ist die linke Seite von (1) durch den Logarithmus des Ausdrucks in der geschweiften Klammer zu ersetzen.) In der Tat erhält man

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{x^2}{f'(x)} &= \frac{1}{(1-\alpha_2 x^{-1})(1-\alpha_3 x^{-1}) + (1-\alpha_3 x^{-1})(1-\alpha_1 x^{-1}) + (1-\alpha_1 x^{-1})(1-\alpha_2 x^{-1})} \\ &= \frac{1}{3 - 2s x^{-1} + \sigma x^{-2}}, \end{aligned}$$

wobei s und σ die folgende Bedeutung haben:

$$(4) \quad s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \sigma = \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

Wir benutzen nun die bekannte Entwicklung

$$(5) \quad \frac{1}{(1-2u\xi+\xi^2)^\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^{(\lambda)}(u) \xi^m,$$

deren Koeffizienten $P_m^{(\lambda)}(u)$ die sogenannten ultrasphärischen Polynome sind⁹⁾. Sie sind Spezialfälle der Jacobischen Polynome. Ihre Wurzeln liegen

⁹⁾ Vgl. z. B. E. T. Whittaker und G. N. Watson, A course of modern analysis, 4. Aufl. (Cambridge, University press, 1927), S. 329–330. — Für $\lambda = 0$ ist die linke Seite von (5) durch $-\log(1-2u\xi+\xi^2)$ zu ersetzen.

für $\lambda > -\frac{1}{2}$ sämtlich im Innern des reellen Intervalls $-1, +1$, und man hat

$$(6) \quad P_m^{(\lambda)}(u) > 0, \quad \text{wenn} \quad u \geq 1; \quad \lambda > -\frac{1}{2}$$

ist. Setzt man in (3):

$$(7) \quad \sqrt{\frac{\sigma}{3}} x^{-1} = \xi, \quad \sqrt{\frac{s}{3\sigma}} = u,$$

so folgt

$$(8) \quad C_m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3^{-m-\nu-1} (\sqrt{3}\sigma)^m P_m^{(\nu+1)}\left(\frac{s}{\sqrt{3}\sigma}\right).$$

Da $P_m^{(\nu+1)}(u)$ ein Polynom m -ten Grades ist, in dem nur die zu $m \bmod 2$ kongruenten Potenzen von u vorkommen, so stellt der letzte Ausdruck offensichtlich eine homogene Form m -ten Grades von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dar. Durch Berücksichtigung von (6) geht daraus (2) ohne weiteres hervor, da

$$2(s^2 - 3\sigma) = (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 > 0,$$

folglich $s > \sqrt{3}\sigma$ ist. Aus der bekannten Rekursionsformel der ultrasphärischen Polynome¹⁰⁾ folgt übrigens leicht:

$$(9) \quad C_m = \frac{2s}{3} \frac{m+\nu}{m} C_{m-1} - \frac{\sigma}{3} \frac{m+2\nu}{m} C_{m-2} \\ (C_{-1} = 0; \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

In dem zuerst behandelten Falle $\nu = 0$ erhält man die Tschebyscheffschen Polynome zweiter Art

$$(10) \quad P_m^{(1)}(u) = \frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{m+1} - (u - \sqrt{u^2 - 1})^{m+1}}{2\sqrt{u^2 - 1}} \\ = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} (2u)^{m-2k}.$$

Die Rekursion (9) nimmt jetzt die folgende einfachere Gestalt an:

$$(11) \quad 3C_m = 2sC_{m-1} - \sigma C_{m-2} \quad (C_{-1} = 0; \quad m = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

Unser Satz besagt, daß sämtliche Koeffizienten der homogenen Form n -ten Grades

$$(12) \quad \frac{(s + \sqrt{s^2 - 3\sigma})^{m+1} - (s - \sqrt{s^2 - 3\sigma})^{m+1}}{2\sqrt{s^2 - 3\sigma}} = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \binom{m-k}{k} (2s)^{m-2k} (3\sigma)^k \\ = 2^m \sum_{k=0}^{[m/2]} \left(-\frac{3}{4}\right)^k \binom{m-k}{k} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{m-2k} (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)^k$$

positiv sind. Ein direkter Beweis dieser Behauptung ist mir nicht gelungen.

¹⁰⁾ A. a. O. S. 330; die beiden ersten Formeln sind zu kombinieren.

Dem Wert $\nu = -\frac{1}{2}$ entsprechen die Legendreschen Polynome $P_m^{(1/2)}(u)$ = $P_m(u)$. Unser Satz besagt dann, daß sämtliche Koeffizienten der Form

$$(13) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (s + \cos \varphi \sqrt{s^2 - 3\sigma})^m d\varphi \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cos \varphi \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2})^m d\varphi$$

nichtnegativ sind.

Aus der Darstellung (8) schließt man leicht, daß die Sätze III und IV für $-1 < \nu < -\frac{3}{4}$ nicht richtig sein können. Es ist nämlich

$$P_3^{(\lambda)}(u) = \lambda(\lambda+1) \left\{ \frac{4}{3}(\lambda+2)u^3 - 2u \right\},$$

so daß

$$C_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3^{-\nu-4}(\nu+1)(\nu+2) \left\{ \frac{4}{3}(\nu+3)s^3 - 6s\sigma \right\}.$$

Der Koeffizient von $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ist hier

$$3^{-\nu-4}(\nu+1)(\nu+2)(8(\nu+3)-18),$$

und dies wird für $-1 < \nu < -\frac{3}{4}$ negativ.

3. Herr I. Schur machte mich auf die folgende Deutung des Spezialfalles $\nu = 0$, n beliebig, aufmerksam, die vom algebraischen Standpunkte aus nicht ohne Interesse sein dürfte. Die Koeffizienten C_m in (1) stimmen für $\nu = 0$ mit den zu der Ableitung $f'(x)$ gehörigen Wronskischen Ausdrücken¹¹⁾ überein. Der obige Satz besagt also, daß die Wronskischen Ausdrücke von $f'(x)$ als homogene Funktionen der Wurzeln von $f(x)$ lauter positive Koeffizienten besitzen.

4. Schließlich sei noch erwähnt, daß man die Koeffizienten $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ der Entwicklung in Satz II (d. h. die Koeffizienten der Formen C_m) durch die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome $L_q^{(\nu)}(t)$ ausdrücken kann. Es ist nämlich¹²⁾

$$(14) \quad (1-x)^{-\nu-1} e^{-\frac{t}{1-x}} = \sum_{q=0}^{\infty} e^{-t} L_q^{(\nu)}(t) x^q.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von § 3, (5) kann somit in der Form

$$t^{\frac{\nu n}{2}} \sum e^{-nt} L_{q_1}^{(\nu)}(t) L_{q_2}^{(\nu)}(t) \dots L_{q_n}^{(\nu)}(t) \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_n^{q_n}$$

geschrieben werden, so daß

$$(15) \quad A_{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty e^{-nt} t^\nu L_{q_1}^{(\nu)}(t) L_{q_2}^{(\nu)}(t) \dots L_{q_n}^{(\nu)}(t) dt$$

¹¹⁾ Auch „Alephfunktionen“ genannt. Vgl. Encyclopädie der math. Wiss., Bd. I, erster Teil (Leipzig, Teubner, 1898—1904). K. Th. Vahlen, Rationale Funktionen der Wurzeln; symmetrische und Affektfunktionen, S. 449—479, insb. S. 464—465.

¹²⁾ Vgl. z. B. Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, Springer, 1925), Bd. II, Abschn. VI, Aufg. 99, S. 94, S. 294, h).

wird. Diese Integrale sind folglich für $\nu \geq -\frac{1}{2}$ sämtlich nichtnegativ, für $\nu = 0$, ferner für $n > 4 \frac{\nu+1}{2\nu+1}$, $\nu > -\frac{1}{2}$, sogar sämtlich positiv.

Setzt man hier für die Laguerreschen Polynome ihren entwickelten Ausdruck¹³⁾ ein, so folgt eine explizite Darstellung der fraglichen Koeffizienten. Man erhält z. B. für $n = 3$, $\nu = 0$

$$(16) \quad \sum \binom{q_1}{m_1} \binom{q_2}{m_2} \binom{q_3}{m_3} \frac{(m_1+m_2+m_3)!}{m_1! m_2! m_3!} \left(-\frac{1}{3}\right)^{m_1+m_2+m_3} > 0$$

$$(m_k = 0, 1, 2, \dots, q_k; k = 1, 2, 3).$$

Auf Grund von § 1, (2) läßt sich übrigens leicht zeigen, daß hier $\frac{1}{3}$ durch eine beliebige positive Zahl $\leq \frac{1}{3}$ ersetzt werden kann. Es wäre interessant, einen direkten Beweis dieser Ungleichung zu geben.

Anhang.

Über das Gibbssche Phänomen bei den Sonineschen Integralen.

1. Das Gibbssche Phänomen in der Theorie der Fourierschen Reihen beruht, wie bekannt, auf den folgenden einfachen Tatsachen. Das Integral

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \varphi(a)$$

konvergiert für jeden reellen Wert von a , und es ist $\varphi(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} a$. Es konvergiert ferner in jedem, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle gleichmäßig, in der Umgebung von $a = 0$ dagegen nicht gleichmäßig. Wir betrachten nun eine beliebige Nullfolge $\{a_n\}$ und eine beliebige, gegen $+\infty$ konvergierende Folge $\{\omega_n\}$; die Zahlen

$$(2) \quad \int_0^{\omega_n} \frac{\sin a_n t}{t} dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

besitzen dann gewisse Häufungswerte. Diese erfüllen für die Gesamtheit aller Folgen $\{a_n\}$ und $\{\omega_n\}$ der betrachteten Art ein gewisses Intervall L . Das Gibbssche Phänomen besteht darin, daß dieses Intervall L die Strecke l zwischen den Zahlen $\varphi(-0) = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi(+0) = +\frac{\pi}{2}$ als echte Teilmenge enthält. Die Endpunkte von L sind nämlich, wie man leicht zeigt,

$$(3) \quad - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{und} \quad + \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \lambda,$$

wobei $\lambda = 1,08949 \dots$ gilt.

¹³⁾ Vgl. a. a. O. ¹²⁾, S. 294, b).

2. Wir wollen im folgenden die analoge Aufgabe für das etwas kompliziertere Soninesche Integral¹⁴⁾

$$(4) \int_0^{\infty} J_{\nu}(at) J_{\nu}(bt) J_{\nu}(ct) \frac{dt}{t^{\nu-1}} = \varphi(a, b, c) \quad (\nu > -\tfrac{1}{2}; a > 0, b > 0, c > 0)$$

behandeln. Es besitzt (vgl. a. a. O.) den Wert

$$(5) \frac{2^{\nu-1} \Delta^{2\nu-1}}{(abc)^{\nu} \Gamma(\nu + \tfrac{1}{2}) \Gamma(\tfrac{1}{2})} \text{ bzw. } 0,$$

je nachdem, ob man aus den positiven Zahlen a, b, c ein Dreieck bilden kann oder nicht; im ersten Falle wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks mit Δ bezeichnet. (Ist das Dreieck „entartet“, d. h. $\Delta = 0$, so ist $\Delta^{2\nu-1}$ gleich 0, $\tfrac{1}{2}$ bzw. $+\infty$ zu setzen, je nachdem ob $\nu > \tfrac{1}{2}$, $\nu = \tfrac{1}{2}$, $\nu < \tfrac{1}{2}$ ist.) Der Spezialfall $\nu = 0$ spielte in der obigen Untersuchung (vgl. § 1) eine wesentliche Rolle.

Die „Dreiecksbedingung“ kann so ausgedrückt werden, daß die drei Zahlen

$$(6) -a + b + c, \quad a - b + c, \quad a + b - c$$

positiv ausfallen.

3. Mit Hilfe der bekannten Näherungsformel¹⁵⁾

$$(7) J_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

zeigt man die Konvergenz von (4) ohne Schwierigkeit. Das „Hauptglied“ lautet (vgl. § 2, 3)

$$(8) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{abc}} \int_1^{\infty} \frac{\cos\left(at - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(bt - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(ct - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{t^{\nu+1/2}} dt.$$

Der hinzukommende Bestandteil konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereiche des (a, b, c) -Raumes, dessen Punkte lauter positive Koordinaten besitzen. Unser Ziel ist also das Studium des Integrals (8). Für $\nu > \tfrac{1}{2}$ ist dies im ganzen (a, b, c) -Raume absolut und gleichmäßig konvergent. Es sei somit im folgenden $-\tfrac{1}{2} < \nu \leq +\tfrac{1}{2}$ vorausgesetzt.

Der Zähler in dem Integranden kann nach Multiplikation mit 4 in der Form

$$(9) \begin{aligned} & \cos\left\{(-a + b + c)t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} + \cos\left\{(a - b + c)t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} \\ & + \cos\left\{(a + b - c)t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\} + \cos\left\{(a + b + c)t - \frac{3\nu\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

¹⁴⁾ W., S. 411, (3).

¹⁵⁾ Man vgl. W., S. 199, (1).

geschrieben werden. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von (4) in der Umgebung eines beliebigen Punktes (a, b, c) mit positiven Koordinaten, für den die drei Zahlen (6) nicht verschwinden.

4. Es seien nun a_0, b_0, c_0 positive Zahlen und z. B.

$$(10) \quad -a_0 + b_0 + c_0 = 0.$$

Wir untersuchen das Verhalten des Integrals (4), wenn der Punkt (a, b, c) in der Umgebung von (a_0, b_0, c_0) liegt, namentlich die Konvergenz der Teilintegrale

$$(11) \quad \int_0^{\omega_n} J_\nu(a_n t) J_\nu(b_n t) J_\nu(c_n t) \frac{dt}{t^{\nu-1}},$$

wenn (a_n, b_n, c_n) gegen (a_0, b_0, c_0) , ω_n gegen $+\infty$ konvergiert und die drei Zahlen (6) für (a_n, b_n, c_n) nicht verschwinden. Dabei setzen wir, wie erwähnt, stets $-\frac{1}{2} < \nu \leq +\frac{1}{2}$ voraus. Die Häufungswerte von (11) erfüllen für die Gesamtheit aller Folgen der betrachteten Art ein gewisses abgeschlossenes Intervall L . Andererseits sei l das kleinste abgeschlossene Intervall, das die Häufungspunkte sämtlicher Folgen $\varphi(a_n, b_n, c_n)$ enthält, wobei (a_n, b_n, c_n) gegen (a_0, b_0, c_0) konvergiert, und die drei Zahlen (6) für (a_n, b_n, c_n) nicht verschwinden. Auf Grund von (5) kann l leicht angegeben werden. Sein linker Endpunkt ist 0, sein rechter Endpunkt ist $+\infty$ bzw. $(2\pi a_0 b_0 c_0)^{-1/2}$, je nachdem ob $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ oder $\nu = \frac{1}{2}$ gilt. Es ist weiter klar, daß l stets in L enthalten ist. Wir zeigen nun, daß l für alle Werte von ν mit $-\frac{1}{2} < \nu \leq \frac{1}{2}$ eine echte Teilmenge von L ist. Darin besteht das Analogon des Gibbsschen Phänomens.

5. Wir unterscheiden zwei Fälle.

$\alpha)$ Es sei $-\frac{1}{2} < \nu < +\frac{1}{2}$. Wir zeigen, daß L mit der vollen reellen Achse übereinstimmt. Es genügt dazu nachzuweisen, daß negative Werte mit beliebig großen absoluten Beträgen zu L gehören. Wegen (10) liefern die Summanden von (9) mit Ausnahme des ersten lauter solche Integrale, welche in der Umgebung von (a_0, b_0, c_0) gleichmäßig konvergieren. Der Beitrag des ersten Summanden ist aber

$$\int_1^{\omega_n} \frac{\cos\left\{(-a_n + b_n + c_n)t - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right\}}{t^{\nu+1/2}} dt.$$

Wählt man $-a_n + b_n + c_n = -\varepsilon_n$ negativ, so wird dieses Integral gleich

$$\varepsilon_n^{-\nu-1/2} \int_{\varepsilon_n}^{\omega_n} \frac{\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{x^{\nu+1/2}} dx.$$

Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar, wenn wir zeigen können, daß die Funktion

$$(12) \quad \int_0^{\Omega} \frac{\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{x^{\nu+1/2}} dx = \psi(\Omega)$$

für ein passendes Ω , $\Omega > 0$, negativ ausfällt. Nun ist, wie eine leichte Rechnung bestätigt¹⁰⁾, $\psi(+\infty) = 0$, so daß durch partielle Integration

$$(13) \quad \begin{aligned} \psi(\Omega) &= - \int_{\Omega}^{+\infty} \frac{\cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{x^{\nu+1/2}} dx = \frac{\sin\left(\Omega + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\Omega^{\nu+1/2}} \\ &- (\nu + \tfrac{1}{2}) \int_{\Omega}^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{x^{\nu+3/2}} dx = \frac{\sin\left(\Omega + \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\Omega^{\nu+1/2}} + O\left(\frac{1}{\Omega^{\nu+3/2}}\right) \end{aligned}$$

folgt. Daraus geht aber die behauptete Eigenschaft von $\psi(\Omega)$ ohne weiteres hervor.

Damit ist das Auftreten des Gibbsschen Phänomens für $-\frac{1}{2} < \nu < +\frac{1}{2}$ bewiesen; genauer haben wir sogar gezeigt, daß die Häufungsmenge von (11) für $a_n > b_n + c_n$ mit der vollen reellen Achse übereinstimmt. Eine schwierigere Aufgabe ist, zu entscheiden, ob das Gibbssche Phänomen auch von der anderen „Seite“ her, d. h. für $a_n < b_n + c_n$, auftritt. Nach der vorhergehenden Betrachtung hängt dies davon ab, ob das Integral

$$(14) \quad \int_0^{\Omega} \frac{\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{x^{\nu+1/2}} dx = \chi(\Omega)$$

für ein passendes Ω , $\Omega > 0$, negativ wird oder nicht. Eine leichte Diskussion zeigt, daß dies dann und nur dann eintritt, wenn

$$(15) \quad \chi\left(\frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) < 0$$

ausfällt. Diese Bedingung ist, wie man unmittelbar sieht, für die ν -Werte in der Nähe von $-\frac{1}{2}$ erfüllt, für die ν -Werte in der Nähe von $+\frac{1}{2}$ dagegen nicht erfüllt.

β) Es sei $\nu = \frac{1}{2}$. Infolge der bekannten Formel

$$(16) \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

handelt es sich dann um das Integral

$$(17) \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{abc}} \int_0^{\infty} \frac{\sin at \sin bt \sin ct}{t} dt.$$

¹⁰⁾ Man vgl. z. B. Pólya-Szegő, Bd. I, Abschn. III, Aufg. 151, S. 114, S. 285.

Der Integrand geht hier nach Multiplikation mit 4 in die Summe

$$\frac{\sin(-a+b+c)t}{t} + \frac{\sin(a-b+c)t}{t} + \frac{\sin(a+b-c)t}{t} - \frac{\sin(a+b+c)t}{t}$$

über. Es sei wieder $-a_0 + b_0 + c_0 = 0$, und (a_n, b_n, c_n) wie oben definiert. Der Beitrag der drei letzten Glieder zu dem Abschnittsintegral (11) liefert für $n \rightarrow \infty$ den Wert

$$\begin{aligned} & \varphi(a_0 - b_0 + c_0) + \varphi(a_0 + b_0 - c_0) - \varphi(a_0 + b_0 + c_0) \\ &= \varphi(2c_0) + \varphi(2b_0) - \varphi(2a_0) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

während das erste Glied das Gibbssche Phänomen zustande bringt. Die Endpunkte des Intervalls L sind somit in diesem Falle

$$(18) \quad \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{4\sqrt{abc}} \left(\mp \frac{\pi}{2} \lambda + \frac{\pi}{2}\right) = (2\pi abc)^{-1/2} \frac{1 \mp \lambda}{2},$$

wobei λ dieselbe Bedeutung wie in (3) hat, während das Intervall l , wie oben (4) festgestellt wurde, von 0 bis $(2\pi abc)^{-1/2}$ reicht.

Ist $-a_n + b_n + c_n < 0$, so erhält man genauer das Intervall

$$(18') \quad (2\pi abc)^{-1/2} \frac{1-\lambda}{2}, \quad (2\pi abc)^{-1/2} \frac{1}{2},$$

während sich für $-a_n + b_n + c_n > 0$ das Intervall

$$(18'') \quad (2\pi abc)^{-1/2} \frac{1}{2}, \quad (2\pi abc)^{-1/2} \frac{1+\lambda}{2}$$

ergibt.

In dem eben entwickelten Sinne können auch andere Integrale vom Sonineschen Typus behandelt werden.

(Eingegangen am 6. Mai 1932.)

Elementarer Beweis einer Vermutung von K. Friedrichs und H. Lewy.

Von

Th. Kaluza in Kiel.

In der voranstehenden Arbeit „Über gewisse Potenzreihen mit lauter positiven Koeffizienten“ hat Herr G. Szegö mit transzendenten Hilfsmitteln eine Reihe von Sätzen bewiesen, die eine von den Herren K. Friedrichs und H. Lewy geäußerte Vermutung bestätigen und nach verschiedenen Richtungen verallgemeinern. Obwohl die betreffende Frage damit also völlig erledigt ist, möchte ich hier doch noch einen *elementaren Beweis* jener Vermutung anfügen, zumal auch Herr Szegö selbst, dem ich den Anstoß zur Beschäftigung mit dieser Frage verdanke, das Mißverhältnis zwischen der elementaren Form der Aussage und dem ziemlich umfangreichen analytischen Beweisapparat hervorhebt. Überdies erhält man auf elementarem Wege auch eine explizite *positive Darstellung* der fraglichen Koeffizienten nebst *Abschätzungen*, kann ihre weitgehende *Monotonie* nachweisen und schließlich noch einige weitere Feststellungen über gewisse *Polynome mit positiven Koeffizienten* machen.

Den vermuteten Satz formulieren wir so:

In der Potenzreihe

$$\sum_{k, l, m=0}^{\infty} a_{k, l, m} u^k v^l w^m$$

$$= \frac{3}{(1-3v)(1-3w) + (1-3w)(1-3u) + (1-3u)(1-3v)},$$

$$= \frac{1}{1-2(u+v+w) + 3(vw+wu+uv)}.$$

sind sämtliche Koeffizienten $a_{k, l, m}$ wesentlich positiv.

Die Koeffizienten sind hier ganzzahlig und gehen bei Division durch $3^{k+l+m+1}$ in die entsprechenden Koeffizienten $A_{k, l, m}$ der voranstehenden Arbeit über.

Während es mir nun nicht gelang, den Satz unter Wahrung der vollen Symmetrie in den Indizes k, l, m elementar zu beweisen, bot sich bei Absonderung eines Index heuristisch der folgende Weg dar:

Betrachtet man bei festem k, l und laufendem z die Folgen $2^{-z}a_{k,l,z}$, so lassen deren rekursorisch ziemlich bequem zu berechnende Anfangsglieder vermuten, daß es sich dabei um *vollmonoton wachsende arithmetische Folgen* $(k+l)$ -ter Ordnung handelt; demnach müßte es genügen, die $k+l$ Anfangsdifferenzen dieser Folgen als *positiv* nachzuweisen. Faßt man jetzt diese Anfangsdifferenzen als Koeffizienten von *erzeugenden Polynomen* $(k+l)$ -ten Grades in y auf, so bemerkt man weiter, daß diese Polynome durch $3x = 1 + 2y$ bewirkte Umbildungen gewisser anderer Polynome in x von einfacherem Bau darstellen, deren Koeffizienten anscheinend wenigstens *nichtnegativ* sind. Diese *neue Vermutung* nun, aus der die Richtigkeit der ursprünglichen a fortiori folgt, wird im folgenden unter Benutzung einer merkwürdigen quadratischen Relation zwischen höheren Differenzen von Binomialkoeffizienten in Satz 1 bestätigt. Um die Darstellung abzurunden, gehen wir dann auf die erwähnten arithmetischen Folgen zunächst weiter nicht ein, sondern führen den Beweis vorerst etwas einfacher unter ausschließlicher Verwendung von erzeugenden Polynomen und Rekursionsformeln direkt zu Ende. Später folgen dann noch: eine *Darstellung* von $a_{k,l,m}$ als positive Linearkombination von Quadraten höherer Binomialkoeffizientendifferenzen, eine *Monotonieaussage*, eine *Abschätzung der $a_{k,l,m}$ nach unten* sowie eine *asymptotische Abschätzung*, endlich zwei aus Satz 1 fließende *weitere Ergebnisse* über die Positivität gewisser Polynomkoeffizienten.

1. Wir legen die folgenden Polynome in u und v zugrunde:

$$(1) \quad g_{r,s}(u, v) = (u + v)^r (u - v)^s = \sum_{x=0}^{r+s} c_{r,s}^{(x)} u^{r+s-x} v^x \quad (r \geq 0, s \geq 0).$$

Mit 1 für u und x für v liefern sie die *Polynome* in x :

$$(2) \quad g_{r,s}(x) = g_{r,s}(1, x) = (1 + x)^r (1 - x)^s = \sum_{x=0}^{r+s} c_{r,s}^{(x)} x^x.$$

Die Koeffizienten

$$(3) \quad c_{r,s}^{(x)} = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \binom{r}{r-\alpha} \binom{s}{\alpha}^1$$

können als höhere Differenzen von Binomialkoeffizienten aufgefaßt werden und genügen mancherlei merkwürdigen *Relationen*; z. B. gilt

$$(4) \quad \binom{n}{x} c_{n-x,x}^{(\lambda)} = \binom{n}{\lambda} c_{n-\lambda,\lambda}^{(x)} \quad (n \geq 0; 0 \leq x \leq n, 0 \leq \lambda \leq n)$$

¹⁾ Hier, wie in analogen Fällen später, soll der Summationsindex die Werte durchlaufen, für die die Binomialkoeffizienten in den Summanden existieren und nicht verschwinden; dabei ist $\binom{0}{0} = 1$ zu nehmen.

und vor allem

$$(5) \quad (c_{r,s}^{(x)})^2 = \sum_{\mu} \binom{2\mu}{\mu} \binom{r+s-2\mu}{x-\mu} c_{r,s}^{(2\mu)} \quad (0 \leq x \leq r+s).$$

Denn in

$$\sum_{x,\lambda=0}^n e_{x,\lambda} x^x y^\lambda = (1+x+y-xy)^n = \sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} y^\lambda (1+x)^{n-\lambda} (1-x)^\lambda$$

ist ja nach (2)

$$e_{x,\lambda} = \binom{n}{\lambda} c_{n-\lambda,\lambda}^{(x)},$$

und daraus folgt wegen $e_{x,\lambda} = e_{\lambda,x}$ sofort die Relation (4), während man (5) am schnellsten aus den erzeugenden Funktionen

$$(6) \quad Q_{r,s}(x,y) = q_{r,s}(x) q_{r,s}(y) = \sum_{\sigma,\tau=0}^{r+s} c_{r,s}^{(\sigma)} c_{r,s}^{(\tau)} x^\sigma y^\tau$$

gewinnt. Nach (2) und (1) ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} Q_{r,s}(x,y) &= (1+xy+x+y)^r (1+xy-x-y)^s = g_{r,s}(1+x, x+y) \\ &= \sum_{x=0}^{r+s} c_{r,s}^{(x)} (1+xy)^{r+s-x} (x+y)^x, \end{aligned}$$

und man hat, um $(c_{r,s}^{(x)})^2$ zu erhalten, hierin den Koeffizienten von $(xy)^x$ aufzusuchen, den man beim Ausmultiplizieren der Potenzen unter der letzten Summe eben gleich der rechten Seite von (5) findet.

Wir benutzen (4) noch zu folgender Umformung von (5): Wir nehmen (5) mit $k+1-\gamma$ für r , γ für s und l für λ , also

$$(c_{k+l-\gamma,\gamma}^{(l)})^2 = \sum_{\mu} \binom{2\mu}{\mu} \binom{k+l-2\mu}{l-\mu} c_{k+l-\gamma,\gamma}^{(2\mu)},$$

wenden (4) mit $k+l$ für n , γ für x und l bzw. 2μ für λ , d. h. z. B.

$$c_{k+l-\gamma,\gamma}^{(2\mu)} = \frac{\binom{k+l}{2\mu}}{\binom{k+l}{\gamma}} c_{k+l-2\mu,2\mu}^{(\gamma)}$$

an, berücksichtigen, daß

$$\binom{2\mu}{\mu} \binom{k+l-2\mu}{l-\mu} \binom{k+l}{2\mu} = \binom{k+l}{k} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu}$$

ist, und erhalten schließlich nach Fortheben von $\frac{\binom{k+l}{k}}{\binom{k+l}{\gamma}}$ die für das Fol-

gende *grundlegende Relation*:

$$(7) \quad \binom{k+l}{k} (c_{k,l}^{(\gamma)})^2 = \binom{k+l}{\gamma} \sum_{\mu} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} c_{k+l-2\mu,2\mu}^{(\gamma)}.$$

2. Jetzt führen wir die *neuen Polynome* in x

$$(8) \quad p_{k,l}(x) = \sum_{\mu} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} (1+x)^{k+l-2\mu} (1-x)^{2\mu} \\ = \sum_{\gamma=0}^{k+l} b_{k,l}^{(\gamma)} x^{\gamma} \quad (k \geq 0, l \geq 0)$$

ein, bei denen ersichtlich stets

$$b_{k,l}^{(\gamma)} = b_{l,k}^{(\gamma)} = b_{l,k}^{(l+k-\gamma)} = b_{k,l}^{(k+l-\gamma)}$$

ist, und beweisen für sie den

Satz 1: *Sämtliche Koeffizienten $b_{k,l}^{(\gamma)}$ aller $p_{k,l}(x)$ sind nichtnegativ.*

Beweis: Die $p_{k,l}(x)$ sind offenbar Linearkombinationen der $q_{r,s}(x)$ und zwar gilt nach (8) und (2)

$$(9) \quad p_{k,l}(x) = \sum_{\mu} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} q_{k+l-2\mu, 2\mu}(x).$$

Koeffizientenvergleichung ergibt

$$(10) \quad b_{k,l}^{(\gamma)} = \sum_{\mu} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} c_{k+l-2\mu, 2\mu}^{(\gamma)},$$

und schließlich folgt aus der Identität (7):

$$(11) \quad b_{k,l}^{(\gamma)} = \frac{\binom{k+l}{k}}{\binom{k+l}{\gamma}} (c_{k,l}^{(\gamma)})^2 \geq 0 \quad (0 \leq \gamma \leq k+l),$$

womit eine positive Darstellung der Koeffizienten gefunden und der Satz bewiesen ist.

Bemerkt sei noch, daß einzelne $b_{k,l}^{(\gamma)}$ sehr wohl verschwinden können, nämlich dann, wenn die entsprechenden höheren Binomialkoeffizientendifferenzen $c_{k,l}^{(\gamma)}$ gerade verschwinden. Der Satz ist also insofern scharf, als das Gleichheitszeichen in (11) nicht zu entbehren ist.

Weiter bestätigt man bequem folgende *Rekursionsformel* für die $p_{k,l}(x)$:

$$(12) \quad p_{k+1,l+1}(x) = (1+x)(p_{k+1,l}(x) + p_{k,l+1}(x)) - 4x p_{k,l}(x).$$

Man braucht dazu nur $(1+x)^2 - (1-x)^2$ anstatt $4x$ zu schreiben und zu beachten, daß

$$\binom{k+1}{\mu} \binom{l+1}{\mu} = \binom{k+1}{\mu} \binom{l}{\mu} + \binom{k}{\mu} \binom{l+1}{\mu} - \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} + \binom{k}{\mu-1} \binom{l}{\mu-1}$$

ist. Die Rekursion (12) gilt auch noch, wenn entweder $k = -1$ oder $l = -1$ ist, sofern man verabredet, daß alle $p_{r,s}(x)$ identisch verschwinden sollen, bei denen wenigstens ein Index negativ wird. Man kann so mittels (12) alle $p_{k,l}(x)$ rekursiv aus $p_{0,0}(x) = 1$ entwickeln, kommt aber dann naturgemäß zu einer *anderen Darstellung derselben Polynome*, die für uns besonders nützlich wird, nämlich zu

$$(13) \quad p_{k,l}(x) = \sum_v (-4)^v \binom{k+l-v}{k} \binom{k}{v} (1+x)^{k+l-2v} x^v \\ = \sum_\mu (-4)^\mu \binom{l+k-\mu}{l} \binom{l}{\mu} (1+x)^{l+k-2\mu} x^\mu,$$

wie aus (12) unter Berücksichtigung von

$$\binom{k+l+2-v}{k+1} \binom{k+1}{v} = \binom{k+l+1-v}{k+1} \binom{k+1}{v} + \binom{k+l+1-v}{k} \binom{k}{v} \\ + \binom{k+l+1-v}{k} \binom{k}{v-1}$$

sogleich hervorgeht.

Derselben Rekursion gehorchen schließlich auch die etwas *allgemeineren Polynome*:

$$(14) \quad r_{k,l;m}(x) = x^m p_{k,l}(x) \\ = \sum_v (-4)^v \binom{k+l-v}{k} \binom{k}{v} (1+x)^{k+l-2v} x^{m+v} \quad (m \geq 0)$$

mit den gleichen, nur um m Stellen verschobenen, also ebenfalls *nicht-negativen* Koeffizienten.

3. Wir setzen nunmehr in diesen Polynomen

$$(15) \quad x = \frac{1+2y}{3},$$

ordnen nach Potenzen von y und betrachten die nach Multiplikation mit $\frac{3^{k+l+m}}{2^{k+l}}$ entstehenden *umgebildeten Polynome* in y :

$$(16) \quad r_{k,l;m}(y) = \frac{3^{k+l+m}}{2^{k+l}} r_{k,l;m} \left(\frac{1+2y}{3} \right) = \sum_{\varrho=0}^{k+l+m} a_{k,l;m}^{(\varrho)} x^\varrho.$$

In ihnen fallen wegen (11) und (15) die *neuen Koeffizienten* $a_{k,l;m}^{(\varrho)}$ offenbar erst recht nichtnegativ, ja sogar *wesentlich positiv* aus, da wegen (11)

und (2) in den $r_{k,l,m}(x)$ stets der höchste Koeffizient $b_{k,l}^{(k+l)} = \binom{k+l}{k} > 0$ ist. Es gilt demnach auch für die umgebildeten Polynome ein dem Satz 1 entsprechender

Satz 2: *Sämtliche Koeffizienten $a_{k,l,m}^{(p)}$ aller $r_{k,l,m}(y)$ sind wesentlich positiv.*

Die bequemste *Darstellung* dieser umgebildeten Polynome entspringt aus (13) bzw. (14) und lautet:

$$(17) \quad r_{k,l,m}(y) = \sum_v (-3)^v \binom{k+l-v}{k} \binom{k}{v} (2+y)^{k+l-2v} (1+2y)^{m+v}.$$

Neben der trivialen Rekursion nach m hat man hier, aus (12) und (15) hervorgehend, nach k und l die *Rekursion*

$$(18) \quad r_{k+1,l+1,m}(y) = (2+y)(r_{k+1,l,m}(y) + r_{k,l+1,m}(y)) - 3(1+2y)r_{k,l,m}(y)$$

mit der entsprechenden Bemerkung über negative Indizes wie zu (12); als Ausgangspunkt dient hier $r_{0,0,m}(y) = (1+2y)^m$.

4. Es soll nun gezeigt werden, daß sich unter den Koeffizienten $a_{k,l,m}^{(p)}$ dieser umgebildeten Polynome auch die zu untersuchenden Potenzreihenkoeffizienten vorfinden, so daß für sie diese Polynome die Rolle von *erzeugenden Funktionen* spielen.

Wir betrachten also die nach Potenzen von u, v, w entwickelte *rationale Funktion*

$$(19) \quad \frac{1}{1 - 2(u+v+w) + 3(vw+wu+uv)} = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} a_{k,l,m} u^k v^l w^m,$$

deren Potenzreihenkoeffizienten $a_{k,l,m}$ ersichtlich der *Rekursion*

$$(20) \quad a_{k+1,l+1,m+1} = 2(a_{k,l+1,m+1} + a_{k+1,l,m+1} + a_{k+1,l+1,m}) - 3(a_{k+1,l,m} + a_{k,l+1,m} + a_{k,l,m+1})$$

genügen, die auch noch gilt, wenn einer oder zwei der Indizes $k, l, m = -1$ sind, sofern man alle $a_{p,q,r}$ mit wenigstens einem negativen Index gleich Null setzt.

Zwischen dieser Rekursion und der vorangehenden (18) besteht aber ein enger Zusammenhang, der zu der abschließenden Feststellung führt:

Satz 3: *Für alle $k \geq 0, l \geq 0, m \geq 0$ ist $a_{k,l,m} = a_{k,l,m}^{(m)}$.*

Beweis: Addiert man in (18) beiderseits $2y r_{k+1,l+1,m}(y)$, setzt rechts $2+y = 2(1+2y) - 3y$ und beachtet, daß nach (17)

$$(1+2y)r_{p,q,m}(y) = r_{p,q,m+1}(y)$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} r_{k+1, l+1; m+1}(y) &= 2(r_{k, l+1; m+1}(y) + r_{k+1, l; m+1}(y) + y r_{k+1, l+1; m}(y)) \\ &\quad - 3(y r_{k, l+1; m}(y) + y r_{k+1, l; m}(y) + r_{k, l; m+1}(y)). \end{aligned}$$

Nimmt man hierin auf beiden Seiten den Koeffizienten von y^{m+1} , so folgt für die $a_{k+1, l+1; m+1}^{(m+1)}$ eine Rekursionsformel, die beim Ersatz der $a_{p, q; r}^{(r)}$ durch die $a_{p, q, r}$ in (20) übergeht, wobei allerdings zunächst nur entweder $k = -1$ oder $l = -1$ werden darf. Als von der Rekursion nicht erfaßte Ausgangsidentitäten sind also noch direkt zu bestätigen $a_{0, 0, m} = a_{0, 0; m}^{(m)}$ sowie $a_{k, l, 0} = a_{k, l; 0}^{(0)}$. Die erste dieser Identitäten gilt, da nach (19) ersichtlich $a_{0, 0, m} = 2^m$ und andererseits $r_{0, 0; m}(y) = (1 + 2y)^m$ ist, die zweite folgt wiederum aus der Übereinstimmung der für die $a_{k, l, 0}$ aus (20) bzw. die $a_{k, l; 0}^{(0)}$ aus (18) folgenden Sonderrekursionen nebst den zugehörigen Ausgangswerten, so daß der Satz in vollem Umfange bewiesen ist.

Danach werden also die zu untersuchenden Potenzreihenkoeffizienten $a_{k, l, m}$ durch die erzeugenden Polynome $r_{k, l; m}(y)$ als deren m -te Koeffizienten geliefert; da aber sämtliche Koeffizienten dieser Polynome bereits in Satz 2 als wesentlich positiv erkannt worden sind, ist damit die Vermutung von Friedrichs und Lewy bewiesen.

5. Zum Schluß sollen noch einige weitere Ergebnisse zusammengestellt werden.

Führt man die Umbildung der $r_{k, l; m}(x)$ wirklich aus, so erhält man nach einfachen Umformungen von Binomialausdrücken zunächst eine explizite Darstellung der Koeffizienten $a_{k, l, m}$, die deren Positivität in Evidenz setzt, nämlich

$$(21) \quad a_{k, l, m} = \frac{1}{2^{k+l+m}} \frac{(k+l+m)!}{k! l! m!} 4^m \sum_{\varrho=0}^{k+l} \frac{3^\varrho}{\binom{k+l+m}{\varrho}} (c_{k, l}^{(\varrho)})^2.$$

Behält man hierin rechts nur das letzte Glied bei, so folgt als rohe Abschätzung der Koeffizienten nach unten etwa $a_{k, l, m} > (3/2)^{k+l+m}$. Um die zu erwartende Abschätzung $a_{k, l, m} \geq 2^{k+l+m}$ sowie weitere Aussagen über die Koeffizienten zu erhalten, geht man zweckmäßig so vor:

Man schreibe für $a_{k, l; 0}^{(\varrho)}$ kürzer $b_{k, l}^{(\varrho)}$; dann wird nach (17)

$$(22) \quad r_{k, l; m}(y) = (1 + 2y)^m r_{k, l; 0}(y) = (1 + 2y)^m \sum_{\varrho=0}^{k+l} b_{k, l}^{(\varrho)} y^\varrho,$$

mithin nach Satz 3

$$(23) \quad a_{k, l, m} = a_{k, l; m}^{(m)} = \sum_{\varrho=0}^{k+l} 2^{m-\varrho} \binom{m}{\varrho} b_{k, l}^{(\varrho)}.$$

Berücksichtigt man hierin nur das erste Glied rechts, so ergibt sich gemäß (22), (16) und (14)

$$a_{k,l,m} \geq 2^m d_{k,l}^{(0)} = 2^m r_{k,l;0}(0) = 2^m \frac{3^{k+l}}{2^{k+l}} p_{k,l} \left(\frac{1}{3} \right),$$

nach (8) also weiter

$$a_{k,l,m} \geq 2^m \frac{3^{k+l}}{2^{k+l}} \sum_{\mu} \binom{k}{\mu} \binom{l}{\mu} \left(\frac{4}{3} \right)^{k+l-2\mu} \left(\frac{1}{3} \right)^{2\mu},$$

das heißt aber, wenn man rechts wiederum nur das erste Glied nimmt,

$$(24) \quad a_{k,l,m} \geq 2^{k+l+m}.$$

Die Abschätzung ist insofern genau, als das Gleichheitszeichen angenommen wird, sobald zwei Indizes verschwinden.

Ferner erhält man, da nach (22), (16), (14) und (11)

$$d_{k,l}^{(k+l)} = b_{k,l}^{(k+l)} = \binom{k+l}{k}$$

ist, aus (23) als *asymptotische Abschätzung* von $a_{k,l,z}$ bei festem k, l und laufendem z

$$a_{k,l,z} \approx \frac{2^z \binom{z}{k+l}}{2^{k+l}} d_{k,l}^{(k+l)} = \frac{2^z \binom{z}{k+l} \binom{k+l}{k}}{2^{k+l}}$$

oder auch

$$(25) \quad a_{k,l,z} \approx \frac{2^z z^{k+l}}{2^{k+l} k! l!}.$$

Schließlich liest man aus der etwas umgeschriebenen Formel (23)

$$2^{-z} a_{k,l,z} = \sum_{\varrho=0}^{k+l} \binom{z}{\varrho} 2^{-\varrho} d_{k,l}^{(\varrho)}$$

noch ab, daß infolge der Positivität aller $d_{k,l}^{(\varrho)}$ die Folgen $2^{-z} a_{k,l,z}$ bei festem k, l und laufendem z in der Tat *vollmonotone arithmetische Folgen* $(k+l)$ -ter Ordnung bilden, wie in der Einleitung vermutet wurde.

Wir ziehen nun noch *zwei Folgerungen* aus Satz 1.

Satz 4. *Schreibt man die Funktion*

$$T_{k,l}(\alpha) = \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{(k+l-\lambda)!}{\lambda! (k-\lambda)! (l-\lambda)!} (\cos \alpha)^{k+l-2\lambda}$$

als Kosinuspolynom, so fallen sämtliche Koeffizienten nichtnegativ aus.

Der Satz folgt leicht, sobald man unter Ausnutzung des symmetrischen Aufbaues der Polynome $p_{k,l}(x)$ daselbst $\cos \alpha$ bzw. $\sin \alpha$ anstatt $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ bzw. $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ einführt und $\sin^2 \alpha$ durch $1 - \cos^2 \alpha$ ersetzt oder auch die andere Darstellung (13) der $p_{k,l}(x)$ benutzt.

Endlich betrachten wir die bei der Entwicklung der Funktion

$$\frac{1}{1 - (1+x)(1+y)u + 4xyu^2}$$

nach Potenzen von u auftretenden *Tschebyscheffschen Polynome* zweiter Art $P_n^{(1)}\left(\frac{(1+x)(1+y)}{4\sqrt{xy}}\right)$ und gewinnen nach Einführung der $p_{k,l}(x)$ gemäß (13) noch folgendes Resultat:

Satz 5: *Sämtliche Koeffizienten des Polynoms in x und y*

$$\sum_v \binom{n-v}{v} (-4xy)^v (1+x)^{n-2v} (1+y)^{n-2v}$$

sind nichtnegativ.

(Eingegangen am 6. Mai 1932.)

Un theoreme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long*)**).

Von

W. Wolibner in Warschau.

Introduction.

Soit G une région plane fermée dont la frontière F est constituée par J courbes fermées analytiques $F_1, F_2, \dots, F_J$; G peut contenir le point à l'infini ou bien être bornée; dans ce dernier cas il faut omettre toutes les conditions précisées plus loin et concernant la façon dont les fonctions définies dans G se comportent à l'infini.

Supposons que pendant le temps variant de 0 à T a lieu dans la région fermée G un mouvement plan d'un fluide parfait, homogène et incompressible sous l'influence des forces potentielles.

Soient a, b, t les variables de Lagrange; $x(a, b, t), y(a, b, t)$ les variables d'Euler; σ la densité du fluide;

$$u(x, y, t) = \frac{\partial x(a, b, t)}{\partial t}, \quad v(x, y, t) = \frac{\partial y(a, b, t)}{\partial t}$$

les vitesses composantes du fluide; $p(x, y, t)$ — la pression; $U(x, y, t)$ — le potentiel des forces rapportées à l'unité de masse, agissant sur le fluide. On sait que les conditions suivantes doivent être remplies¹⁾.

(I) Les fonctions $x(a, b, t)$ et $y(a, b, t)$ déterminent une représentation topologique de la région fermée G sur elle-même conservant les aires.

*) Les résultats de cette note ont été présentés au Deuxième Congrès des Mathématiciens polonais à Wilno le 26 Septembre 1931.

**) Postérieurement à la rédaction de ce Mémoire j'ai appris que Monsieur J. Leray a indiqué le principe de la méthode que j'utilise, dans une Note publiée aux Compt. rend. de l'Académie des Sciences de Paris, le 30 mai 1932.

1) C. W. Oseen, Hydrodynamik 1927, p. 9, pour $\mu = 0$ (fluide parfait).

(II) Pour toute région simplement connexe B contenu dans G ayant pour frontière une courbe simple fermée S à tangente continue et pour tout t , $0 \leq t \leq T$, sont vérifiées les équations suivantes

$$\begin{aligned} & \sigma \int_B u(x, y, t) dx dy - \sigma \int_B u(x, y, 0) dx dy \\ & - \sigma \int_0^t d\tau \int_S u(x_s, y_s, \tau) [u(x_s, y_s, \tau) n_x(s) + v(x_s, y_s, \tau) n_y(s)] ds \\ & = \int_0^t d\tau \int_S [p(x_s, y_s, \tau) - \sigma U(x_s, y_s, \tau)] n_x(s) ds, \\ & \sigma \int_B v(x, y, t) dx dy - \sigma \int_B v(x, y, 0) dx dy \\ & - \sigma \int_0^t d\tau \int_S v(x_s, y_s, \tau) [u(x_s, y_s, \tau) n_x(s) + v(x_s, y_s, \tau) n_y(s)] ds \\ & = \int_0^t d\tau \int_S [p(x_s, y_s, \tau) - \sigma U(x_s, y_s, \tau)] n_y(s) ds, \end{aligned}$$

où x_s, y_s désignent les coordonnées du point s situé sur la courbe S , ds — l'élément d'arc de la courbe S au point s , $n_x(s), n_y(s)$ les cosinus directeurs de la normale intérieur à la courbe S au point s .

Lorsque les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t) - \sigma U(x, y, t)$ sont continûment dérivables par rapport aux variables x, y il résulte de (II) que $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ admettent la dérivée par rapport au temps t et les équations (II) peuvent être remplacées par les équations différentielles

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} (p - \sigma U), \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (p - \sigma U). \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{z}(x, y)$ une fonction quelconque définie dans G , intégrable au sens de Lebesgue et remplissant la condition

$$(1) \quad |\mathfrak{z}(x, y)| \leq \frac{M}{(1 + R_{xy})^{1+\omega}}, \quad \text{où} \quad R_{xy}^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad 0 < \omega < 1.$$

Je désigne:

$$\begin{aligned} (2) \quad & u_{\mathfrak{z}}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_G \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{\partial \Phi(xy)}{\partial x}, \\ & v_{\mathfrak{z}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_G \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{\partial \Phi(xy)}{\partial y}, \end{aligned}$$

où

$$r^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$$

et $\Phi(x, y)$ désigne la fonction harmonique, régulière à l'intérieur de G dont la dérivée normale intérieure sur F est égale au point l à

$$\frac{n_x(l)}{\pi} \int_G \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r_l}{\partial y_l} d\bar{x} d\bar{y} - \frac{n_y(l)}{\pi} \int_G \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r_l}{\partial x_l} d\bar{x} d\bar{y}$$

où

$$r_l^2 = (x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2.$$

Dans cet article je construis pour une fonction donnée $\mathfrak{z}(x, y)$ et pour un nombre quelconque $T > 0$ les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t)$ satisfaisant pour $0 \leq t \leq T$ outre les conditions (I) et (II) aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{(IV)} \quad x(a, b, 0) &= a, & y(a, b, 0) &= b, \\ u(x, y, 0) &= u_3(x, y), & v(x, y, 0) &= v_3(x, y). \end{aligned}$$

(V) $p(x_0, y_0, t) = p_0(t)$, où le point (x_0, y_0) appartient à G et $p_0(t)$ désigne une fonction continue donnée.

(VI) La circulation le long de toute courbe intérieure dont l'ensemble constitue la frontière F est nulle.

$$\begin{aligned} \text{(VII)} \quad |x(a, b, t) - a| &\leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega}, & |u(x, y, t)| &\leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega}, \\ |y(a, b, t) - b| &\leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega}, & |v(x, y, t)| &\leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega}. \end{aligned}$$

Si la fonction $\mathfrak{z}(x, y)$ remplit la condition de Hölder

$$(3) \quad |\mathfrak{z}(x_1, y_1) - \mathfrak{z}(x_2, y_2)| \leq D[(x_1 - x_2)^\lambda + (y_1 - y_2)^\lambda]^{1/2}, \quad \lambda > 0$$

les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t) - \sigma U(x, y, t)$ sont continûment dérivables par rapport à x et y et, par conséquent, vérifient le système d'équations (III).

Je démontre encore qu'un système au plus des fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t)$ peut remplir pendant le temps variant de 0 à T les conditions (I), (III), (IV), (V), (VI), (VII) et la condition²⁾:

(VIII) Les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t) - \sigma U(x, y, t)$ sont continûment dérivables par rapport à x et y .

²⁾ Le problème si les conditions (I), (II), (IV), (V), (VI), (VII) déterminent d'une façon univoque les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ paraît intéressant.

§ 1.

Quelques propriétés des fonctions $u_i(x, y)$ et $v_i(x, y)$.

Propriété I. Si $x'(x, y)$ et $y'(x, y)$ déterminent une représentation topologique de G sur elle-même conservant les aires et si

$$(4) \quad \mathfrak{J}[x'(x, y), y'(x, y)] = \mathfrak{J}(x, y)$$

l'inégalité

$$(5) \quad \sqrt{[u_{i'}(x_1, y_1) - u_{i'}(x_2, y_2)]^2 + [v_{i'}(x_1, y_1) - v_{i'}(x_2, y_2)]^2} \leq H r_{1,2} \log \frac{1}{r_{1,2}}$$

a lieu, lorsque

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \frac{1}{2},$$

H désignant une constante ne dépendant que de G et de M .

Démonstration. Les courbes fermées F_j étant analytiques, il existe des fonctions analytiques $f_j(\eta) = R_j(\alpha, \beta) + i J_j(\alpha, \beta)$; $\eta = \alpha + i\beta$, $j = 1, 2 \dots J$ représentant conformément la circonférence K de rayon 1 et de centre à l'origine du plan (α, β) sur les courbes F_j et l'entourage intérieur de K sur des entours de F_j contenus dans G .

Soit δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}$, un nombre si petit que la région fermée O^* , limitée par les circonférences K_1 et K_2 concentriques à K des rayons $1 - 2\delta$ et $1/1 - 2\delta$ resp., soit représentée par les fonctions $f_j(\eta)$ sur des régions fermées P_j^* distinctes pour des j différents et limitées par des courbes $L_{j,1}$ et $L_{j,2}$.

Soient K_3 et K_4 les circonférences concentriques à K de rayons $1 - \delta$ et $\frac{1}{1 - \delta}$; O' et $\underline{O}'$ — les régions fermées, limitées resp. par K et K_3 et par K et K_4 . Soient de plus P_j' et $\underline{P}_j'$, $P_j' \subset G$, les régions fermées sur les quelles sont représentées O' et $\underline{O}'$ par les fonctions $f_j(\eta)$; et $L_{j,3}$ et $L_{j,4}$ — les courbes fermées sur lesquelles sont représentées K_3 et K_4 .

Je pose encore:

$$P'_0 = G - \sum_{j=1}^{j=J} P_j', \quad Q' = P'_0 + \sum_{j=1}^J (P_j' + \underline{P}_j') = G + \sum_{j=1}^J \underline{P}_j'$$

et

$$Q'_j = Q' - (P_j' + \underline{P}_j').$$

Les inverses des distances de K_1 et K_2 à O' et $\underline{O}'$ et le diamètre de K_2 ne dépassent pas un certain nombre δ' ; les inverses des distances de $L_{j,1}$

et $L_{j,2}$ à $P'_j + \underline{P}'_j$ et les diamètres de $L_{j,1}$ et $L_{j,1}$, $j = 1, 2 \dots J$, ne dépassent pas un certain nombre δ'' , et les distances de Q'_j aux F_j , sont au moins égales à un certain nombre $\delta''' > 0$.

Je définis dans O' les fonctions

$$\mu'_j(\alpha, \beta) = \mathfrak{z}'[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)] \cdot \left| \frac{d f_j(\eta)}{d \eta} \right|^2$$

dans O' les fonctions

$$\underline{\mu}'_j(\alpha, \beta) = -\mu'_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)] \cdot \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

où $\underline{\alpha}(\alpha, \beta)$ et $\underline{\beta}(\alpha, \beta)$ désignent les coordonnées du point correspondant au point (α, β) dans la représentation par rayons réciproques par rapport au cercle K .

Je définis enfin dans tout le plan (α, β) les fonctions

$$\psi'_j(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_{O'} \mu'_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \log \varrho \, d\bar{\alpha} \, d\bar{\beta} + \frac{1}{\pi} \int_{O'} \underline{\mu}'_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \log \varrho \, d\bar{\alpha} \, d\bar{\beta},$$

où

$$\varrho^2 = (\alpha - \bar{\alpha})^2 + (\beta - \bar{\beta})^2.$$

Evidemment, la dérivée de $\psi'_j(\alpha, \beta)$ le long de K est nulle.

Je désigne par

$$f_j^{-1}(z) = R_j^{-1}(x, y) + i J_j^{-1}(x, y),$$

où $z = x + iy$, les fonctions inverses aux $f_j(\eta)$. Je définis dans P_j^* les fonctions

$$\varphi'_j(x, y) = \psi'_j[R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)].$$

Evidemment, la dérivée de $\varphi'_j(x, y)$ le long de F_j est nulle aussi.

Je définis encore les fonctions

$$\mathfrak{z}'_j(x, y) = \underline{\mu}'_j[R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)] \cdot \left| \frac{d f_j^{-1}(z)}{d z} \right|^2$$

dans P'_j et les fonctions

$$\nu'_j(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{P'_j} \mathfrak{z}'_j(\bar{x}, \bar{y}) \log r \, d\bar{x} \, d\bar{y} + \frac{1}{\pi} \int_{P'_j} \mathfrak{z}'_j(\bar{x}, \bar{y}) \log r \, d\bar{x} \, d\bar{y} - \varphi'_j(x, y)$$

dans P_j^* .

En approchant la fonction $\mathfrak{z}(x, y)$ intégrable au sens de Lebesgue par des fonctions bornées continûment dérivables (l'approximation consiste en ce que l'intégrale de la valeur absolue de la différence entre la fonction approchée et la fonction donnée, étendue à n'importe quel domaine situé dans une région bornée, est inférieure à un petit nombre

donné d'avance³⁾⁾ on peut facilement démontrer que $v'_j(x, y)$ est harmonique dans P_j^* .

Je définis la fonction $\dot{z}'(x, y)$ dans Q' , en posant

$$\dot{z}'(x, y) = \dot{z}'(x, y) \quad \text{si } (x, y) \text{ appartient à } G$$

et

$$\dot{z}'(x, y) = \dot{z}'_j(x, y) \quad \text{si } (x, y) \text{ appartient à } P'_j.$$

Je désigne par h la borne supérieure des fonctions

$$\left| \frac{df_j(\eta)}{d\eta} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{df_j(\eta)}{d\eta} \right|^{-1} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, J$$

dans O^* .

On a alors

$$|\mu'_j(\alpha, \beta)| \leq h^3 M, \quad |\underline{\mu}'_j(\alpha, \beta)| \leq h^2 M, \quad |\dot{z}'_j(x, y)| \leq h^4 M,$$

par conséquent

$$|\dot{z}'(x, y)| \leq h^4 M.$$

Je désigne par l un point sur F ; par dl l'élément d'arc au point l de la courbe F_j sur laquelle se trouve l , l'arc étant dirigé dans le sens obtenu en faisant tourner la normale intérieure de l'angle $-\frac{\pi}{2}$. Je pose enfin

$$q'(l) = \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r_l}{\partial l} d\bar{x} d\bar{y}$$

où

$$r_l^2 = (x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2.$$

Je désigne par $\chi'(x, y)$ la fonction harmonique régulière dans G dont la dérivée normale intérieure à F est à égale à $-q'(l)$,

$$u_{\dot{z}'}(x, y) = \frac{\partial \chi'(x, y)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y},$$

$$v_{\dot{z}'}(x, y) = \frac{\partial \chi'(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y}$$

car les fonctions $\int_{P'_j} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \log r d\bar{x} d\bar{y}$ sont harmoniques dans G .

Je désigne par e la partie commune du cercle e^* de rayon $2r_{12} \leq 1$, décrit de (x_1, y_1) comme centre, et de Q' ; posons $r_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2$,

³⁾ P. ex. à l'aide des fonctions de Stekloff

$$\dot{z}'^k(x, y) = \frac{k^4}{16} \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} d\bar{x} \int_{\bar{y}-\frac{1}{k}}^{\bar{y}+\frac{1}{k}} d\bar{y} \int_{y-\frac{1}{k}}^{y+\frac{1}{k}} d\bar{y} \int_{\bar{y}-\frac{1}{k}}^{\bar{y}+\frac{1}{k}} d\bar{y} \delta'(\bar{x}, \bar{y}).$$

$r_2^2 = (x_2 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{y})^2$; lorsque le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est en dehors de e^* , on a $\frac{r_1}{2} \leq r_1 - r_{12} \leq r_2$, donc

$$\begin{aligned}
 & \left| -\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y_1 - y}{r_1^2} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y_2 - \bar{y}}{r_2^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_e \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y_1 - \bar{y}}{r_1^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_e \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y_2 - \bar{y}}{r_2^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_{G-e} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{y_1 - \bar{y}}{r_1^2} - \frac{y_2 - \bar{y}}{r_2^2} \right) d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'-G-e} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{y_1 - \bar{y}}{r_1^2} - \frac{y_2 - \bar{y}}{r_2^2} \right) d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \leq \frac{2Mh^4}{\pi} \int_{e^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1} + \frac{4}{\pi} r_{12} \int_{G-e} |\dot{z}'(\bar{x}, \bar{y})| \cdot \frac{1}{r_1^2} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & \quad + \frac{4Mh^4}{\pi} r_{12} \int_{Q'-G-e} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1^2} \\
 & \leq \frac{2Mh^4}{\pi} \int_{e^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1} + \frac{4M}{\pi} r_{1,2} \int_{\infty-e^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1^2 (1 + \sqrt{r_1^2 - 4r_{12}^2})^{1+\omega}} \\
 & \quad + \frac{4Mh^4}{\pi} r_{1,2} \int_{Q'-G-e} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1^2} \\
 & \leq \frac{2Mh^4}{\pi} \int_{e^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1} + \frac{4 \cdot 2^{1+\omega} M}{\pi} r_{12} \int_{\infty-e^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1^2 (1 + r_1)^{1+\omega}} \\
 & \quad + \frac{4Mh^4}{\pi} r_{12} \int_{Q'-G-e} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_1^2},
 \end{aligned}$$

où $\int_{\infty-e^*}$ désigne l'intégration dans tout le plan en dehors de e^* .

La fonction

$$\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y}$$

vérifie des inégalités analogues, par conséquent, les fonctions:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial y} d\bar{x} d\bar{y} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y}$$

possèdent la propriété I.

Si le point l se trouve sur F_i , on a

$$\begin{aligned} q'(l) &= \frac{1}{\pi} \int_{Q_j'} \dot{\mathfrak{z}}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r_l}{\partial l} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{d v_j'(x, y)}{d l} + \frac{d \varphi_j'(x, y)}{d l} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{Q_j'} \dot{\mathfrak{z}}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r_l}{\partial l} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{d v_j'(x, y)}{d l}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d q'(l)}{d l} = \frac{1}{\pi} \int_{Q_j'} \dot{\mathfrak{z}}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \log r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{d^2 v_j'(x, y)}{d l^2}.$$

Lorsque le point (x, y) se trouve sur les courbes $L_{j,1}$ ou $L_{j,2}$ on a

$$|v_j'(x, y)| \leq \lg \delta'' \frac{h^4 M}{\pi} \int_{P_j' + P_j'} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{h^2 M}{\pi} \lg \delta' \int_{O' + O'} d\bar{\alpha} d\bar{\beta}.$$

Comme les distances de F_i aux courbes $L_{j,1}$ et $L_{j,2}$ ne sont pas inférieures à $\frac{1}{\delta''} > 0$, et comme $v_j'(x, y)$ est harmonique dans P_j^* , il s'ensuit que $\frac{d^2 v_j'(x, y)}{d l^2}$ ne surpasse pas une constante ne dépendant que de G et de M .

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q_j'} \dot{\mathfrak{z}}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \log r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{G - P_j'} |\dot{\mathfrak{z}}'(\bar{x}, \bar{y})| \frac{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}{r_l^2} + \frac{h^4 M}{\pi \delta''^2} \int_{Q_j' - G} d\bar{x} d\bar{y} \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{\infty - d} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_l^2 (1 + |r_l^2 - \delta''^2|)^{1+\omega}} + \frac{M h^4}{\pi \delta''^2} \int_{Q_j' - G} d\bar{x} d\bar{y} \\ &\leq \frac{M (1 + \delta''')^{1+\omega}}{\pi} \int_{\infty - d} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_l^2 (1 + r_l)^{1+\omega}} + \frac{M h^4}{\pi \delta''^2} \int_{Q_j' - G} d\bar{x} d\bar{y}, \end{aligned}$$

où d désigne le cercle de rayon δ''' tracé du point l comme centre; $\frac{d q'(l)}{d l}$ n'est donc pas supérieure à une constante dépendant uniquement de G et M .

En vertu des propriétés connues des fonctions harmoniques, il en résulte que les dérivées premières de $\chi'(x, y)$ possèdent la propriété I. Par conséquent $u_j(x, y)$, et $v_j(x, y)$ la possèdent aussi.

Propriété II. Si $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ et $x''(x, y)$, $y''(x, y)$ déterminent des représentations topologiques de la région fermée G sur elle-même conservant les aires et si

$$j[x'(x, y), y'(x, y)] = j[x''(x, y), y''(x, y)] = j(x, y),$$

$$\sqrt{[x'(x, y) - x''(x, y)]^2 + [y'(x, y) - y''(x, y)]^2} = \varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

alors

$$(6) \quad \sqrt{[u_{j'}(x, y) - u_{j''}(x, y)]^2 + [v_{j'}(x, y) - v_{j''}(x, y)]^2} \leq E \cdot \varepsilon \cdot \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

où E ne dépend que de G , M et ω .

Démonstration. Je désigne par K_5 et K_6 les circonférences de rayon $1 - \frac{3}{2}\delta$ et $\frac{1}{1 - \frac{3}{2}\delta}$, tracées de l'origine des coordonnées comme

centre dans la plan α, β , et par O^{**} , $O' + \underline{O}' \subset O^{**} \subset O^*$, la région fermée contenue entre K_5 et K_6 (ces désignations sont les mêmes que celles utilisées au cours de la démonstration de la propriété I). Je désigne par P_j^{**} , $j = 1, 2, \dots, J$, $P_j' + \underline{P}_j' \subset P_j^{**} \subset P_j^*$, la région fermée dans le plan x, y , sur la quelle est représentée O^{**} par la fonction $f_j(\eta)$, et par $L_{j,5}$ et $L_{j,6}$ les courbes fermées sur les quelles sont représentées K_5 et K_6 .

L'inverse des distances de K_1 et K_2 à O^{**} ne dépasse pas un certain nombre $\Delta' \geq \delta'$; l'inverse des distances de $L_{j,1}$ et $L_{j,3}$ à P_j^{**} , $j = 1, 2, \dots, J$, ne dépasse pas un certain nombre $\Delta'' \geq \delta''$; la distance de $P_j' + \underline{P}_j'$ à $L_{j,5} + L_{j,6}$, $j = 1, 2, \dots, J$, est au moins égale à un certain nombre $E^* > 0$. Je désigne par $E > 0$ les plus petit des deux nombres E^* et $\frac{\delta'''}{2}$ et je pose $\Delta''' = \frac{\delta'''}{2} > 0$.

Je suppose $\varepsilon \leq E$.

Je définis les fonctions $\hat{x}(x, y)$, $\hat{y}(x, y)$, par les équations

$$\hat{x}[x'(x, y), y'(x, y)] = x''(x, y),$$

$$\hat{y}[x'(x, y), y'(x, y)] = y''(x, y).$$

Les fonctions $x(x, y)$ et $\hat{y}(x, y)$ déterminent une représentation topologique de G sur elle-même en conservant les aires et vérifient l'inégalité

$$\sqrt{[\hat{x}(x, y) - x]^2 + [\hat{y}(x, y) - y]^2} \leq \varepsilon \leq E.$$

Soient: $P_j'', P_j' \subset P_j^{**}$, les régions fermées sur les quelles sont représentées les P_j , $j = 1, 2, \dots, J$, par $\hat{x}(x, y)$, $\hat{y}(x, y)$, et O_j'' —les régions fermées sur les quelles sont représentées les P_j'' par $f_j^{-1}(z)$ dans le plan (α, β) . Soient de plus $\underline{O}_j'', O_j'' + \underline{O}_j'' \subset O^{**}$, les régions fermées sur les quelles les O_j'' sont représentées par rayons réciproques, par rapport au

cercle K ; et $\underline{P}_j'', P_j'' + \underline{P}_j'' \subset P_j^{**}$ — les régions fermées sur les quelles sont représentées les $\underline{Q}_j''$ dans le plan (x, y) par $f_j(\eta)$. Je pose encore

$$P_0'' = G - \sum_{j=1}^J P_j'', \quad Q'' = P_0'' + \sum_{j=1}^J P_j'' + \underline{P}_j'' = G + \sum_{j=1}^J \underline{P}_j'',$$

$$Q_j'' = Q'' - (P_j'' + \underline{P}_j'').$$

L'inverse des distances de K_1 et K_2 à $O_j'' + \underline{Q}_j''$ ne dépasse pas le nombre Δ' , l'inverse des distances de $L_{j,1}$ et $L_{j,2}$ à $P_j'' + \underline{P}_j''$ ne dépasse pas le nombre Δ'' , et la distance de Q_j'' à F_j est au moins égale au nombre Δ''' .

Les fonctions

$$\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta) = R_j^{-1} \{ \hat{x}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)], \hat{y}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)] \},$$

$$\hat{\beta}_j(\alpha, \beta) = J_j^{-1} \{ \hat{x}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)], \hat{y}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)] \}$$

déterminent une représentation topologique de O' sur O_j'' , et les fonctions

$$\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta) = \underline{\alpha} \{ \underline{\alpha}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)], \hat{\beta}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)] \},$$

$$\hat{\beta}_j(\alpha, \beta) = \underline{\beta} \{ \hat{\alpha}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)], \hat{\beta}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)] \}$$

déterminent une représentation topologique de O' sur $\underline{O}_j''$.

Ces fonctions vérifient les inégalités

$$\sqrt{[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta) - \alpha]^2 + [\hat{\beta}_j(\alpha, \beta) - \beta]^2} \leq h \varepsilon,$$

$$\sqrt{[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta) - \alpha]^3 + [\hat{\beta}_j(\alpha, \beta) - \beta]^3} \leq \frac{h}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2} \varepsilon;$$

$$\left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right| = \left| \frac{\left| \frac{d f_j^{-1}(z)}{dz} \right|^2}{\substack{x = \hat{x}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)] \\ y = \hat{y}[R_j(\alpha, \beta), J_j(\alpha, \beta)]}} \cdot \left| \frac{d f_j^{-1}(z)}{dz} \right|_{\substack{x = R_j(\alpha, \beta) \\ y = J_j(\alpha, \beta)}}^{-2} - 1 \right|$$

$$\leq 2 h^3 h' \varepsilon,$$

où h' désigne la borne supérieure de $\frac{d^2 f_j^{-1}(z)}{dz^2}$ dans P_j^{**} , $j = 1, 2, 3, \dots, J$;

$$\left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha' \cdot d\beta'} \right|_{\substack{\alpha' = \underline{\alpha}(\alpha, \beta) \\ \beta' = \underline{\beta}(\alpha, \beta)}} \cdot \left| \frac{1}{\{ \hat{\alpha}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)] + i \hat{\beta}_j[\underline{\alpha}(\alpha, \beta), \underline{\beta}(\alpha, \beta)] \}^2} \right|^2$$

$$\cdot \left| \frac{1}{(\alpha + i\beta)^2} - 1 \right|^2 \leq \left[\frac{2 h^3 h'}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^8} + \frac{4 h}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^9} \right] \varepsilon,$$

$\frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta}$, $\frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta}$ désignant les rapports des aires.

Les fonctions

$$\begin{aligned}\hat{x}_j(x, y) &= R_j \{ \hat{\alpha}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)], \hat{\beta}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)] \}, \\ \hat{y}_j(x, y) &= J_j \{ \hat{\alpha}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)], \hat{\beta}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)] \}\end{aligned}$$

déterminent une représentation topologique de $\underline{P}_j$ sur $\underline{P}_j'$, et vérifient les inégalités:

$$\begin{aligned}\sqrt{[\hat{x}_j(x, y) - x]^2 + [\hat{y}_j(x, y) - y]^2} &\leq \frac{h^2}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2} \varepsilon, \\ \left| \frac{d\hat{x}_j \cdot d\hat{y}_j}{dx \cdot dy} - 1 \right| &= \left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta} \right|_{\substack{\alpha = R_j^{-1}(x, y) \\ \beta = J_j^{-1}(x, y)}} \cdot \left| \frac{df_j(\eta)}{d\eta} \right|_{\substack{\alpha = \hat{\alpha}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)] \\ \beta = \hat{\beta}_j [R_j^{-1}(x, y), J_j^{-1}(x, y)]}}^2 \\ &\quad \cdot \left| \frac{df_j(\eta)}{d\eta} \right|_{\substack{\alpha = R_j^{-1}(x, y) \\ \beta = J_j^{-1}(x, y)}}^{-2} - 1 \\ &\leq \left[\frac{2h^7 h'}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^8} + \frac{4h^5}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^9} + \frac{2h^4 h''}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2} \right] \varepsilon,\end{aligned}$$

où h'' désigne la borne supérieure de $\left| \frac{d^3 f_j(\eta)}{d\eta^3} \right|_{j=1, 2, \dots, J}$ dans O^{**} .

Je définis dans Q' les fonctions $\hat{x}(x, y)$ et $\hat{y}(x, y)$ en posant

$$\begin{cases} \hat{x}(x, y) = \hat{x}_j(x, y) \\ \hat{y}(x, y) = \hat{y}_j(x, y) \end{cases} \quad \text{dans } G$$

et

$$\begin{cases} \hat{x}(x, y) = \hat{x}_j(x, y) \\ \hat{y}(x, y) = \hat{y}_j(x, y) \end{cases} \quad \text{dans } \underline{P}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Les fonctions $\hat{x}(x, y)$ et $\hat{y}(x, y)$ déterminent une représentation topologique de Q' sur Q'' .

Je désigne par ϑ le plus grand des nombres

$$1, h, \frac{h}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2}, \frac{h^3}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2}$$

et par γ_1 le plus grand des nombres

$$2h^3 h', \frac{2h^3 h'}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^8} + \frac{4h}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^9}, \frac{2h^7 h'}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^8} + \frac{4h^5}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^9} + \frac{2h^4 h''}{\left(1 - \frac{3}{2}\delta\right)^2}.$$

On a alors les inégalités:

$$\sqrt{[\dot{x}(x, y) - x]^2 + [\dot{y}(x, y) - y]^2} \leq \vartheta \cdot \varepsilon,$$

$$\sqrt{[\hat{x}_j(x, y) - x]^2 + [\hat{y}_j(x, y) - y]^2} \leq \vartheta \cdot \varepsilon,$$

$$\sqrt{[\dot{x}(x, y) - x]^2 + [\dot{y}(x, y) - y]^2} \leq \vartheta \cdot \varepsilon,$$

$$\sqrt{[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta) - \alpha]^2 + [\hat{\beta}_j(\alpha, \beta) - \beta]^2} \leq \vartheta \cdot \varepsilon,$$

$$\sqrt{[\alpha_j(\alpha, \beta) - \alpha]^2 + [\beta_j(\alpha, \beta) - \beta]^2} \leq \vartheta \cdot \varepsilon$$

et

$$\left| \frac{d\dot{x}_j \cdot d\dot{y}}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right| \leq \gamma_1 \cdot \varepsilon, \quad \left| \frac{d\dot{x} \cdot d\dot{y}}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right| \leq \gamma_1 \cdot \varepsilon,$$

$$\left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right| \leq \gamma_1 \cdot \varepsilon, \quad \left| \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\alpha \cdot d\beta} - 1 \right| \leq \gamma_1 \cdot \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

D'une manière analogue, comme je l'ai fait précédemment, en remplaçant seulement l'indice ' par l'indice '' je définis les fonctions $\mu_j''(\alpha, \beta)$ dans O_j'' , $\underline{\mu}_j''(\alpha, \beta)$ dans $\underline{O}_j''$, $\psi_j''(\alpha, \beta)$ dans tout le plan α, β , $\varphi_j''(x, y)$ dans P_j^* , $\underline{\varphi}_j''(x, y)$ dans $\underline{P}_j^*$, $\dot{\varphi}_j''(x, y)$ dans Q'' , $\nu_j''(x, y)$ dans P_j^* , $q''(l)$ sur F et $\chi''(x, y)$ dans G .

Evidemment

$$u_{\dot{\varphi}_j''}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{\varphi}_j''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{\partial \chi''(x, y)}{\partial x},$$

$$v_{\dot{\varphi}_j''}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{\varphi}_j''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial \bar{x}} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{\partial \chi''(x, y)}{\partial y};$$

$$\dot{\varphi}_j''[\dot{x}(x, y); \dot{y}(x, y)] = \dot{\varphi}_j'(x, y).$$

$$|\mu_j''[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta), \hat{\beta}_j(\alpha, \beta)] - \mu_j'(\alpha, \beta)| \leq 2h h'' M \vartheta \varepsilon,$$

$$|\underline{\mu}_j''[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta), \hat{\beta}_j(\alpha, \beta)] - \underline{\mu}_j'(\alpha, \beta)| \leq 2h(h'' + 2h) M \vartheta \varepsilon,$$

$$|\dot{\varphi}_j''[\dot{x}_j(x, y), \dot{y}_j(x, y)] - \dot{\varphi}_j'(x, y)| \leq 2h^3 M \vartheta (h'' + 2h + h') \varepsilon.$$

Je désigne par γ_3 le plus grand des nombres

$$2h h'' M \vartheta, \quad 2h M \vartheta (h'' + 2h) \quad \text{et} \quad 2h^3 M \vartheta (h'' + 2h + h')$$

on aura alors

$$|\dot{\varphi}_j''[\dot{x}_j(x, y), \dot{y}_j(x, y)] - \dot{\varphi}_j'(x, y)| \leq \gamma_3 \cdot \varepsilon,$$

$$|\dot{\varphi}_j''[\dot{x}(x, y), \dot{y}(x, y)] - \dot{\varphi}_j'(x, y)| \leq \gamma_3 \cdot \varepsilon,$$

$$|\mu_j''[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta), \hat{\beta}_j(\alpha, \beta)] - \mu_j'(\alpha, \beta)| \leq \gamma_3 \cdot \varepsilon,$$

$$|\underline{\mu}_j''[\hat{\alpha}_j(\alpha, \beta), \hat{\beta}_j(\alpha, \beta)] - \underline{\mu}_j'(\alpha, \beta)| \leq \gamma_3 \cdot \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Je désigne par C' la partie commune du cercle C de rayon $2\vartheta\varepsilon \leq \vartheta$, décrit du point (x, y) comme centre et de Q' , et par C'' l'ensemble sur lequel C' est représenté par $\dot{x}(x, y)$ et $\dot{y}(x, y)$. C'' est contenu dans le cercle C^* de rayon $3\vartheta\varepsilon$, décrit du point (x, y) comme centre.

Je pose

$$\dot{r}^2 = [x - \dot{x}(\bar{x}, \bar{y})]^2 + [y - \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})]^2;$$

lorsque le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est en dehors de C , on a

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} &\leq r - \vartheta\varepsilon \leq \dot{r}. \\ \left| -\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{C'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_{C''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_{G-C'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{y - \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})}{\dot{r}^2} - \frac{y - \bar{y}}{r^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'-G-C'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{y - \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})}{\dot{r}^2} - \frac{y - \bar{y}}{r^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'-G-C'} \left\{ \dot{z}''[\dot{x}(\bar{x}, \bar{y}), \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})] \frac{d\dot{x} \cdot d\dot{y}}{d\bar{x} d\bar{y}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \right\} \frac{y - \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})}{\dot{r}^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ &\leq \frac{2Mh^4}{\pi} \int_{C^*} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r} + \frac{4M(1+\vartheta)^{1+\omega}}{\pi} \cdot \varepsilon \int_{\infty-C} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r^2(1+r)^{1+\omega}} \\ &\quad + \frac{4Mh^4\vartheta}{\pi} \cdot \varepsilon \int_{Q'-G-C} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r^2} + \frac{Mh^4\gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \varepsilon \int_{Q'-G-C} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r}. \end{aligned}$$

Les fonctions

$$\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{x - \bar{x}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{x - \bar{x}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y}$$

vérifient l'inégalité analogue, par conséquent, les fonctions

$$-\frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{Q'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{x - \bar{x}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y}$$

et les fonctions

$$-\frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{y - \bar{y}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{Q''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{x - \bar{x}}{r^2} d\bar{x} d\bar{y}$$

vérifient l'inégalité (6).

Si le point l se trouve sur F_j on a

$$\frac{d q'(l)}{d l} - \frac{d q''(l)}{d l} = \frac{1}{\pi} \int_{Q_j'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} - \frac{1}{\pi} \int_{Q_j''} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} \\ + \frac{d^2 v_j'(x_l, y_l)}{d l^2} - \frac{d^2 v_j''(x_l, y_l)}{d l^2}.$$

Je pose maintenant

$$\varrho_j^2(x, y) = [R_j^{-1}(x, y) - \bar{\alpha}]^2 + [J_j^{-1}(x, y) - \bar{\beta}]^2, \\ \hat{\varrho}_j^2(x, y) = [R_j^{-1}(x, y) - \hat{\alpha}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [J_j^{-1}(x, y) - \hat{\beta}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2, \\ \underline{\varrho}_j^2(x, y) = [R_j^{-1}(x, y) - \underline{\alpha}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [J_j^{-1}(x, y) - \underline{\beta}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2.$$

Lorsque le point (x, y) se trouve sur les courbes $L_{j,1}$ où $L_{j,2}$ on a

$$\left| v_j'(x, y) - v_j''(x, y) \right| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{P_j' + P_j'} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) [\log r - \log \bar{r}] d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_{P_j' + P_j'} \left\{ \dot{z}'[\bar{x}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y}(\bar{x}, \bar{y})] \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{d\bar{x} d\bar{y}} - \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \right\} \lg \bar{r} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_{O'} \mu_j'(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) [\lg \varrho_j(x, y) - \lg \hat{\varrho}_j(x, y)] d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \right| \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_{O'} \left\{ \mu_j''[\hat{\alpha}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \hat{\beta}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})] \frac{d\hat{\alpha}_j \cdot d\hat{\beta}_j}{d\bar{\alpha} d\bar{\beta}} - \mu_j'(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \right\} \lg \hat{\varrho}_j(x, y) d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \right| \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_{O'} \mu_j'(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) [\lg \varrho_j(x, y) - \lg \underline{\varrho}_j(x, y)] d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \right| \\ + \left| \frac{1}{\pi} \int_{O'} \left\{ \mu_j''[\underline{\alpha}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \underline{\beta}_j(\bar{\alpha}, \bar{\beta})] \frac{d\underline{\alpha}_j d\underline{\beta}_j}{d\bar{\alpha} d\bar{\beta}} - \mu_j'(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \right\} \lg \underline{\varrho}_j(x, y) d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \right| \\ \leq \frac{M h^4 \vartheta \Delta''}{\pi} \varepsilon \int_{P_j' + P_j'} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{M h^4 \gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \lg \Delta'' \varepsilon \int_{P_j' + P_j'} d\bar{x} d\bar{y} \\ + \frac{M h^3 \vartheta \Delta'}{\pi} \varepsilon \int_{O' + O'} d\bar{\alpha} d\bar{\beta} + \frac{M h^3 \gamma_1 + \gamma_2}{\pi} \lg \Delta' \varepsilon \int_{O' + O'} d\bar{\alpha} d\bar{\beta}.$$

Comme les distances de F_j aux courbes $L_{j,1}$ et $L_{j,2}$ ne sont pas inférieures à $\frac{1}{\Delta''} > 0$, et $v_j'(x, y) - v_j''(x, y)$ est harmonique dans P_j^* , il s'ensuit que

$$\left| \frac{d^2 v_j'(x_l, y_l)}{d l^2} - \frac{d^2 v_j''(x_l, y_l)}{d l^2} \right|$$

ne dépasse pas ε multiplié par une constante ne dépendant que de G et de M .

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'_j} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} - \frac{1}{\pi} \int_{Q''_j} \dot{z}''(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'_j - G} \left\{ \dot{z}''[\dot{x}(\bar{x}, \bar{y}), \dot{y}(\bar{x}, \bar{y})] \frac{d\dot{x} d\dot{y}}{d\bar{x} d\bar{y}} - \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \right\} \frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & + \left| \frac{1}{\pi} \int_{Q'_j - G} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{\partial^2 \lg r_l}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \lg \dot{r}_l}{\partial l^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & + \left| \frac{1}{\pi} \int_{G - P'_j} \dot{z}'(\bar{x}, \bar{y}) \left[\frac{\partial^2 \log r_l}{\partial l^2} - \frac{\partial^2 \log \dot{r}_l}{\partial l^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} \right| \\
 & \leq \frac{\gamma_1 M h^4 + \gamma_2}{\pi \Delta'''^2} \varepsilon \int_{Q' - G} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{2 M h^4 \partial}{\pi \Delta'''^3} \varepsilon \int_{Q' - G} d\bar{x} d\bar{y} + \frac{16 M}{\pi} \varepsilon \int_{\infty - d} \frac{d\bar{x} d\bar{y}}{r_l^3},
 \end{aligned}$$

où d désigne le cercle de rayon $\delta''' \geq 2\varepsilon$ décrit du point l comme centre.

Il en résulte que $\frac{dq'(l)}{dl} - \frac{dq''(l)}{dl}$ ne dépasse pas ε multiplié par une constante ne dépendant que de G et de M . En vertu des propriétés connues des fonctions harmoniques, il s'ensuit que les dérivées premières de $\chi'(x, y)$ et de $\chi''(x, y)$ satisfont à l'inégalité II.

Les fonctions $u_3(x, y)$, $v_3(x, y)$ et les fonctions $u_{3''}(x, y)$ et $v_{3''}(x, y)$ vérifient, donc, l'inégalité (6) lorsque $\varepsilon \leq E$, et comme elles sont bornées, la borne ne dépendant que de G , ω et M . (ce qui est facile à démontrer), ces fonctions vérifient l'inégalité (6) aussi pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Propriété III. Il résulte de la propriété I que les équations

$$(7) \quad \frac{\partial x(a, b, t)}{\partial t} = u_3[x(a, b, t), y(a, b, t)], \quad \frac{\partial y(a, b, t)}{\partial t} = v_3[x(a, b, t), y(a, b, t)],$$

$$x(a, b, 0) = a, \quad y(a, b, 0) = b$$

ont une solution et n'en ont qu'une.

Propriété IV. Si

$$r_{1,2}(t) = \sqrt{[x(a_1, b_1, t) - x(a_2, b_2, t)]^2 + [y(a_1, b_1, t) - y(a_2, b_2, t)]^2},$$

$$r_{1,2} = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

où $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ sont définies en III, $t \geq 0$, $r_{1,2} \leq (\frac{1}{2})^{e^{Ht}}$, on a

$$(8) \quad r_{1,2}^{e^{Ht}} \leq r_{1,2}(t) \leq r_{1,2}^{e^{-Ht}}.$$

Si

$$r_{1,2}(t) \leq (\frac{1}{2})^{e^{Ht}},$$

on a

$$(9) \quad r_{1,2}^{e^{Ht}}(t) \leq r_{1,2} \leq r_{1,2}^{e^{-Ht}}(t).$$

En désignant $u_{\delta'}(a, b, t) = u_{\delta'}[x(a, b, t), y(a, b, t)]$, $v_{\delta'}(a, b, t) = v_{\delta'}[x(a, b, t), y(a, b, t)]$,

$$\begin{aligned}
 r_{1,2}(t) &= \sqrt{\left\{ a_1 - a_2 + \int_0^t [u_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - u_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2 + \left\{ b_1 - b_2 + \int_0^t [v_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - v_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2}; \\
 \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} &- \sqrt{\left\{ \int_0^t [u_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - u_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2 + \left\{ \int_0^t [v_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - v_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2} \leq r_{1,2}(t) \\
 &\leq \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} + \sqrt{\left\{ \int_0^t [u_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - u_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2 + \left\{ \int_0^t [v_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - v_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)] d\tau \right\}^2}, \\
 \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} &- \int_0^t \sqrt{[u_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - u_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)]^2 + [v_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - v_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)]^2} d\tau \leq r_{1,2}(t) \\
 &\leq \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} + \int_0^t \sqrt{[u_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - u_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)]^2 + [v_{\delta'}(a_1, b_1, \tau) - v_{\delta'}(a_2, b_2, \tau)]^2} d\tau;
 \end{aligned}$$

en tant que

$$r_{1,2}(t) \leq \frac{1}{2}, \quad r_{1,2} - \int_0^t H \cdot r_{1,2}(\tau) \lg \frac{1}{r_{1,2}(\tau)} d\tau \leq r_{1,2}(t) \leq r_{1,2} + \int_0^t H \cdot r_{1,2}(\tau) \lg \frac{1}{r_{1,2}(\tau)} d\tau;$$

donc $\underline{r}(t) \leq r_{1,2}(t) \leq \overline{r}(t)$, si

$$\underline{\varphi}(t) = r_{1,2} - \int_0^t H \underline{\varphi}(\tau) \lg \frac{1}{\underline{\varphi}(\tau)} d\tau, \quad \overline{\varphi}(t) = r_{1,2} + \int_0^t H \overline{\varphi}(\tau) \lg \frac{1}{\overline{\varphi}(\tau)} d\tau;$$

d'où résultent les inégalités (8) et (9).

Propriété V. Les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, définies en III, déterminent une représentation topologique de la région fermée G sur elle-même conservant les aires.

Il résulte de la propriété IV que les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ n'admettent pas à la fois de valeurs égales à deux points distincts, elles déterminent donc une représentation topologique. Les fonctions $u_{j'}(x, y)$, $v_{j'}(x, y)$ peuvent être approchées par des suites uniformément convergentes de fonctions $u_{j'}^k(x, y)$, $v_{j'}^k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots$, continûment dérivables par rapport à x et y et remplissant les conditions

$$\frac{\partial u_{j'}^k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_{j'}^k(x, y)}{\partial y} = 0,$$

$$n_x(l) u_{j'}^k(x_l, y_l) + n_y(l) v_{j'}^k(x_l, y_l) = 0$$

lorsque le point l se trouve sur F^4 .

Les fonctions $x^k(a, b, t)$ et $y^k(a, b, t)$ définies par les conditions

$$\frac{\partial x^k(a, b, t)}{\partial t} = u_{j'}^k[x^k(a, b, t), y^k(a, b, t)], \quad \frac{\partial y^k(a, b, t)}{\partial t} = v_{j'}^k[x^k(a, b, t), y^k(a, b, t)]$$

et par les conditions initiales

$$x^k(a, b, 0) = a; \quad y^k(a, b, 0) = b$$

sont continûment dérivables par rapport à a et b . Ces fonctions déterminent une représentation topologique de G sur elle-même conservant les aires. Les suites $\{x^k(a, b, t)\}$ et $\{y^k(a, b, t)\}$ $k = 1, 2, \dots$ convergent uniformément vers les fonctions $x(a, b, t)$ et $y(a, b, t)$ resp. d'où résulte la propriété V.

Propriété VI. Etant données $n - 1$ couples des fonctions $x_k(x, y)$, $y_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, déterminant des représentations topologiques de G sur elle-même conservant les aires; n fonctions correspondantes $z_k(x, y)$ telles que $z_0(x, y) = z(x, y)$ et

$$z_k[x_k(x, y), y_k(x, y)] = z(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, (n - 1)$$

et $n + 1$ nombres $t_0, t_1, \dots, t_n$, tels que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$; les équations:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x^n(a, b, t)}{\partial t} &= u_{j'n}[x^n(a, b, t), y^n(a, b, t)], \\ \frac{\partial y^n(a, b, t)}{\partial t} &= v_{j'n}[x^n(a, b, t), y^n(a, b, t)] \end{aligned}$$

⁴ P. ex. $u_{j'}^k(x, y) = u_{j',k}(x, y)$, $v_{j'}^k(x, y) = v_{j',k}(x, y)$, où $z^k(x, y)$ a été définie dans³).

pour

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$x^n(a, b, 0) = a, \quad y^n(a, b, 0) = b$$

ont une solution continue et n'en ont qu'une. Les fonctions $x^n(a, b, t)$ et $y^n(a, b, t)$ possèdent la propriété IV.

§ 2.

Résolution pour $0 \leq t \leq T$ du système des conditions:

1° Les fonctions $x_\beta(a, b, t)$ et $y_\beta(a, b, t)$ déterminent une représentation topologique de G sur elle-même.

$$(11) \quad 2^\circ \quad \frac{\partial x_\beta(a, b, t)}{\partial t} = u_{\beta t}(x, y), \quad \frac{\partial y_\beta(a, b, t)}{\partial t} = v_{\beta t}(x, y),$$

$$3^\circ \quad \beta_t[x_\beta(a, b, t), y_\beta(a, b, t)] = \beta(a, b),$$

$$4^\circ \quad x_\beta(a, b, 0) = a, \quad y_\beta(a, b, 0) = b,$$

et la démonstration qu'il n'existe qu'une solution unique.

Soient

$$t_k^n = \frac{T}{n} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad t_n^n = T.$$

En vertu de VI il existe une et une seule solution continue du système d'équations

$$(12) \quad \frac{\partial x_\beta^n(a, b, t)}{\partial t} = u_{\beta_k^n}[x_\beta^n(a, b, t), y_\beta^n(a, b, t)],$$

$$\frac{\partial y_\beta^n(a, b, t)}{\partial t} = v_{\beta_k^n}[x_\beta^n(a, b, t), y_\beta^n(a, b, t)]$$

pour

$$t_k^n < t < t_{k+1}^n,$$

$$\beta_k^n[x_\beta^n(a, b, t_k^n), y_\beta^n(a, b, t_k^n)] = \beta(a, b),$$

$$x_\beta^n(a, b, 0) = a, \quad y_\beta^n(a, b, 0) = b,$$

$x_\beta^n(a, b, t)$ et $y_\beta^n(a, b, t)$ déterminent une représentation, topologique et conservant les aires, de G sur elle-même, et possèdent la propriété IV.

Comme nous savons:

$$\sqrt{u_{\beta_k^n}^2(x, y) + v_{\beta_k^n}^2(x, y)} \leq N',$$

où N' ne dépend que de G , M et ω .

Posons

$$R_{x,y} = x^2 + y^2$$

on a

$$1 + R_{x_3^n(a, b, t) \cdot y_3^n(a, b, t)} \leq 1 + R_{ab} + N' T \leq (1 + R_{ab})(1 + N' T),$$

$$1 + R_{ab} \leq \left[1 + R_{x_3^n(a, b, t) y_3^n(a, b, t)} \right] (1 + N' T);$$

d'où

$$|\mathfrak{z}_k^n[x_3^n(a, b, t_k^n), y_3^n(a, b, t_k^n)]| \leq \mathfrak{z}(a, b) \leq \frac{M}{(1 + R_{ab})^{1+\omega}}$$

$$\leq \frac{M(1 + N' T)^{1+\omega}}{\left[1 + R_{x_3^n(a, b, t_k^n) y_3^n(a, b, t_k^n)} \right]^{1+\omega}}$$

et

$$\mathfrak{z}_k(x, y) \leq \frac{M(1 + N' T)^{1+\omega}}{(1 + R_{xy})^{1+\omega}}.$$

En vertu des lemmes connus de la théorie du potentiel, la dernière inégalité a pour conséquence

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_G \mathfrak{z}_k^n(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial \bar{y}} d\bar{x} d\bar{y} \right| \leq \frac{N''}{(1 + R_{xy})^\omega},$$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_G \mathfrak{z}_k^n(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \log r}{\partial x} d\bar{x} d\bar{y} \right| \leq \frac{N''}{(1 + R_{xy})^\omega},$$

où N'' ne dépend que de G , M , ω et T , d'où il résulte que

$$(13) \quad |u_{\delta_k^n}(x, y)| \leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega}, \quad |v_{\delta_k^n}(x, y)| \leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega},$$

$$|x_3^n(a, b, t) - a| \leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega}, \quad |y_3^n(a, b, t) - b| \leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega}$$

où N ne dépend que de G , M , ω et T .

En vertu de la propriété IV et de (12) et (13), on peut, en se basant sur le théorème d'Arzela, extraire des suites $x_3^n(a, b, t)$, $y_3^n(a, b, t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ des suites des fonctions $x_3^m(a, b, t)$ et $y_3^m(a, b, t)$, $m = n_1, n_2, \dots$ uniformément convergentes dans G et pour $0 \leq t \leq T$, vers les fonctions $x_3(a, b, t)$ et $y_3(a, b, t)$.

Les fonctions $x_3(a, b, t)$ et $y_3(a, b, t)$ possèdent la propriété IV, elles déterminent, donc, une représentation topologique et conservant les aires de la région G sur elle même.

Les fonctions $x_3(a, b, t)$, $y_3(a, b, t)$, $u_{\delta_t}(x, y)$ et $v_{\delta_t}(x, y)$ satisfont aux inégalités

$$|x_3(a, b, t) - a| \leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega}, \quad |y_3(a, b, t) - b| \leq \frac{N}{(1 + R_{ab})^\omega},$$

$$|u_{\delta_t}(x, y)| \leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega}, \quad |v_{\delta_t}(x, y)| \leq \frac{N}{(1 + R_{xy})^\omega}.$$

On peut écrire maintenant

$$\begin{aligned}
 & x_3(a, b, t) - a - \int_0^t u_{3\tau} [x_3(a, b, \tau), y_3(a, b, \tau)] d\tau \\
 &= x_3(a, b, t) - x_3^m(a, b, t) - \sum_{k=0}^{q-1} \int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} \{u_{3\tau} [x_3(a, b, \tau), y_3(a, b, \tau)] \\
 &\quad - u_{3k}^m [x_3^m(a, b, \tau), y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau \\
 &\quad - \int_{t_q^m}^t \{u_{3\tau} [x_3(a, b, \tau), y_3(a, b, \tau)] - u_{3q}^m [x_3^m(a, b, \tau), y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau \\
 &= x_3(a, b, t) - x_3^m(a, b, t) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{q-1} \int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} \{u_{3\tau} [x_3(a, b, \tau), y_3(a, b, \tau)] - u_{3\tau} [x_3^m(a, b, \tau), y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau \\
 &\quad - \int_{t_q^m}^t \{u_{3\tau} [x_3(a, b, \tau); y_3(a, b, \tau)] - u_{3\tau} [x_3^m(a, b, \tau); y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{q-1} \int_{t_k^m}^{t_{k+1}^m} \{u_{3\tau} [x_3^m(a, b, \tau); y_3^m(a, b, \tau)] - u_{3k}^m [x_3^m(a, b, \tau); y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau \\
 &\quad - \int_{t_q^m}^t \{u_{3\tau} [x_3^m(a, b, \tau), y_3^m(a, b, \tau)] - u_{3q}^m [x_3^m(a, b, \tau), y_3^m(a, b, \tau)]\} d\tau,
 \end{aligned}$$

où q désigne le plus grand des nombres entiers ne dépassant pas $\frac{t}{T} m$.

Etant donné un ε quelconque, $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, je choisis un m tel qu'on ait

$$\sqrt{[x_3(a, b, t_1) - x_3^m(a, b, t_2)]^2 + [y_3(a, b, t_1) - y_3^m(a, b, t_2)]^2} \leq \varepsilon$$

pour $|t_1 - t_2| \leq \frac{T}{m}$, alors en vertu des propriétés I et II, on a

$$|u_{\delta t}[x_\delta(a, b, t), y_\delta(a, b, t)] - u_{\delta t}[x_\delta^m(a, b, t), y_\delta^m(a, b, t)]| \leq H \varepsilon \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

$$|u_{\delta t}[x_\delta^m(a, b, t), y_\delta^m(a, b, t)] - u_{\delta k^m}[x_\delta^m(a, b, t), y_\delta^m(a, b, t)]| \leq E \varepsilon \lg \frac{1}{\varepsilon}$$

pour

$$t_k^m \leq t \leq t_{k+1}^m.$$

Donc

$$\left| x_\delta(a, b, t) - a - \int_0^t u_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)] d\tau \right| \leq \varepsilon + H T \varepsilon \lg \frac{1}{\varepsilon} + E T \varepsilon \lg \frac{1}{\varepsilon},$$

d'où il résulte que

$$x_\delta(a, b, t) = a + \int_0^t u_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)] d\tau$$

et d'une manière analogue:

$$y_\delta(a, b, t) = b + \int_0^t v_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)] d\tau.$$

Les fonctions $x_\delta(a, b, t)$ et $y_\delta(a, b, t)$ satisfont donc aux conditions requises.

Supposons qu'il existe encore une autre solution $x'_\delta(a, b, t)$ et $y'_\delta(a, b, t)$ du système des conditions (11). Soit t_0 le plus grand des nombres possédant cette propriété que pour $0 \leq t \leq t_0$ les deux solutions sont identiques. Alors pour $t_0 \leq t \leq T$ on aura

$$\begin{aligned} & x'_\delta(a, b, t) - x_\delta(a, b, t) \\ &= \int_{t_0}^t \{u_{\delta \tau}'[x'_\delta(a, b, \tau), y'_\delta(a, b, \tau)] - u_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)]\} d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \{u_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)] - u_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)]\} d\tau, \\ & y'_\delta(a, b, t) - y_\delta(a, b, t) \\ &= \int_{t_0}^t \{v_{\delta \tau}'[x'_\delta(a, b, \tau), y'_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)]\} d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t \{v_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta \tau}[x_\delta(a, b, \tau), y_\delta(a, b, \tau)]\} d\tau, \\ & 3'_t[x'_\delta(a, b, t), y'_\delta(a, b, t)] = 3(a, b). \end{aligned}$$

Je désigne par $K(t)$ la borne supérieure de

$$\sqrt{[x_\delta(a, b, t) - x'_\delta(a, b, t)]^2 + [y_\delta(a, b, t) - y'_\delta(a, b, t)]^2}$$

lorsque le point (a, b) est dans G ; alors en vertu des dernières équations, nous avons pour $t_0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} K(t) &\leq \int_{t_0}^t \sqrt{\{u_{\delta\tau} [x'_\delta(a, b, \tau) - u_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - u_{\delta\tau} [x'_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta\tau} [x'_\delta(a, b, \tau)]\}^2 d\tau} \\ &+ \int_{t_0}^t \sqrt{\{u_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - u_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - u_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)] - v_{\delta\tau} [x_\delta(a, b, \tau)]\}^2 d\tau}. \end{aligned}$$

Soit $t_1, t_0 < t_1 \leq T$, si proche de t_0 que $K(t) \leq \frac{1}{2}$, pour $t_0 \leq t \leq t_1$; alors en vertu des propriétés I et II

$$\begin{aligned} &\sqrt{\{u_{\delta t} [x'_\delta(a, b, t)] - u_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - u_{\delta t} [x'_\delta(a, b, t)] - v_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - v_{\delta t} [x'_\delta(a, b, t)]\}^2} \\ &\leq HK(t) \log \frac{1}{K(t)}, \\ &\sqrt{\{u_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - u_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - u_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - v_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)] - v_{\delta t} [x_\delta(a, b, t)]\}^2} \\ &\leq EK(t) \log \frac{1}{K(t)}, \end{aligned}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_1$; d'où il résulte que

$$K(t) \leq (H + E) \int_{t_0}^t K(\tau) \log \frac{1}{K(\tau)} d\tau, \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1. \quad (14)$$

La dernière inégalité a pour conséquence que $K(t) = 0$, pour $t_0 \leq t \leq t_1$, ce qui contredit à la définition du nombre t_0 . Il n'y a donc qu'une solution unique⁵⁾.

⁵⁾ Comme le système de conditions (11) ne possède qu'une solution, les suites de fonctions $x_\delta^n(a, b, t), y_\delta^n(a, b, t), z_\delta^n(a, b, t), \dots$ sont uniformément convergentes vers les fonctions $x_\delta(a, b, t), y_\delta(a, b, t), z_\delta(a, b, t)$; la méthode indiquée au § 2 permet donc de calculer avec la précision voulue les fonctions $x_\delta(a, b, t), y_\delta(a, b, t)$, et par conséquent, comme il résulte du § 3, le système de fonctions $x(a, b, t), y(a, b, t), u(x, y, t), v(x, y, t), p(x, y, t)$.

§ 3.

Solution du problème, formulé dans l'introduction, du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible.

Comme fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ je prends les fonctions $x_3(a, b, t)$, $y_3(a, b, t)$, $u_3(x, y)$, $v_3(x, y)$, obtenues dans le dernier paragraphe.

Les conditions (I), (IV), (VI) et (VII) seront donc remplies; il faut choisir la fonction $p(x, y, t)$ de façon que les conditions (II) et (V) les soient aussi.

Je définis la fonction $p(x, y, t)$:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) = & \sigma U(x, y, t) - \frac{\sigma}{2} [u_{3t}^2(x, y) + v_{3t}^2(x, y)] \\
 & + \frac{\sigma}{\pi} \int_G \left[\frac{(x - \bar{x}) \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) v_{3t}(\bar{x}, \bar{y})}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} - \frac{(y - \bar{y}) \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \cdot u_{3t}(\bar{x}, \bar{y})}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 (15) \quad & - \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_F dl \frac{\partial H(x, y, l)}{\partial l} \int_G \left[\frac{(x_l - \bar{x}) \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \cdot u_{3t}(\bar{x}, \bar{y})}{(x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2} \right. \\
 & \left. + \frac{(y_l - \bar{y}) \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) v_{3t}(\bar{x}, \bar{y})}{(x_l - \bar{x})^2 + (y_l - \bar{y})^2} \right] d\bar{x} d\bar{y} + \varphi(t),
 \end{aligned}$$

où l désigne un point sur F , dl l'élément d'arc au point l de la courbe F , sur laquelle se trouve le point l , dirigé dans le sens obtenu en faisant tourner la normale intérieur de $-\frac{\pi}{2}$, $H(x, y, l)$ la fonction de Neuman pour la région fermée G , enfin $\varphi(t)$ une fonction continue choisie de façon que la condition (V) soit remplie.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) = & -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_F dl H(x, y, l) \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial l} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 = & -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_F dl \frac{\partial H(x, y, l)}{\partial l} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y}, \\
 v(x, y, t) = & \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial y} \int_F dl \frac{\partial H(x, y, l)}{\partial l} \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \lg \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_B u(x, y, t) dx dy \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_S n_x(s) ds \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \left[\operatorname{arctg} \frac{y_s - \bar{y}}{x_s - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_S n_x(s) ds \int_F \frac{\partial H(x_s, y_s, l)}{\partial l} dl \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \log \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y},
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_B v(x, y, t) dx dy \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_S n_y(s) ds \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \left[\operatorname{arctg} \frac{y_s - \bar{y}}{x_s - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 &\quad - \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_S n_y(s) ds \int_F \frac{\partial H(x_s, y_s, l)}{\partial l} dl \int_G \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) \log \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y}.
 \end{aligned}$$

En approchant³⁾ la fonction $\mathfrak{z}_t(x, y)$ par des fonctions bornées continûment dérivables on peut facilement démontrer que

$$\begin{aligned}
 & \int_S u(x_s, y_s, t) [u(x_s, y_s, t) n_x(s) + v(x_s, y_s, t) n_y(s)] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_S [u^2(x_s, y_s, t) + v^2(x_s, y_s, t)] n_x(s) ds + 2 \int_B \mathfrak{z}_t(x, y) v(x, y, t) dx dy, \\
 & \int_S v(x_s, y_s, t) [u(x_s, y_s, t) n_x(s) + v(x_s, y_s, t) n_y(s)] ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_S [u^2(x_s, y_s, t) + v^2(x_s, y_s, t)] n_y(s) ds - 2 \int_B \mathfrak{z}_t(x, y) u(x, y, t) dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Finalement les premières parties des équations (II) prennent la forme

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sigma}{\pi} \int_S n_x(s) ds \int_G [\mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) - \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y})] \left[\operatorname{arctg} \frac{y_s - \bar{y}}{x_s - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 &\quad + \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_S n_x(s) ds \int_F \frac{\partial H(x_s, y_s, l)}{\partial l} dl \int_G [\mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) - \mathfrak{z}(\bar{x}, \bar{y})] \log \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & - \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau \int_S [u^2(x_s, y_s, \tau) + v^2(x_s, y_s, \tau)] n_x(s) ds \\
 & - 2\sigma \int_0^t d\tau \int_B \mathfrak{z}_\tau(x, y) v(x, y, \tau) dx dy;
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sigma}{\pi} \int_S n_y(s) ds \int_G [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \left[\operatorname{arctg} \frac{y_s - \bar{y}}{x_s - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
& \quad - \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2} \\
& + \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_S n_y(s) ds \int_{F'} \frac{\partial H(x_s, y_s, t)}{\partial l} dl \int_G [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \log \frac{r_l}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
& - \frac{\sigma}{2} \int_0^t d\tau \int_S [u^2(x_s, y_s, \tau) + v^2(x_s, y_s, \tau)] n_y(s) ds \\
& + 2\sigma \int_0^t d\tau \int_B 3_\tau(x, y) u(x, y, \tau) dx dy.
\end{aligned}$$

Comme la représentation de G sur elle-même par les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ conserve les aires, et comme $3_t[x(a, b, t), y(a, b, t)] = 3(a, b)$, on a presque pour toutes valeurs de t , $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_G 3_t(\bar{x}, \bar{y}) \log \frac{r}{R_{\bar{x}\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
& = - \int_G \left[\frac{(x - \bar{x})u(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} + \frac{(y - \bar{y})v(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \right] 3_t(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} + \varphi_1(t) \\
& \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_G 3_t(\bar{x}, \bar{y}) \left[\operatorname{arctg} \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
& \quad 0 \leq \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2} \\
& = \int_G \left[\frac{(y - \bar{y})u(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} - \frac{(x - \bar{x})v(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \right] 3_t(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\
(19) \quad & + \pi \int_{\substack{G \\ x, y \\ -\infty, y}}^{x, y} 3_t(\bar{x}, y) v(\bar{x}, y, t) d\bar{x} - \pi \int_{\substack{G \\ x, y}}^{x, y} 3_t(\bar{x}, y) v(\bar{x}, y, t) d\bar{x} + \varphi_2(t), \\
& \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_G 3_t(\bar{x}, \bar{y}) \left[\operatorname{arctg} \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
& \quad - \frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2} \\
& = \int_G \left[\frac{(y - \bar{y})u(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} - \frac{(x - \bar{x})v(\bar{x}, \bar{y}, t)}{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \right] 3_t(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\
& \quad - \pi \int_{\substack{G \\ x, y \\ -\infty, y}}^{x, y} 3_t(x, \bar{y}) u(x, \bar{y}, t) d\bar{y} + \pi \int_{\substack{G \\ x, y}}^{x, y} 3_t(x, \bar{y}) u(x, \bar{y}, t) d\bar{y} + \varphi_3(t)
\end{aligned}$$

où $\int_{\substack{G \\ x, y \\ -\infty, y}}^{x, y} d\bar{x}$ signifie que l'intégration doit avoir lieu le long de la partie commune de la droite $\bar{y} = y$ et de G , à partir du point situé le plus

à gauche, éventuellement de $-\infty$, jusqu'au point (x, y) ; les notations

$\int_G^{\infty, y} d\bar{x}$, $\int_G^{x, y} d\bar{y}$ et $\int_G^{x, \infty} d\bar{y}$ ont des significations analogues.

Des équations (19) et (15) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t [p(x, y, \tau) - \sigma U(x, y, \tau)] d\tau = -\frac{\sigma}{2} \int_0^t [u^2(x, y, \tau) + v^2(x, y, \tau)] d\tau \\
 & - \frac{\sigma}{\pi} \int_G^{\infty, y} [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \left[\operatorname{arctg} \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 & \quad 0 \leq \operatorname{arctg} < \pi \\
 & + \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_F \frac{\partial H(x, y, l)}{\partial l} dl \int_G^{\infty, y} [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \log \frac{r_l}{R_{x\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & + \sigma \int_0^t d\tau \int_G^{x, y} 3_\tau(\bar{x}, y) v(\bar{x}, y, \tau) d\bar{x} \\
 & \quad - \infty, y \\
 & - \sigma \int_0^t d\tau \int_G^{\infty, y} 3_\tau(\bar{x}, y) v(\bar{x}, y, \tau) d\bar{x} + \int_0^t \left[\varphi(\tau) + \frac{\sigma}{\pi} \varphi_2(\tau) \right] d\tau, \\
 & \quad x, y \\
 & \int_0^t [p(x, y, \tau) - \sigma U(x, y, \tau)] d\tau = -\frac{\sigma}{2} \int_0^t [u^2(x, y, \tau) + v^2(x, y, \tau)] d\tau \\
 & - \frac{\sigma}{\pi} \int_G^{\infty, y} [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \left[\operatorname{arctg} \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right] d\bar{x} d\bar{y} \\
 & \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} < \frac{\pi}{2} \\
 & + \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_F \frac{\partial H(x, y, l)}{\partial l} dl \int_G^{\infty, y} [3_t(\bar{x}, \bar{y}) - 3(\bar{x}, \bar{y})] \log \frac{r_l}{R_{x\bar{y}}} d\bar{x} d\bar{y} \\
 & - \sigma \int_0^t d\tau \int_G^{x, y} 3_\tau(x, \bar{y}) u(x, \bar{y}, \tau) d\bar{y} \\
 & \quad x, -\infty \\
 & + \sigma \int_0^t d\tau \int_G^{x, \infty} 3_\tau(x, y) u(x, \bar{y}, \tau) d\bar{y} + \int_0^t \left[\varphi(\tau) + \frac{\sigma}{\pi} \varphi_3(\tau) \right] d\tau. \\
 & \quad x, y
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

En vertu de l'équation

$$\int_S n_x(s) ds \int_G^{x_s, y_s} f(\bar{x}, y_s) d\bar{x} = - \int_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} \cdot d\bar{y}$$

et d'autres équation analogues, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_S n_x(s) ds \left[\int_{\substack{G \\ -\infty, y}}^{x_s, y_s} \mathfrak{z}_t(\bar{x}, y_s) v(\bar{x}, y_s, t) d\bar{x} \right. \\
 & \quad \left. - \int_{\substack{G \\ x_s, y_s}}^{\infty, y_s} \mathfrak{z}_t(\bar{x}, y_s) v(\bar{x}, y_s, t) d\bar{x} \right] = -2 \int_B \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) v(\bar{x}, \bar{y}, t) d\bar{x} d\bar{y}, \\
 (21) \quad & \int_S n_y(s) ds \left[- \int_{\substack{G \\ x_s, -\infty}}^{x_s, y_s} \mathfrak{z}_t(x_s, \bar{y}) u(x_s, \bar{y}, t) d\bar{y} \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\substack{G \\ x_s, y_s}}^{x_s, \infty} \mathfrak{z}_t(x_s, \bar{y}, t) u(x_s, \bar{y}, t) d\bar{y} \right] = 2 \int_B \mathfrak{z}_t(\bar{x}, \bar{y}) u(\bar{x}, \bar{y}, t) d\bar{x} d\bar{y}.
 \end{aligned}$$

Les équations II résultent immédiatement des formules (18), (20) et (21).

§ 4.

Cas particulier, quand la fonction $\mathfrak{z}(x, y)$ satisfait à la condition (3).

On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
 & |\mathfrak{z}_t[x(a_1, b_1, t), y(a_1, b_1, t)] - \mathfrak{z}_t[x(a_2, b_2, t), y(a_2, b_2, t)]| \\
 & = |\mathfrak{z}(a_1, b_1) - \mathfrak{z}(a_2, b_2)| \leq D[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2]^{\lambda/2}.
 \end{aligned}$$

En vertu de IV, si

$$\sqrt{[x(a_1, b_1, t) - x(a_2, b_2, t)]^2 + [y(a_1, b_1, t) - y(a_2, b_2, t)]^2} \leq (\tfrac{1}{2})e^{HT},$$

on a

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\
 & \leq \{ \sqrt{[x(a_1, b_1, t) - x(a_2, b_2, t)]^2 + [y(a_1, b_1, t) - y(a_2, b_2, t)]^2} \} e^{-HT};
 \end{aligned}$$

par conséquent, si

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq (\tfrac{1}{2})e^{HT},$$

on a

$$(22) \quad |\mathfrak{z}_t(x_1, y_1) - \mathfrak{z}_t(x_2, y_2)| \leq D[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{\lambda}{2}} e^{-HT}$$

En vertu des lemmes connus de la théorie du potentiel, il résulte de (22) que les fonctions $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t) - \sigma U(x, y, t)$ sont continûment dérivables, par conséquent le système $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ et $p(x, y, t)$ satisfait aux équations (III).

§ 5.

Existence d'une solution unique.

Si un système de fonctions $\hat{x}(a, b, t)$, $\hat{y}(a, b, t)$, $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$, $\hat{p}(x, y, t)$ satisfait pour $0 \leq t \leq T$ aux conditions (I), (III), (IV), (V), (VI), (VII) et à la condition (VIII) il est identique au système de fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $p(x, y, t)$.

Supposons que le système de fonctions $\hat{x}(a, b, t)$, $\hat{y}(a, b, t)$, $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$, $\hat{p}(x, y, t)$ satisfait pour $0 \leq t \leq T$ aux conditions (I), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VIII). Comme on sait, (VIII) a pour conséquence que les fonctions $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ sont continûment dérivables par rapport à a et b et que la circulation le long de toute courbe fermée, à tangente continue, se déplaçant avec le fluide, ne dépend pas de t .

Je désigne par $\hat{z}_t(x, y)$ la fonction définie par l'équation

$$(23) \quad \hat{z}_t[\hat{x}(a, b, t), \hat{y}(a, b, t)] = z(a, b).$$

En approchant³⁾ la fonction $\hat{z}_t(x, y)$ par des fonctions bornées continûment dérivables par rapport à x et y , il est facile de démontrer que

$$(24) \quad \begin{aligned} & \int_{S_t} u_{\hat{z}_t}(x, y) dx + v_{\hat{z}_t}(x, y) dy = 2 \int_{B_t} \hat{z}_t(x, y) dx dy \\ & = 2 \int_{B_0} z(x, y) dx dy = \int_{S_0} u_z(x, y) dx + v_z(x, y) dy \\ & = \int_{S_t} \hat{u}(x, y, 0) dx + \hat{v}(x, y, 0) dy = \int_{S_t} \hat{u}(x, y, t) dx + \hat{v}(x, y, t) dy, \end{aligned}$$

où S_0 désigne une courbe fermée à tangente continue limitant une région simplement connexe $B_0 \subset G$, S_t et B_t la courbe fermée et la région sur lesquelles sont représentées la courbe fermée S_0 et la région B_0 dans la représentation de G sur elle-même par les fonctions $\hat{x}(a, b, t)$, $\hat{y}(a, b, t)$; le sens de l'intégration le long de S_0 et de S_t est positif.

Des équations (24) et de la condition (VI), à laquelle satisfont les fonctions $u_{\hat{z}_t}(x, y)$, $v_{\hat{z}_t}(x, y)$ aussi que les fonctions $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$, il résulte que, pour toute courbe fermée à tangente continue $S \subset G$, nous avons l'égalité

$$(25) \quad \int_S [\hat{u}(x, y, t) - u_{\hat{z}_t}(x, y)] dx + [\hat{v}(x, y, t) - v_{\hat{z}_t}(x, y)] dy = 0.$$

Il résulte de (25) qu'il existe dans G une fonction $\Theta(x, y, t)$, définie

$$(26) \quad \begin{aligned} \text{par l'équation } \Theta(x, y, t) = & \int_{x_0, y_0}^{x, y} [\hat{u}(x, y, t) - u_{\hat{z}_t}(x, y)] dx \\ & + [\hat{v}(x, y, t) - v_{\hat{z}_t}(x, y)] dy. \end{aligned}$$

Comme les fonctions $\hat{x}(a, b, t)$, $\hat{y}(a, b, t)$ remplissent la condition (I), pour toute courbe fermée à tangente continue S , contenue dans G , nous avons

$$\int_S [\hat{u}(x_s, y_s, t) n_x(s) + \hat{v}(x_s, y_s, t) n_y(s)] ds = 0, \quad \begin{aligned} \hat{u}(x_l, y_l, t) n_x(l) \\ + \hat{v}(x_l, y_l, t) n_y(l) = 0, \end{aligned}$$

longue le point l se trouve sur F . Evidemment

$$\int_S [u_{\hat{t}}^*(x_s, y_s) n_x(s) + v_{\hat{t}}^*(x_s, y_s) n_y(s)] ds = 0, \quad \begin{aligned} u_{\hat{t}}^*(x_l, y_l) n_x(l) + v_{\hat{t}}^*(x_l, y_l) n_y(l) = 0, \end{aligned}$$

longue le point l est sur F .

$$(27) \quad \text{Par conséquent} \quad \int_S \left. \frac{d\Theta(x, y)}{dn} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} ds = 0;$$

$$(28) \quad \text{longue le point } x, y, \text{ se trouve sur } F, \quad \frac{d\Theta(x, y)}{dn} = 0.$$

En vertu du lemme de Koebe⁶⁾, il résulte de (27) que la fonction $\Theta(x, y)$ est harmonique. Comme les fonctions $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$ et $u_{\hat{t}}^*(x, y)$, $v_{\hat{t}}^*(x, y)$ satisfont à la condition VII, on a

$$(29) \quad \left| \frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{2N}{(1 + R_{x, y})^\omega}, \quad \left| \frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial y} \right| \leq \frac{2N}{(1 + R_{x, y})^\omega}.$$

De (28) et (29) il résulte que la fonction harmonique $\Theta(x, y)$ est une constante⁷⁾, donc

$$(30) \quad \hat{u}(x, y, t) = u_{\hat{t}}^*(x, y), \quad \hat{v}(x, y, t) = v_{\hat{t}}^*(x, y).$$

Il s'ensuit de (23) et (30) que le système de fonctions $\hat{x}(a, b, t)$, $\hat{y}(a, b, t)$, $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$ résout le système de conditions (11). Et comme le système de conditions (11) ne possède qu'une solution $x_{\hat{t}}(a, b, t)$, $y_{\hat{t}}(a, b, t)$, $u_{\hat{t}}(x, y)$, $v_{\hat{t}}(x, y)$, donc

$$\begin{aligned} \hat{x}(a, b, t) &= x(a, b, t), \quad \hat{y}(a, b, t) = y(a, b, t), \quad \hat{u}(x, y, t) = u(x, y, t), \\ \hat{v}(x, y, t) &= v(x, y, t). \end{aligned}$$

Comme les équations (III) et la condition (V) déterminent d'une façon univoque la fonction $p(x, y, t)$, donc

$$\hat{p}(x, y, t) = p(x, y, t).$$

En modifiant légèrement nos raisonnements nous pourrions arriver à des résultats analogues au cas où la région fermée G se transformerait sans changer son aire.

⁶⁾ P. Koebe, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 5 (1906), S. 39—42.

⁷⁾ Il résulte de (28) que la fonction harmonique $\Theta(x, y)$, conjuguée à $\Theta(x, y)$, est uniforme dans G . La fonction $F(z) = \Theta(x, y) + i\bar{\Theta}(x, y)$, $z = x + iy$, est donc, en vertu de (29), une fonction analytique uniforme, régulière dans G , par conséquent $F'(z)$, $\frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial y}$ s'annulent à l'infini, comme $R_{x, y}^{-2}$.

Über die unbeschränkte Fortsetzbarkeit einer stetigen ebenen Bewegung in einer unbegrenzten inkompressiblen Flüssigkeit*).

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

Im Raum der Lagrangeschen Variablen a, b (Anfangswerte der Koordinaten zur Zeit t_0) gebe ich die Anfangswirbelgeschwindigkeit $\zeta_0(a, b)$, die einer O. Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten λ_0 , $0 < \lambda_0 < 1$ und dem Koeffizienten C_0 genügen soll¹⁾:

$$\begin{aligned} |\zeta_0(a, b)| &\leq C_0 \frac{1}{(1 + R_0)^2}, \\ (1) \quad |\zeta_0(a, b) - \zeta_0(\bar{a}, \bar{b})| &\leq C_0 \left(\frac{1}{(1 + R_0)^2 + \lambda_0} + \frac{1}{(1 + \bar{R}_0)^2 + \lambda_0} \right) d_0^{\lambda_0} \\ (R_0^2 = a^2 + b^2, \quad \bar{R}_0^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2, \quad d_0^2 = (a - \bar{a})^2 + (b - \bar{b})^2). \end{aligned}$$

Außerdem soll das Integral der Gesamtwirbelstärke

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0 da db$$

unbedingt konvergent sein.

*) In der vorstehenden Abhandlung von Herrn Wolibner (vgl. S. 698) erhielt das Problem der zweidimensionalen Bewegung einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit *im großen* eine umfassende Lösung. Trotzdem hiermit das Problem als erledigt gelten kann, erschien angesichts der großen Wichtigkeit der Fragestellung die Veröffentlichung der eleganten, wenn auch spezielleren Ausführungen von Herrn E. Hölder, die den Gegenstand von einer anderen Seite beleuchten, als geboten.

Die Schriftleitung.

¹⁾ Ungleichheiten von dieser Art sind (im dreidimensionalen Fall) zuerst von Herrn Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. 1926, S. 213–239, aufgestellt worden, um die zweiten Ableitungen Newtonscher Potentiale zu beherrschen, die von einer ins Unendliche ausgebreiteten Massenbelegung herrühren.

Dann gibt es nach einem Hauptsatz von Lichtenstein²⁾ ein nur von λ_0, C_0 abhängiges Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \delta_0 \rangle$, $\delta_0 = \delta(\lambda_0, C_0) > 0$, mit folgender Eigenschaft: in $\langle t_0, t_0 + \delta_0 \rangle$ gibt es eine und nur eine der Anfangsbedingung

$$(3) \quad t = t_0: \quad x = a, \quad y = b$$

genügende Lösung

$$(4) \quad x = x(t, a, b), \quad y = y(t, a, b)$$

des Gleichungssystems

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, t), \quad u(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta' \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{1}{r} dx' dy', \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y, t), \quad v(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx' dy', \\ \zeta(x, y, t) &= \zeta_0(a, b), \\ (r^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist, die in diesem Satz festgestellte eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen (3), (5) für ein beliebiges Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle$, $\Theta > 0$, darzutun, was die unbeschränkte Fortsetzbarkeit der durch die Anfangsdaten (3) bestimmten ebenen Flüssigkeitsbewegung bedeuten wird.

Dies gelingt so: Sei $\langle t_0, t_1 \rangle$ ein abgeschlossenes Teilintervall von $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle$; in $\langle t_0, t_1 \rangle$ liege eine bestimmte, zu den Anfangsbedingungen (3) gehörige Flüssigkeitsbewegung vor (d. h. zunächst nur eine Lösung der Gleichungen (5), (3)). Dann genügt, wie wir zeigen werden, die Wirbelgeschwindigkeit ζ in $\langle t_0, t_1 \rangle$ den Ungleichheiten

$$(6) \quad \begin{aligned} |\zeta(x, y, t)| &\leq C \frac{1}{(1+R)^2}, \\ |\zeta(x, y, t) - \zeta(\bar{x}, \bar{y}, t)| &\leq C \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}} d^\lambda \right), \\ (R^2 &= x^2 + y^2, \quad \bar{R}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2, \quad d^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2). \end{aligned}$$

²⁾ L. Lichtenstein, a) Über einige Existenzsätze der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze. Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 89—154; S. 309—316; b) Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten. Math. Zeitschr. 26 (1926), S. 196—323. Für zweidimensionale Bewegungen finden sich die entsprechenden Formulierungen, bis auf die Voraussetzung (2), in L. Lichtenstein, c) Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 441 ff. Die Beweise beruhen auf Hilfssätzen für das logarithmische Potential, die fast gleichlautend sind wie die das Newtonsche Potential betreffenden Hilfssätze von L. Lichtenstein, loc. cit.¹⁾. Die dort entwickelten Ungleichheiten gelten meist auch im zweidimensionalen Fall, wenn man einige numerische Koeffizienten abändert; einzig die (28) und der auf (44) folgenden Formel entsprechenden Ungleichheiten erfordern zu ihrer Begründung eine Voraussetzung von der Art unserer Bedingung (2) für die Dichte. Es sei in diesem Zusammenhang auf die wichtigen Arbeiten von N. M. Günther über das hydrodynamische Randwertproblem im kleinen hingewiesen (vgl. insbesondere N. M. Günther, Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 448—499).

Dabei sind (das ist der springende Punkt) λ , C *generelle*, d. h. nur von Θ und λ_0 , C_0 , aber nicht von t , abhängige Konstanten.

Wenn wir dies bewiesen haben, folgt aus dem Lichtensteinschen Fundamentalsatz die Existenz der Lösung auch im Intervall $\langle t_0, t_1 + \delta \rangle$, $\delta = \delta(\lambda, C) > 0$, soweit es in $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle$ enthalten ist; nach endlich vielen Schritten der Länge δ haben wir die eindeutig bestimmte Lösung im ganzen Intervall $\langle t_0, t_0 + \Theta \rangle^3$.

1. Herleitung einer Majorante für $\zeta(x, y)$ aus einer E. Schmidtschen Abschätzung. Ich stütze mich auf den Hilfssatz 2 von E. Schmidt⁴), der folgendes besagt: Es ist unabhängig von der Lage des Aufpunktes (x, y)

$$(7) \quad \int_T \frac{1}{r} dx' dy' \leq 2\pi \left(\frac{|T|}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

bei einem beliebigen beschränkten Gebiet T mit dem (inneren) Flächeninhalt $|T|$.

Hat man nun eine beliebige (inhaltstreue, topologische) Abbildung aus der für das Parameterintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ gegebenen Schar (4) von Deformationen, so fasse man die ganze x, y -Ebene als Summe derjenigen „Ring“-Gebiete $\overset{v}{T}$ auf, die sich bei der Abbildung aus den Kreisringgebieten

$$\overset{0}{K}: R_0 \leq l, \quad \overset{v}{K}: \nu l \leq R_0 \leq (\nu + 1)l, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

(l eine feste Zahl) ergeben. Da bei der Abbildung der Flächeninhalt erhalten bleibt und die Dichte ζ nach (5)₃ mitgenommen wird, ist

$$(8) \quad |\overset{0}{T}| = \pi l^2, \quad |\overset{v}{T}| = (2\nu + 1)\pi l^2,$$

und für die Dichte $\zeta(x, y)$ gilt

$$\text{in } \overset{0}{T}: |\zeta| \leq C_0, \quad \text{in } \overset{v}{T}: |\zeta| \leq C_0 \frac{1}{(1 + \nu l)^2}.$$

³) Es sei noch bemerkt, daß ich zu meinen schon über ein Jahr alten Versuchen, den Lichtensteinschen Existenzsatz für zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen auf beliebige Zeitintervalle auszudehnen, das Schlußstück des Beweises, nämlich die Verwendung des Kamkeschen Hilfssatzes, erst hinzugefügt habe, als ich von Herrn Lichtenstein erfahren hatte, daß Herr Wolibner dasselbe Ziel auf einem teilweise über die Theorie der konformen Abbildung gehenden Wege erreicht habe. (Vgl. die unmittelbar vorangehende Abhandlung von Herrn Wolibner.) Der ausdrückliche Hinweis auf die Problematik der Fortsetzbarkeit im Falle der dreidimensionalen Bewegung einer zähen Flüssigkeit findet sich bei C. W. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Leipzig 1927, S. 72f.

⁴) E. Schmidt, *Bemerkungen zur Potentialtheorie*, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 365–383, insbesondere S. 369.

Nach der Schmidtschen Formel (7) ist der Beitrag, den $\overset{v}{T}$ etwa zu $v(xy)$ liefert

$$(9) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int \overset{v}{T} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \left(\log \frac{1}{r} \right) dx' dy' \right| \leq \begin{cases} 2 C_0 l, & v = 0, \\ 2 C_0 \frac{1}{(1+v)^2} \sqrt{2v+1} l, & v = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Also

$$(10) \quad |v(x, y)| \leq 2 C_0 l \left(1 + \frac{1}{l^2} \sum_1^\infty \frac{\sqrt{2v+1}}{v^2} \right) \leq 2 C_0 l \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{l^2} \sum_1^\infty \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} \right);$$

analog für $|u(x, y)|$. Die Zahl l ist fest. Die Bestimmung desjenigen Wertes von l , für den die rechtsstehende Schranke von $|u|$, $|v|$ am kleinsten ausfällt, sowie die explizite Berechnung dieser Minimalschranke gibt

$$(11) \quad |u|, |v| \leq 2 C_0 \cdot 2 \sqrt[4]{3} \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}}}$$

und weiter wegen

$$(12) \quad \sum_1^\infty \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} < 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = 3$$

die Ungleichheit

$$(13) \quad |u|, |v| \leq 4 \cdot 3^{\frac{3}{4}} C_0 \leq 10 C_0.$$

Für die Verschiebung irgend eines Teilchens im Zeitintervall $\langle t_0, t_1 \rangle$ ergeben sich daher aus (5)₁ die Ungleichheiten

$$(14) \quad |x-a|, |y-b| \leq 4 \cdot 3^{\frac{3}{4}} C_0 \Theta < 10 C_0 \Theta,$$

$$(15) \quad D = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 3^{\frac{3}{4}}} C_0 \Theta < 13 C_0 \Theta.$$

Weiter gibt die Dreiecksungleichheit $R \leq R_0 + D$ noch

$$(16) \quad \frac{1+R}{1+R_0} \leq 1 + \frac{D}{1+R_0} \leq 1 + D,$$

also⁵⁾

$$(17) \quad \frac{1+R}{1+R_0} \leq 1 + 13 C_0 \Theta = R_*.$$

Daher ist

$$(18) \quad \frac{1}{(1+R_0)^2} \leq \frac{R_*^2}{(1+R)^2}, \quad \frac{1}{(1+R_0)^{2+\lambda_0}} \leq \frac{R_*^{2+\lambda_0}}{(1+R)^{2+\lambda_0}}.$$

Schließlich folgt aus (5)₂, (1) in $\langle t_0, t_1 \rangle$ die Majorantenbeziehung

$$(19) \quad |\zeta(x, y, t)| \leq c \frac{1}{(1+R)^2}, \quad c = R_*^{2+\lambda_0} C_0,$$

c eine generelle Konstante.

2. Abschätzung von $|u(x, y) - u(\bar{x}, \bar{y})|$, $|v(x, y) - v(\bar{x}, \bar{y})|$ auf Grund einer Dinischen Ungleichheit. Es sei K eine Kreisscheibe vom

⁵⁾ Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik, S. 419.

Radius P mit dem Ursprung als Mittelpunkt, K^0 eine konzentrische Kreisscheibe vom Radius $2P$. Wir setzen in K

$$(20) \quad \begin{aligned} v &= -\frac{1}{\pi} \int_{K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx' dy' - \frac{1}{\pi} \int_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx' dy' \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{K^0} \zeta' \log \frac{1}{r} dx' dy' - \frac{1}{\pi} \int_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx' dy' = V + \Phi. \end{aligned}$$

Es seien jetzt (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ zwei Punkte in K , d ihr Abstand; wir beschreiben um (x, y) und $(\bar{x}, \bar{y})$ zwei Kreisscheiben τ und $\bar{\tau}$ vom Radius $\frac{1}{2}d$. Dann gilt nach Dini⁶⁾, da stets $|\zeta| \leq C_0 \leq c$ ist,

$$(21) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{\tau} \zeta' \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \log \frac{1}{\bar{r}} \right) dx' dy' \right| \leq 6cd$$

und dasselbe für $\bar{\tau}$; es ist dabei $\bar{r}^2 = (\bar{x} - x')^2 + (\bar{y} - y')^2$. Das Restgebiet $K^0 - \tau - \bar{\tau}$ gibt

$$(22) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{K^0 - \tau - \bar{\tau}} \zeta' \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \log \frac{1}{\bar{r}} \right) dx' dy' \right| \leq 18cd \cdot (\log 4P - \log \frac{1}{2}d) \\ = 18cd \cdot \log \frac{8P}{d}.$$

Nun ist $6 < 9 \cdot \log 2$, $2 \cdot 6 < 9 \cdot \log 4 \leq 9 \cdot \log \frac{8P}{d}$ wegen $d \leq 2P$, daher wird insgesamt

$$(23) \quad |V(x, y) - V(\bar{x}, \bar{y})| \leq 27cd \cdot \log \frac{8P}{d}.$$

Zweitens ist in K

$$(24) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty - K^0} \zeta' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} dx' dy'.$$

Für alle (x', y') in $\infty - K^0$ gilt

$$r \geq \frac{1}{2}R', \quad |\zeta'| \leq c \frac{1}{R'^2}, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{1}{r} \right| \leq \frac{4}{R'^2}.$$

Somit gilt

$$(25) \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| \leq 8c \int_{2P}^{\infty} \frac{1}{R'^3} dR' = c \frac{1}{P^2}$$

⁶⁾ U. Dini, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, Acta math. 25 (1902), S. 195–196. — Es scheinen, nebenbei bemerkt, bei der (unter etwas anderen Voraussetzungen abgeleiteten) endgültigen Schranke in der vorletzten Zeile von S. 196 die Beiträge von τ' und τ'' (in Dinis Bezeichnung) nicht berücksichtigt zu sein. Demgemäß wäre der Zahlenkoeffizient 9 etwa durch 18 zu ersetzen.

und die gleiche Schranke für $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|$. Für alle $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$ in K ist darum

$$(26) \quad |\Phi(x, y) - \Phi(\bar{x}, \bar{y})| \leq \sqrt{2} c \frac{1}{P^2} d \leq \sqrt{2} c \frac{1}{P^2} d \cdot \log \frac{8P}{d}.$$

In K gilt also die Ungleichheit

$$(27) \quad |v(x, y) - v(\bar{x}, \bar{y})| \leq c \left(27 + \sqrt{2} \frac{1}{P^2} \right) d \cdot \log \frac{8P}{d} \leq 28 c d \cdot \log \frac{8P}{d},$$

sowie $P \geq 2$ ist. Dieselbe Ungleichheit gilt für $|u(x, y) - u(\bar{x}, \bar{y})|$.

3. H-Stetigkeit der Deformation auf Grund eines Kamkeschen Hilfssatzes. Ein Teilchen, das sich zur Zeit t , $t_0 \leq t \leq t_1 \leq t_0 + \Theta$, an der Stelle (x, y) in der Entfernung R vom Ursprung befindet, war wegen (15) während des ganzen Zeitintervalls $t_0 \leq t \leq t$ an Stellen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit

$$(28) \quad \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} = \mathfrak{R} \leq R + 13 C_0 \Theta \leq R \left(1 + \frac{1}{R_*} \cdot 13 C_0 \Theta \right) \leq 2 R = P,$$

wofern

$$(29) \quad R \geq R_* = 1 + 13 C_0 \Theta$$

ist. Ist umgekehrt

$$(30) \quad R \leq R_*,$$

so war während des ganzen Zeitintervalls $t_0 \leq t \leq t$

$$(31) \quad \mathfrak{R} \leq R_* + 13 C_0 \Theta \leq 2 R_* = P_*.$$

Um, zunächst bei (29), aus der Lage der Teilchen zur Zeit t genauere Rückschlüsse auf ihre Lage zur Zeit t_0 zu machen, betrachte ich das Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t$ und die Punktepaare $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), (\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}})$ in K . Wegen

$$(32) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|) \leq \mathfrak{d} \leq |\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|$$

für $\mathfrak{d} = \sqrt{(\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}})^2 + (\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}})^2}$ folgt aus (27)

$$(33) \quad |u(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t) - u(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, t)| + |v(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t) - v(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, t)| \leq \omega (|\mathfrak{x} - \bar{\mathfrak{x}}| + |\mathfrak{y} - \bar{\mathfrak{y}}|),$$

wo

$$(34) \quad \omega(\mathfrak{z}) = \gamma \mathfrak{z} \left| \log \sqrt{2} \frac{16 R}{\mathfrak{z}} \right|, \quad \gamma = 56 c,$$

stetig und ≥ 0 in dem Intervall⁷⁾ $0 \leq \mathfrak{z} < +\infty$ ist. Ferner sei $\mathfrak{x}(t), \mathfrak{y}(t)$ für $t_0 \leq t \leq t$ die in K verlaufende Lösungskurve des Differentialsystems

$$(35) \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = u(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t), \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = v(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)$$

⁷⁾ Wir haben nicht nötig, $\omega(\mathfrak{z})$ auch für negative Werte von $\mathfrak{z}$ durch $\omega(\mathfrak{z}) = \omega(|\mathfrak{z}|)$ zu definieren; unwesentlich ist auch, daß wir $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), (\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}})$ auf eine Kreisscheibe und nicht auf ein Quadrat beschränken.

durch den Weltpunkt t, x, y , und es sei $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ eine zweite für $t_0 \leq t \leq t$ in K verlaufende Lösungskurve des Systems (35) durch den Weltpunkt $t, \bar{x}, \bar{y}$. Dann folgt aus dem Kamkeschen Hilfssatz⁸⁾:

$$(36) \quad |x(t) - \bar{x}(t)| + |y(t) - \bar{y}(t)| \leq \psi(2t - t).$$

Dabei ist $z = \psi(t)$ für $t \leq t \leq 2t - t_0$ die durch den Punkt $t, z = |x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|$ gehende maximale Integralkurve der Differentialgleichung

$$(37) \quad \frac{dz}{dt} = \omega(z),$$

die also in (36) an der Geraden $t = t$ gespiegelt erscheint.

In unserem Fall, wo $\omega(z)$ die Gestalt (34) hat, kann $\psi(t)$ in $t \leq t \leq 2t - t_0$ und damit $\psi(2t - t)$ in $t_0 \leq t \leq t$ nach oben abgeschätzt werden. Unter Einführung der neuen unbekannten Funktion

$$(38) \quad s = \frac{z}{\sqrt{2} \, 16 R}$$

ist nämlich (37) gleichwertig mit der in $t \leq t \leq 2t - t_0$ geltenden Differentialgleichung

$$(39) \quad \frac{ds}{dt} = \gamma s |\log s|$$

mit der Anfangsbedingung $t = t, s = s = \frac{z}{\sqrt{2} \, 16 R}$, wo $0 < s < \frac{1}{8}$ gilt,

falls die Punkte $(x, y), (\bar{x}, \bar{y})$ voneinander verschieden und in der zu K konzentrischen Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{2} P = R$ gelegen sind. Aus (39) folgt, daß mit wachsendem t auch s vom Werte s an monoton wächst,

aber da bei $0 < \varepsilon < 1 - s$ das Integral $\int_s^{1-\varepsilon} \frac{ds}{s \log \frac{1}{s}}$ für $\varepsilon \downarrow 0$ divergiert,

bleibt für $t \geq t$ dauernd $s < 1$, es ist also $0 < s \leq s < 1$, d. h. $1 < \frac{1}{s} \leq \frac{1}{s} < +\infty$. Statt (39) kann also für alle $t \geq t$

$$(40) \quad \frac{ds}{dt} = \gamma s \log \frac{1}{s}$$

⁸⁾ E. Kamke, Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 103 ff. Daraus ergibt sich die Formulierung des Textes, wenn man für die loc. cit. benutzte unabhängige Variable $\hat{t} = 2t - t, t \leq \hat{t} \leq 2t - t_0$, nimmt und die aus (35) auf $\hat{t}$ umgerechneten Differentialgleichungen betrachtet; ihre rechten Seiten besitzen dieselbe (von t bzw. $\hat{t}$ unabhängige, im Sinne von (33) geltende Schranke $\omega(z)$ wie (35). In (37) haben wir statt $\hat{t}$ wieder t geschrieben.

geschrieben werden oder (unter Einführung der Integrationsvariablen $\sigma = \frac{1}{s}$)

$$(41) \quad \gamma(t-t) = \int_s^{\frac{1}{s}} \frac{d\varsigma}{\varsigma \log \frac{1}{\varsigma}} = \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{1}{s}} \frac{d\sigma}{\sigma \log \sigma} = \log \log \frac{1}{s} - \log \log \frac{1}{s}.$$

Weiter bekommen wir

$$(42) \quad \log \frac{1}{s} = e^{-\gamma(t-t)} \log \frac{1}{s}$$

und für $t \leq t \leq 2t - t_0 \leq t + \Theta$

$$(43) \quad s = s^{e^{-\gamma(t-t)}} \leq s^v,$$

wo

$$(44) \quad v = e^{-\gamma\Theta} = e^{-56(1+13C_0\Theta)^2 + 4_0C_0\Theta}, \quad 0 < v < 1,$$

ein genereller Exponent ist.

Die Funktion $z = \psi(t)$ besitzt im Intervall $t \leq t \leq 2t - t_0$ nebenbei bemerkt den Ausdruck

$$(45) \quad \psi(t) = (\sqrt{2} 16 R)^{1-e^{-\gamma(t-t)}} z^{e^{-\gamma(t-t)}};$$

ebenso ist für $t_0 \leq t \leq t$

$$(46) \quad \psi(2t-t) = (\sqrt{2} 16 R)^{1-e^{-\gamma(t-t)}} z^{e^{-\gamma(t-t)}}.$$

Für uns ist aber vor allem die aus (43) folgende Abschätzung

$$(47) \quad \psi(2t-t) \leq (\sqrt{2} 16 R)^{1-v} z^v \text{ in } t_0 \leq t \leq t$$

wichtig. Nun setze ich speziell $t = t_0$ und wende auf diesen Zeitpunkt die Kamkesche Ungleichheit (36) unter Berücksichtigung der Bedeutung von z an:

$$(48) \quad |a - \bar{a}| + |b - \bar{b}| \leq (\sqrt{2} 16 R)^{1-v} (|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|)^v.$$

Wegen (32) und der analogen Beziehung im Bezugsraum kommt schließlich

$$(49) \quad d_0 \leq \sqrt{2} (16 R)^{1-v} d^v.$$

Hierbei besitzt der Exponent $0 < v < 1$ den generellen, d. h. von t_1 unabhängigen Wert (44), außerdem war $\bar{R} \leq R$, $R \geq R_*$. Diese Verzerrungsformel (49), die beiläufig in symmetrischer Form für beliebige R , $\bar{R}$ auch

$$(50) \quad d_0 \leq 23 (R_*^{1-v} + R^{1-v} + \bar{R}^{1-v}) d^v$$

geschrieben werden kann, ist das Kernstück unseres Beweises.

4. Ableitung genereller Konstanten für die Voraussetzungen des Lichtensteinschen Existenzsatzes. Wir unterscheiden jetzt wieder wie zu Beginn von 3. die beiden Fälle $R \geq R_*$ und $R \leq R_*$.

1. Sei

$$(51) \quad R \geq R_* \text{ und } \bar{R} \leq R, \quad d \leq \frac{1}{2} R.$$

Dann sind sicher die Voraussetzungen der Verzerrungsformel (49) erfüllt und sie liefert aus (5)₃, (1)₂, (18)₂, (19)₂

$$(52) \quad |\zeta(x, y, t) - \zeta(\bar{x}, \bar{y}, t)| = |\zeta_0(a, b) - \zeta_0(\bar{a}, \bar{b})| \\ \leq c \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda_0}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda_0}} \right) d^{\lambda_0} \\ \leq c(1+2^{2+\lambda_0}) \frac{1}{R^{2+\lambda_0}} \sqrt{2}^{\lambda_0} (16R)^{\lambda_0-\lambda} d^\lambda \leq 2^{\frac{9}{2}} \cdot 3^2 c \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda,$$

wo

$$(53) \quad \lambda = \lambda_0 \nu = \lambda_0 e^{-56(1+13C_0\Theta)^2+\lambda_0 C_0\Theta}, \quad 0 < \lambda < \lambda_0 < 1$$

ist. Also

$$(54) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 c \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda.$$

2. Sei

$$(55) \quad R \leq R_* \text{ und } \bar{R} \leq R_*.$$

Denn kann ich wegen (31) die Verzerrungsformel (49) mit R_* statt R auf (1)₂ anwenden; so kommt

$$(56) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 2C_0 \cdot \sqrt{2}^{\lambda_0} (16R_*)^{\lambda_0-\lambda} d^\lambda \leq 46 R_*^{\lambda_0-\lambda} C_0 d^\lambda.$$

In diesem Fall ist, falls $R > 0$ ist, auch

$$(57) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 46 R_*^{\lambda_0-\lambda} R_*^{2+\lambda} C_0 \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda \leq 46 c \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda.$$

(54) gilt also für beliebiges $R > 0$ und $\bar{R} \leq R$, $d \leq \frac{1}{2} R$. Daraus und aus (19) folgt aber bekanntlich⁹⁾ die Gültigkeit von (54) für alle $\bar{R} \geq R > 0$.

Nun kann auch eine Abschätzung der Form (56) überall sichergestellt werden¹⁰⁾. Nehmen wir zunächst speziell

$$(58) \quad R = R_* \text{ und } \bar{R} \geq R = R_*.$$

⁹⁾ Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. III, loc. cit. 1), die beiden Abschätzungen vor (2*), da $2^{1+\lambda} c < 204 c$ ist. Für $\bar{R} \geq R > 0$ und $d \leq \frac{1}{2} R$ gilt (51) nach dem bisherigen sicher; ist aber $d \geq \frac{1}{2} R$, so ist

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leq |\zeta| + |\bar{\zeta}| \leq 2c \frac{1}{R^2} \leq 2^{1+\lambda} c \frac{1}{R^{2+\lambda}} d^\lambda.$$

¹⁰⁾ loc. cit. 1), S. 229 f.

Dann ist wegen (54)

$$(59) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \epsilon \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} d^\lambda;$$

dies gilt auch für $\bar{R} \leq R = R_*$, wegen (57), also für $R = R_*$ und alle $\bar{R}$.

Zweitens ist für $R < R_*$, $\bar{R} \geq R_*$, wenn (x_*, y_*) der Punkt mit $\sqrt{x_*^2 + y_*^2} = R_*$ auf der Strecke (x, y) , $(\bar{x}, \bar{y})$ ist, d_* die Entfernung von (x_*, y_*) , (x, y) und $\bar{d}_*$ die von (x_*, y_*) , $(\bar{x}, \bar{y})$ bezeichnet,

$$(60) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \epsilon \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} (d_* + \bar{d}_*) \leq 204 \epsilon \frac{1}{R_*^{2+\lambda}} 2^{1-\lambda} d^\lambda,$$

also

$$(61) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \cdot 2^{1-\lambda} R_*^{2-\lambda} C_0 d^\lambda.$$

Wegen (56) gilt (61) für $R < R_*$ und alle $\bar{R}$; natürlich auch für $\bar{R} < R_*$ und alle R .

Endlich sei etwa $\bar{R} \geq R$ und $R \geq R_*$, $\bar{R} \geq R_*$. Auch dann gilt wegen (54) die Ungleichheit (61), die somit für alle R , $\bar{R}$ besteht und die gewünschte Form hat.

Nun knüpfen wir wieder an (54) an und folgern¹¹⁾ daraus die in (x, y) , $(\bar{x}, \bar{y})$ symmetrische Ungleichheit

$$(62) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \epsilon \left(\frac{1}{R^{2+\lambda}} + \frac{1}{\bar{R}^{2+\lambda}} \right) d^\lambda \quad \text{für alle } R, \bar{R} > 0,$$

also

$$(63) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \cdot 2^{2+\lambda} \epsilon \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}} \right) d^\lambda$$

für $R \geq 1$, $\bar{R} \geq 1$, wegen $1+R \leq 2R$, $1+\bar{R} \leq 2\bar{R}$. Ist aber etwa $R \leq 1$, d. h. $1+R \leq 2$, so gibt (61)

$$(64) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 204 \cdot 2^3 R_*^{2-\lambda} C_0 \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}} \right) d^\lambda;$$

diese Schranke gilt auch für $\bar{R} \leq 1$. Alles in allem folgt aus (63), (64) für alle R , $\bar{R}$

$$(65) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq C \left(\frac{1}{(1+R)^{2+\lambda}} + \frac{1}{(1+\bar{R})^{2+\lambda}} \right) d^\lambda,$$

$$C = 1632 \epsilon = 1632 (1 + 13 C_0 \Theta)^{2+\lambda_0} C_0.$$

Nach (19) gilt ferner

$$(66) \quad |\zeta| \leq C \frac{1}{(1+R)^2}.$$

Das sind die beim fundamentalen Existenz- und Unitätssatz vorausgesetzten Ungleichheiten, und zwar mit generellen (nur von λ_0, C_0, Θ und

¹¹⁾ loc. cit. 1), S. 230 f.

nicht von t_1 abhängigen) Werten der Konstanten λ, C . Damit ist nach dem, was in der Einleitung gesagt worden ist, die eindeutige Fortsetzbarkeit der „Flüssigkeitsbewegung“ im ganzen Intervall $t_0 \leq t \leq t_0 + \Theta$ bewiesen.

5. Verhalten des Druckes. Die im vorangehenden rein kinematisch betrachtete Lösung von (5), (3) auch dynamisch als Flüssigkeitsbewegung sicherzustellen, ist noch zu untersuchen, ob dauernd in der ganzen Flüssigkeit Druck ($p > 0$) herrscht (unter einer geeigneten Annahme über den Wert p_∞ des Druckes im Unendlichen). Der Druck ist durch die äußere (pro Masseneinheit verstandene) Kraft X, Y bedingt, die sich, damit der Wirbelsatz in der Form (5)₃ gilt, aus einer Kräftefunktion $U(x, y, t)$ ableiten soll: $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Den Ergebnissen von Herrn Lichtenstein¹²⁾ zufolge gilt zunächst $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} = O(R^{-2})$, und es existiert ein Beschleunigungspotential $Q(x, y, t)$ mit stetigen Ableitungen erster Ordnung, die sich im Unendlichen ebenfalls wie $O(R^{-2})$ verhalten, während Q selbst dort einen vorgebbaren Wert Q_∞ annimmt. Die dann geltenden Differentialgleichungen

$$(67) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

bringen wir auf die Webersche Form

$$(68) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - 2v\zeta = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + 2u\zeta = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

wo die „Energiefunktion“

$$(69) \quad H = H(x, y, t) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - Q$$

dieselben Eigenschaften wie Q besitzt ($H_\infty = -Q_\infty$).

Nun ersetze ich loc. cit.²⁾, b) S. 212 ff den Druck p durch unser H und erhalte die Beziehung

$$(70) \quad H - H_\infty = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta' \left(u' \frac{\partial}{\partial y} - v' \frac{\partial}{\partial x} \right) \log \frac{1}{r} \cdot dx' dy',$$

die als eine Verallgemeinerung der für eine Potentialströmung geltenden Bernoullischen Gleichung aufgefaßt werden kann¹³⁾.

¹²⁾ loc. cit.²⁾, a) S. 112 f.

¹³⁾ Diese Formel steht bei Oseen, loc. cit.³⁾, S. 85, explizit für eine kräftefreie Flüssigkeitsbewegung, sie gilt aber ohne weiteres auch im Falle der Bewegung im Feld einer Kräftefunktion, wenn man Oseens Größe $\frac{q}{\rho} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho}$ durch den vollständigen Ausdruck (72)₂ der Energiefunktion ersetzt.

Wegen (13) gestattet der Mittelwertsatz, das Integral für $H - H_\infty$ in (70) nochmals nach demselben Prinzip wie (13) abzuschätzen; man erhält die nur vom Anfangszustand abhängige Schranke

$$(71) \quad |H - H_\infty| \leq 10 C_0 \cdot 20 C_0 = 200 C_0^2.$$

Ist ϱ die Dichte der homogenen inkompressiblen Flüssigkeit (eine feste Zahl), so gilt schließlich für den Druck p , vgl. (67),

$$(72) \quad Q = U - \frac{p}{\varrho} \quad \text{oder} \quad H = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - \left(U - \frac{p}{\varrho} \right).$$

Nehmen wir an, es existiere der Grenzwert $U_\infty = U_\infty(t)$ und es bestehe für alle Zeiten überall die Ungleichheit

$$(73) \quad |U - U_\infty| \leq K \quad (K \text{ räumlich und zeitlich konstant}),$$

so ist durch (72) der Druck so bestimmt, daß auch p_∞ existiert und $H_\infty = -\left(U_\infty - \frac{p_\infty}{\varrho}\right)$ ist. Offenbar kann man auch p_∞ vorgeben denken und aus der letzten Relation H_∞ bestimmen.

Das durch (70) gegebene Integral stellt jetzt den Ausdruck

$$(74) \quad H - H_\infty = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - \left(U - U_\infty - \frac{p - p_\infty}{\varrho} \right)$$

dar, und es folgt aus (71) die Abschätzung

$$(75) \quad \left| \frac{p - p_\infty}{\varrho} \right| \leq |H - H_\infty| + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + |U - U_\infty| \leq 300 C_0^2 + K.$$

Wählt man definitiv die Größe p_∞ zeitlich konstant und

$$(76) \quad \frac{p_\infty}{\varrho} > 300 C_0^2 + K,$$

so herrscht wegen (75) in der ganzen Flüssigkeit zu allen Zeiten wirklich Druck ($p > 0$).

(Eingegangen am 1. Januar 1933.)

Sur les polydromies de certains potentiels newtoniens prolongés.

Von

R. Wavre in Genf.

MM. Dive et Vasilesco ont apporté une contribution très importante et décisive aux résultats exposés dans cet article¹). Ces résultats relèvent des trois problèmes généraux suivants:

1° Reconnaître un corps, son potentiel newtonien étant donné au voisinage d'un point?

2° Sous quelles conditions deux corps, ou deux ensembles de corps, peuvent-ils créer le même potentiel dans un certain domaine?

3° Etudier, dans tout son domaine d'existence, la fonction analytique dont un élément coïncide avec un potentiel newtonien donné?

Dans cet ordre d'idée, MM. Dive et Nikliborc ont démontré qu'un ellipsoïde homogène et un corps quelconque ne peuvent créer le même potentiel dans leur partie commune; en d'autres termes, le potentiel d'un ellipsoïde caractérise l'ellipsoïde²).

M. Dive et moi-même avons montré la polydromie du potentiel d'un certain volume attirant.

M. Vasilesco et moi-même avons montré qu'une calotte sphérique homogène engendre un potentiel qui est un élément d'une fonction

¹) P. Dive, Attraction des ellipsoïdes homogènes et réciproques d'un théorème de Newton, Bulletin de la Soc. Math. de France **59** (1931), p. 128. R. Wavre et P. Dive, Un exemple de fonction harmonique multiforme fourni par la théorie du potentiel newtonien, Compt. rend. des séances de l'Acad. des Sc. **194** (mai 1932), p. 1901. F. Vasilesco et R. Wavre, Sur une manière d'engendrer des fonctions harmoniques multiformes dans l'espace et le plan, Compt. rend. des Séances de l'Acad. des Sc. **194** (juin 1932), p. 2282. P. Dive, Sur l'identité de deux corps possédant le même potentiel dans une région intérieure commune, Compt. rend. des Séances de l'Acad. des Sc. **195** (octobre 1932), p. 597. R. Wavre, Sur certains potentiels de simple couche générateurs de fonctions harmoniques, réelles et multiformes, Compt. rend. des Séances de l'Acad. des Sc. **195** (octobre 1932), p. 701.

²) Voir aussi P. Dive: Sur l'identité de deux corps possédant le même potentiel dans une région intérieure commune. Compt. rend. des Séances de l'Acad. des Sc. **195** (octobre 1932), p. 597.

harmonique multiforme dont les différentes branches s'échangent autour de la frontière F de la calotte, cette fonction n'ayant comme singularité dans tout l'espace réel, que la ligne de ramification F et un pôle au centre de la sphère.

Mes trois questions précédentes sont, naturellement, liées entre elles, elles auraient besoin d'être précisées encore, mais nous les considérons ici comme trois leitmotiv.

Voici d'ailleurs quelques résultats connus qui préciseront ce genre de recherches.

Envisageons une répartition de matière qui occupe un ensemble R de points de l'espace. Soit C l'ensemble des points qui ne font pas partie de R ; C est le complément de l'ensemble R ; R comme C peuvent être décomposés en partie d'un seul tenant $R_1, R_2, \dots$ et $C_1, C_2, \dots$. Les R_n sont séparés par des C_n et réciproquement.

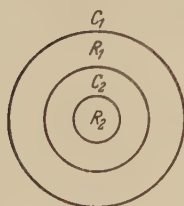


Fig. 1.

Envisageons le potentiel U créé par la répartition donnée. Il est uniforme, mais il se décompose en plusieurs fonctions analytiquement distinctes: U_{R_n}, U_{C_n} , suivant le domaine où l'on place le point attiré. Les fonctions de la seconde suite sont harmoniques, donc

analytiques, c'est à dire développables par la série de Taylor à trois variables, au voisinage de chaque point de leur domaine respectif C_n . Elles ne sont pas en général le prolongement analytique l'une de l'autre quoique en général elles soient prolongeables au travers des R_n . Les fonctions de la première suite sont analytiques aussi dans tout domaine où la densité est elle même analytique.

Un indice supérieur affectant U aura trait au corp générateur, un indice inférieur à la région où le potentiel est calculé.

Envisageons une surface fermée S située tout entière dans un C_n . Si la région de l'espace intérieure à S contient des masses attirantes T , la fonction $U_{C_n}^T$ admet certainement une singularité dans cette région-là, sans quoi cette fonction serait harmonique dans tout l'espace et nulle à l'infini, donc identiquement nulle, ce qui n'est pas.

Si S ne contient qu'un volume attirant R_p ayant la connexion de la sphère massive, le même raisonnement prouverait que la fonction U^{R_p} admet une singularité dans R_p lui-même.

A priori l'on peut s'attendre à ce que le potentiel prolongé admette les singularités les plus diverses à l'intérieur des masses attirantes.

La topologie est aussi appelée à jouer un rôle fondamental dans ce genre de recherches.

Sur les calottes sphériques homogènes.

Soient S une surface sphérique homogène, m sa masse totale, a son rayon. Le potentiel newtonien qu'elle engendre est, à l'intérieur de la sphère, m/a , à l'extérieur m/r où r est la distance du point attiré au centre. Considérons maintenant une calotte S' de forme quelconque, découpée sur S et soit S'' la partie restante, $S = S' + S''$. Soient encore i l'intérieur de la sphère, e l'extérieur de la sphère; U' et U'' les potentiels créés par S' et par S'' . L'on a

$$U'_i + U''_i = \frac{m}{a}, \quad U'_e + U''_e = \frac{m}{r}.$$

Envisageons le potentiel U'_i , élément d'une fonction harmonique Ψ . Partons d'un point intérieur. Nous avons

$$\Psi = U'_i = \frac{m}{a} - U''_i.$$

Cette fonction Ψ peut être prolongée analytiquement au travers de S' . En effet, il en est ainsi de la constante m/a et du potentiel U'' . L'on arrive ainsi en un point extérieur où U'' peut être remplacé à son tour par sa valeur en U'

$$\Psi = \frac{m}{a} - U''_e = \frac{m}{a} - \frac{m}{r} + U'_e,$$

et si l'on revient au point de départ en traversant S'' , le potentiel U' suit la détermination principale et reprend la même valeur. L'on a donc

$$\Psi_{\text{arrivée}} - \Psi_{\text{départ}} = \frac{m}{a} - \frac{m}{r}.$$

C'est la *fonction période* pour un circuit C entourant la frontière F de S' . La fonction Ψ admet une infinité de déterminations, puisque l'on peut décrire un nombre quelconque de fois ce circuit. La fonction période de Ψ admet un pôle au centre de la sphère et les seules singularités dans l'espace réel sont la ligne de ramification F et le pôle mentionné. En résumé, toute calotte sphérique homogène engendre une fonction harmonique multiforme, admettant la frontière de la calotte comme ligne de ramification et aucune autre singularité dans le domaine réel qu'un pôle au centre de la sphère.

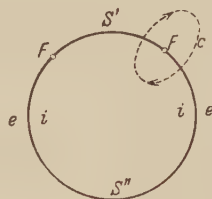


Fig. 2.

Sur les potentiels d'une couche analytique.

Envisageons maintenant un cas plus général. Soient S une surface à deux côtés distincts i et e et ρ la densité d'une couche répartie sur S . Envisageons le potentiel. Dans des cas très généraux, il est prolongeable au travers de S , dans ce sens que le potentiel U_i du côté i se prolonge

au travers de S et il en est de même du potentiel U_e du côté e . Ce sera le cas, notamment, si la surface S est régulière et analytique et la densité ρ analytique³⁾. Nous dirons alors que l'on a à faire à une couche analytique. Les deux fonctions sont donc prolongeables dans un domaine D qui contient tout point intérieur de S . Soient S' une partie

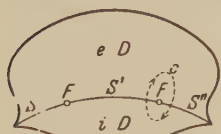


Fig. 3.

de S , F sa frontière et S'' la couronne restante, $S = S' + S''$; puis U' et U'' les potentiels correspondants. Posons comme précédemment

$$U_i + U_i'' = U_i, \quad U_e + U_e'' = U_e.$$

Envisageons le potentiel U' du côté i et écrivons

$$\Psi = U_i = U_i - U_i''.$$

Cette fonction Ψ est harmonique dans D hors de S'' et hors de S' , c'est à dire dans $D - F$. Partons d'un point du côté i pour aller en un point du côté e en traversant S' . L'on aura à l'arrivée

$$\Psi = U_i - U_e'' = U_i - U_e + U_e';$$

puis retournons au point de départ en traversant S'' . La fonction Ψ n'a cessé d'être harmonique le long de ce circuit C situé dans D et l'on a

$$\Psi_{\text{arrivée}} - \Psi_{\text{départ}} = U_i - U_e.$$

C'est de nouveau la fonction période et la frontière F est une ligne de ramification de Ψ . La différence $U_i - U_e$ est d'ailleurs indépendante de la forme de S' et de l'étendue de S ; elle est nulle sur S en vertu de la continuité du potentiel de simple couche. L'on peut écrire, d'après une propriété connue,

$$4\pi\rho = \frac{d}{dn_i}(U_i - U_e).$$

Donc, toute portion d'une couche analytique engendre dans son voisinage une fonction harmonique réelle et multiforme et la densité est proportionnelle à la dérivée normale de la fonction période. On montre facilement que la fonction période est la limite du prolongement analytique du potentiel U_i lorsque la surface S' tend vers zéro; elle n'est pas identiquement nulle tandis que la détermination principale U' s'est évanouie.

La fonction période est entièrement déterminée par une aire S''' , si petite soit elle, détachée sur S , car l'on a $U_i - U_e = U_i''' - U_e'''$. Cette fonction est la différence du potentiel U_i''' prolongé et du potentiel U_e''' ; c'est une fonctionnelle, on mieux une transmuée de S''' , d'un genre très spécial, qui ne s'évanouit pas avec S''' ,

Envisageons maintenant quelques cas particuliers.

³⁾ Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II, c 3, Lichtenstein, S. 209.

1° Soit S une surface de niveau pour un potentiel V dû à une distribution de matière située dans une région T intérieur à S et posons

$$U' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dn_i} dS'.$$

Le potentiel U_i à l'intérieur est une constante K , le potentiel U_o est égal au potentiel V , la fonction Ψ admet donc la fonction période $K - V$ pour le contour de S' . Elle n'admet comme autre singularité dans l'espace réel que les singularités de V dans les masses attirantes T . Si ces dernières comprennent par exemple une calotte sphérique homogène, la fonction période $K - V$ sera elle-même multiforme et l'on peut imaginer ainsi des fonctions harmoniques présentant une polydromie de plus en plus complexe. Nous retrouvons ainsi les fonctions harmoniques multiformes que M. Vasilescu a mises en évidence.

2° Soient S une surface fermée et $G(A, P)$ la fonction de Green pour l'intérieur de S . Envisageons l'intégrale

$$U'(A, P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{PP'} \frac{d}{dn} G(A, P') dS'.$$

Etendue à toute la surface S , elle donnerait la fonction $1/AP$ si le point P est à l'extérieur, et la fonction $H(A, P)$ harmonique et prenant la valeur $1/AP$ sur S , si P est à l'intérieur de S . La fonction période pour un circuit décrit autour de la frontière F de S' est donc $\frac{1}{AP} - H(A, P)$. C'est la *fonction de Green*.

3° Si S est une sphère, la fonction précédente n'admet pas d'autre singularité dans l'espace réel que la ligne F de ramification, le pôle A et son conjugué A' par rapport à la sphère.

4° L'intégrale de Poisson étendue à une sphère S de rayon a de centre O

$$(2) \quad U(A) = \frac{a^2 - \overline{OA}^2}{4\pi a} \int f(P') \frac{1}{AP'^3} dS$$

représente, on le sait, une fonction harmonique à l'intérieur de S et une fonction harmonique à l'extérieur de S . La première tend vers $+f$, la seconde vers $-f$ quand A tend vers S . Si la fonction f est analytique, ces deux fonctions harmoniques sont prolongeables au travers de S mais elles ne se raccordent pas.

L'intégrale précédente, prise sur une calotte sphérique S' quelconque, est encore une fonction harmonique multiforme et la fonction période pour la frontière de S' se réduit à $2f$ sur S ; elle n'est pas identiquement nulle. Cela tient à ce que le second membre de (2) renferme un potentiel de double couche (voir 6°).

5° Enfin, les raisonnements précédents prouvent que l'intégrale

$$U'(A, P) = -\frac{a^3 - \overline{OA^3}}{4\pi a} \int \frac{1}{P P'} \frac{1}{\overline{A P'}^3} dS'$$

représente une fonction harmonique en A , harmonique aussi en P et multiforme. Pour un circuit C décrit autour de la frontière F de S' , la période est

$$\frac{a}{\overline{OA}} \frac{1}{\overline{PA'}} - \frac{1}{\overline{AP}} \text{ si } P \text{ décrit } C, \quad \frac{a}{\overline{OA}} \frac{1}{\overline{PA'}} + \frac{1}{\overline{AP}} \text{ si } A \text{ décrit } C.$$

La fonction n'admet pas d'autre singularité dans le domaine réel que F , les pôles A, P et les points conjugués. On sait que l'intégrale précédente étendue à la sphère totale, est à la base de la méthode du balayage de Poincaré.

6° Comme exemple d'un potentiel de double couche, générateur d'une fonction harmonique multiforme, prenons l'intégrale de Gauss, mais étendue à une calotte sphérique S' et non pas à la sphère totale. On aurait $U_i = 4\pi$ et $U_e = 0$, la fonction période est, dans ce cas particulier, une constante, c'est 4π , elle n'est pas nulle sur la couche envisagée.

7° Ces exemples de polydromie des potentiels s'obtiennent en prenant des intégrales classiques mais étendues à une portion seulement du domaine habituel. Dans le plan complexe cet artifice est connu, M. A. Weinstein me l'a amicalement rappelé. L'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-x} dz$$

étendue à une ligne ouverte Γ' , située dans une région où f est holomorphe, représente une fonction multiforme, admettant les extrémités de Γ' comme point de ramification et $f(x)$ comme fonction période.

8° Des fonctions analogues peuvent être formées dans le plan à partir de lignes attirantes.

Sur un potentiel newtonien ordinaire générateur d'une fonction multiforme.

Avec M. Dive, envisageons une couche homogène comprise entre deux sphères concentriques et une autre couche identique telle que les cavités aient une partie commune δ . Les potentiels de ces deux couches sont les mêmes dans δ . Ils sont d'ailleurs constants. Retranchons l'anneau commun aux deux corps. Les potentiels restent identiques mais ils ne sont plus constants. Si (1) représente la partie restante de la première couche et (2) la partie restante de la seconde couche, l'on aura

$$\begin{aligned} U_{\delta}^{(1)} &= K - U_{\delta}^A, \\ U_{\delta}^{(2)} &= K - U_{\delta}^A, \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad U_{\delta}^{(1)} = U_{\delta}^{(2)}.$$

Le potentiel $U^{(1)}$ est prolongeable de long d'un chemin I qui évite la masse (1), le potentiel $U^{(2)}$ est prolongeable le long du chemin II qui évite la masse (2) (Fig. 4). Mais en un point extérieur aux deux couches, ces deux déterminations qui représentent d'ailleurs le potentiel ordinaire, l'un pour la masse (1) l'autre pour la masse (2), sont certainement différentes, puisque l'attraction de la masse (1) est la différence de l'attraction de la couche primitive de centre O_1 et de l'attraction de l'anneau; tandis que, pour la masse (2), c'est la différence de la seconde couche sphérique primitive de centre O_2 et de l'anneau, mais les deux attractions des deux couches primitives passent l'une par O_1 et l'autre par O_2 . Ainsi nous avons une fonction harmonique qui présente une polydromie, suivant que l'on traverse l'anneau retranché dans un sens ou dans l'autre. Il est clair que dans tout son domaine d'existence, la fonction harmonique qui coïncide avec $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$ dans δ , présente les mêmes particularités que le potentiel prolongé U^A de l'anneau, et c'est ce dernier que nous allons étudier. Comme nous le verrons, le potentiel prolongé de l'anneau est une fonction harmonique multiforme qui admet les quatre arrêtes de l'anneau x, y, z, t comme ligne de ramification et comme seule autre singularité dans tout l'espace réel, deux pôles simples aux centres des deux sphères.

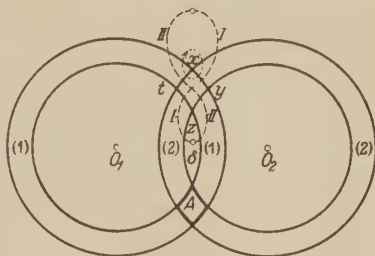


Fig. 4.

Tout d'abord, envisageons le potentiel d'une couche homogène de masse m comprise entre deux sphères concentriques, l'une de rayon a , l'autre de rayon b et soient J la cavité, Z la couche et E l'espace extérieur. L'on aura, pour un point à la distance r du centre.

$$U_J = K = 2\pi \varrho (b^2 - a^2),$$

$$U_Z = \frac{4\pi}{3} \varrho \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right) + 2\pi \varrho (b^2 - r^2),$$

$$U_E = \frac{4\pi}{3} \varrho (b^3 - a^3) = \frac{m}{r}.$$

Revenons aux deux couches et soient r_1 et r_2 les distances aux deux centres. Posons

$$H = \frac{4\pi}{3} \varrho a^3 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{2\pi}{2} \varrho (r_1^3 - r_2^3),$$

$$H^1 = \frac{m}{r_1},$$

$$H^2 = \frac{m}{r_2}.$$

Le potentiel de l'anneau est la différence du potentiel d'une des couches et du potentiel de la partie restante, une fois l'anneau retranché, et l'on peut écrire sur les différentes faces de l'anneau

$$\begin{aligned} U_{x,y}^A &= H^1 - U_{x,y}^{(1)}, & U_{y,z}^A &= K - U_{y,z}^{(2)}, \\ U_{z,t}^A &= K - U_{z,t}^{(1)}, & U_{t,x}^A &= H^2 - U_{t,x}^{(2)}. \end{aligned}$$

Et dans l'intérieur de l'anneau, on peut écrire z_2 et z_1 étant les couches primitives

$$U_A^{(3)} = U_A^{z_1} - U_A^A, \quad U_A^{(2)} = U_A^{z_2} - U_A^A$$

d'où

$$U_A^{(2)} - U_A^{(1)} = H.$$

Les fonctions K, H, H^1, H^2 sont harmoniques dans tout l'espace, à part les pôles aux centres O_1 et O_2 ; elles sont d'ailleurs univoques. Partons d'un point extérieur à A et décrivons un circuit autour de l'arête x . En vertu des équations précédentes, on peut écrire, en suivant le circuit:

$$\begin{aligned} U^A &\rightarrow H^1 - U_{x,y}^{(1)} \rightarrow H^1 - U_A^{(1)} \rightarrow H^1 + H - U_A^{(2)} \\ &\rightarrow H^1 + H - U_{t,x}^{(2)} \rightarrow H^1 + H - H^2 + U_{t,x}^A. \end{aligned}$$

Les indices supérieurs représentent les lieux géométriques où l'on se trouve et les flèches indiquent que les diverses fonctions sont le prolongement analytique l'une de l'autre.

Soient: $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_t$ les périodes pour des circuits décrits autour de x seul, de y seul, etc. L'on a, c'est facile à vérifier:

$$\omega_x = H + H^1 - H^2, \quad \omega_y = K - H - H^1, \quad \omega_z = H, \quad \omega_t = H^2 - H - K.$$

Si l'on décrit un circuit entourant l'anneau lui-même, la période est nulle $\omega_x + \omega_y + \omega_z + \omega_t = 0$, puisque l'on a suivi la détermination principale du potentiel de l'anneau à l'extérieur. Si le circuit entoure y et x , la période est $\omega_x + \omega_y = K - H^2$. Enfin si l'on décrit un 8 en contourant positivement l'arête x et négativement l'arête z , la période sera évidemment $\omega_x - \omega_z = H^1 - H^2$ etc

L'essentiel de ces résultats peut être généralisé au cas où les couches sphériques sont remplacées par des homoides ellipsoïdaux, c'est à dire par des couches comprises entre des ellipsoïdes homothétiques. Le potentiel dû au premier homoïde, l'anneau étant retranché, est harmonique partout sauf dans la région restante. Le potentiel du second homoïde est harmonique dans tout l'espace, sauf dans la région restante de cet homoïde. Ces deux potentiels, on le sait, coïncident dans la partie commune aux deux cavités. S'ils coïncidaient partout, la fonction qu'ils représenteraient, serait uniforme dans tout l'espace et harmonique, sauf peut être sur les quatre arêtes de l'anneau. Cette fonction resterait bornée au voisinage

des arêtes qui seraient des singularités impropres de la fonction harmonique (théorème de MM. Picard, Lebesgue). Elle serait alors harmonique et uniforme dans tout l'espace et nulle à l'infini, ce qui n'est pas. La fonction n'est donc pas uniforme et l'on obtient deux déterminations distinctes au moins, suivant la manière dont on traverse l'anneau re-tranché.

Remarque sur les corps potentiellement équivalents.

Envisageons deux corps qui créent le même potentiel dans un domaine D de l'espace. Telles sont les couches sphériques ou les homoïdes du paragraphe précédent, que l'on retranche ou non l'anneau commun. Le domaine D est ici la partie δ commune aux deux cavités. Il est probable que deux corps potentiellement équivalents qui se raccordent suivant une arête, admettent cette arête comme ligne de ramification du potentiel commun. C'est pour cette raison que nous les envisagerons ici.

Dégageons alors une condition nécessaire pour que deux familles de corps F_1 et F_2 puissent créer le même potentiel dans un domaine D .

Soient e l'espace entier, Δ_1 l'ensemble des points qui peuvent être reliés à un point de D par une ligne qui ne contient aucun point de F_1 , puis Δ_2 le même ensemble pour F_2 ; Δ_1 est donc le domaine contigu aux corps F_1 , d'un seul tenant avec D ; Δ_2 est le domaine correspondant pour F_2 .

Les deux familles F_1 et F_2 ne sauraient créer le même potentiel dans D si la réunion des domaines Δ_1 et Δ_2 remplit l'espace entier.

En d'autres termes, pour que l'on ait

$$U^{F_1} = U^{F_2} \text{ il faut avoir } \Delta_1 + \Delta_2 < e.$$

En effet, le potentiel de F_1 est uniforme dans Δ_1 . Le potentiel de F_2 est uniforme dans Δ_2 ; si $\Delta_1 + \Delta_2$ remplit l'espace entier, le potentiel est uniforme dans tout l'espace, harmonique, nul à l'infini, donc identiquement nul, ce qui ne saurait être. La proposition est démontrée.

Exemple: 1° Une sphère homogène et la masse totale placée au centre créent le même potentiel à l'extérieur de la sphère; ici l'on a

$$\Delta_1 + \Delta_2 = e - \text{le centre.}$$

2° Une surface sphérique avec un petit trou ne saurait créer le même potentiel, dans un domaine, qu'un corps plein quelconque sans point commun avec la sphère.

3° Deux surfaces sphériques homogènes qui se coupent créent le même potentiel dans la région D intérieure aux deux sphères. Ici la région extérieure aux deux sphères ne fait pas partie de $\Delta_1 + \Delta_2$; mais

l'on peut adjoindre l'une des calottes sphérique à l'autre sphère en la prenant négativement, alors

$$\Delta_1 + \Delta_2 = e \text{ — l'intersection des sphères.}$$

4° Deux homoïdes sphériques ou ellipsoïdaux identiques qui se coupent et dont on a retranché l'anneau commun, créent, nous l'avons vu, le même potentiel dans la cavité. Ici l'on a

$$\Delta_1 + \Delta_2 = e \text{ — les arêtes de l'anneau.}$$

Rappelons, enfin, que le problème des corps potentiellement équivalents se pose en mécanique céleste. En effet, l'on peut démontrer que l'attraction d'un astre fluide est entièrement déterminée à l'extérieur par le mouvement de la surface libre et la masse totale⁴⁾. La question de savoir s'il existe une seule répartition possible de matières à l'intérieur se rattache au problème des corps potentiellement équivalents, car deux répartitions créeraient le même potentiel en vertu du théorème précédent.

⁴⁾ R. Wavre, Extension d'un théorème de Stokes relatif aux astres fluides. *Compt. rend. des séances de l'Acad. des Sc.* **194** (avril 1932), p. 1447.

(Eingegangen am 10. November 1932.)

Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper $\Re(i\sqrt{2})$.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Probleme und Resultate.

In dieser Arbeit ist stets D eine positive ganze Zahl, die nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist, und d ist der kleinste positive Rest von D mod 4:

$$(1) \quad D \equiv d \pmod{4}.$$

Ist nun γ eine positive Zahl, so kann man fragen, ob sich zu jeder komplexen Zahl α , die nicht dem imaginären quadratischen Körper $\Re(i\sqrt{D})$ angehört, unendlich viele Paare von ganzen Zahlen p, q des Körpers $\Re(i\sqrt{D})$ bestimmen lassen, für welche

$$(A) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\gamma}{|q|^2}$$

ist. Wenn das zutrifft, nennen wir die Zahl γ „in (A) zulässig“; in § 2 werden wir zeigen, daß es solche Zahlen γ gibt. Die untere Grenze der in (A) zulässigen Zahlen ist eine Funktion von D , die wir mit $\psi(D)$ bezeichnen wollen. Dann ist jede Zahl größer als $\psi(D)$ in (A) zulässig, jede Zahl kleiner als $\psi(D)$ ist nicht in (A) zulässig. Ob $\psi(D)$ selbst noch in (A) zulässig ist, bleibt zweifelhaft. Nach früheren Untersuchungen ist

$$(2) \quad \psi(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \psi(3) = \frac{1}{\sqrt[4]{13}},$$

und beidemal ist $\psi(D)$ selbst noch in (A) zulässig¹⁾. In der vorliegenden Arbeit wird für $D \neq 1, 3$ allgemein die folgende Abschätzung gewonnen (§ 2 und 4):

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{d}} \leq \psi(D) \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4}, \quad D \neq 1 \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}, \quad D \neq 3 \end{array} \right\}^2.$$

Speziell die linke Hälfte der Ungleichung (3) folgt daraus, daß gezeigt wird: Jede der beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Ungleichungen

$$(B) \quad \left| \frac{i\sqrt{D} \pm i^d \sqrt{d}}{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

wird, wenn $\gamma < \frac{1}{\sqrt{d}}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare p, q erfüllt.

Man beachte dabei, daß die Zahlen $\frac{i\sqrt{D} \pm i^d \sqrt{d}}{2}$ wegen $D \neq 1, 3$ nicht dem Körper $\Re(i\sqrt{D})$ angehören; übrigens dürfte der Faktor i^d außer im Fall $D = 2$ auch einfach durch i ersetzt werden, ohne daß die Behauptung falsch würde. Weiterhin wird sich speziell ergeben, daß

$$(4) \quad \psi(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, und daß diese Zahl noch in (A) zulässig ist. Das ist eine unmittelbare Folge des nachstehenden Satzes, der in § 6 bewiesen wird³⁾:

Satz 1. Ist α eine nicht dem Körper $\Re(i\sqrt{2})$ angehörende komplexe Zahl, so läßt sich die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}|q|^2}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\Re(i\sqrt{2})$ befriedigen. Ist dagegen $\gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$, so läßt sich speziell jede der beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Ungleichungen

$$\left| \frac{i \pm 1}{\sqrt{2}} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

nicht durch unendlich viele solche Paare p, q befriedigen.

¹⁾ Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\Re(i)$. Math. Annalen 103 und 105 (1930). — Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abtlg., Jahrg. 1931.

²⁾ Für $D = 1$ und $D = 3$ ist die linke Hälfte der Ungleichung (3), wie man aus (2) ersieht, nicht richtig.

³⁾ Die analogen Sätze für $D = 1$ und $D = 3$ finden sich in den in Fußnote 1) zitierten Arbeiten.

Man kann weiter fragen, ob sich zu jedem Tripel komplexer Zahlen a, b, c , für die $b^2 - 4ac \neq 0$ ist und für die die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ höchstens einen Linearfaktor mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ hat, unendlich viele Paare ganzer Zahlen x, y des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ so bestimmen lassen, daß

$$(C) \quad 0 < |ax^2 + bxy + cy^2| \leq \gamma \sqrt{|b^2 - 4ac|}$$

ist. Wenn das der Fall ist, nennen wir die Zahl γ „in (C) zulässig“; in § 3 werden wir sehen, daß es solche Zahlen γ gibt. Die untere Grenze der in (C) zulässigen Zahlen ist wieder eine Funktion von D . Bezeichnen wir sie zunächst mit $\omega(D)$, so ist jede Zahl größer als $\omega(D)$ in (C) zulässig und jede Zahl kleiner als $\omega(D)$ ist nicht in (C) zulässig; ob $\omega(D)$ selbst noch in (C) zulässig ist, bleibt zweifelhaft.

In § 3 werden wir sehen, daß stets

$$(5) \quad \omega(D) = \psi(D)$$

ist. Nach (3) ist dann für $D \neq 1, 3$ insbesondere $\omega(D) \geq \frac{1}{\sqrt{d}}$, was auch unmittelbar daraus erkannt werden kann, daß für alle von 0,0 verschiedenen Paare x, y offenbar

$$(6) \quad \left| x^2 + i\sqrt{D}xy - \frac{D + (-1)^d d}{4} y^2 \right| \geq 1 = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{\sqrt{d}}$$

ist⁴⁾. Weiterhin folgt aus (4) und (5), daß $\omega(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, was aber auch unmittelbar aus dem folgenden viel mehr sagenden Satz geschlossen werden kann, den wir in § 7 beweisen werden⁵⁾:

Satz 2. Sind a, b, c komplexe Zahlen derart, daß $b^2 - 4ac \neq 0$ und daß die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ höchstens einen Linearfaktor mit Koeffizienten aus dem Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ hat, so gibt es in $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ unendlich viele Paare ganzer Zahlen x, y , für welche

$$0 < |ax^2 + bxy + cy^2| \leq \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{\sqrt{2}}$$

ist. Dabei gilt sogar für unendlich viele Paare rechts das Kleinerzeichen, wenn man von denjenigen quadratischen Formen absieht, die sich durch eine

⁴⁾ Für $D = 1$ und $D = 3$ ist die Ungleichung falsch, sobald $x = 0$ ist. Man beachte, daß die Zahl $\frac{D + (-1)^d d}{4}$ stets ganz ist; außer im Fall $D = 2$ dürfte übrigens des Faktor $(-1)^d$ auch einfach durch -1 ersetzt werden, ohne daß die Ungleichung (6) falsch würde.

⁵⁾ Analoge Sätze für $D = 1$ und $D = 3$ finden sich in meiner Arbeit: Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen. Math. Zeitschr. **35** (1932).

lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten des Körpers $\Re(i\sqrt{2})$ und der Determinante 1 auf die Form

$$\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{2}} (x^2 + i\sqrt{2}xy - y^2)$$

transformieren lassen. Bei diesen gilt für kein einziges von 0, 0 verschiedenes Paar das Kleinerzeichen.

Dabei ist zu bemerken, daß die beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Formen in Wahrheit nur eine Formenklasse darstellen, indem sie durch die Transformation $x \rightarrow y, y \rightarrow -x$ ineinander übergehen.

§ 2.

Anwendung des Minkowskischen Satzes über konvexe Körper.

Bedeutet σ irgendeine positive Zahl, so ist stets

$$(7) \quad 2|q| \cdot |\alpha q - p| \leq \sigma |q|^2 + \frac{1}{\sigma} |\alpha q - p|^2.$$

Sind nun p, q ganze Zahlen des Körpers $\Re(i\sqrt{D})$, so ist

$$\text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4}: p = x_1 + i\sqrt{D}x_2, q = y_1 + i\sqrt{D}y_2,$$

$$\text{für } D \equiv 3 \pmod{4}: p = x_1 + \frac{1+i\sqrt{D}}{2}x_2, q = y_1 + \frac{1+i\sqrt{D}}{2}y_2,$$

wo x_1, x_2, y_1, y_2 ganze rationale Zahlen sind. Setzt man noch $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, wo α_1, α_2 reell, so sieht man, daß die Ungleichung

$$\sigma |q|^2 + \frac{1}{\sigma} |\alpha q - p|^2 \leq r^2$$

ein vierdimensionales Ellipsoid im (x_1, x_2, y_1, y_2) -Raum mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt darstellt, dessen Volumen V leicht zu berechnen ist. Man findet

$$V = \begin{cases} \frac{r^4 \pi^2}{2D} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{2r^4 \pi^2}{D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für $V = 16$ enthält das Ellipsoid nach dem Minkowskischen Satz außer dem Nullpunkt noch (wenigstens) einen Gitterpunkt im Innern. Also gibt es ganze Zahlen p, q in $\Re(i\sqrt{D})$, die nicht beide verschwinden und die so beschaffen sind, daß

$$(8) \quad \sigma |q|^2 + \frac{1}{\sigma} |\alpha q - p|^2 < \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

ist. Nach (7) ist dann erst recht

$$(9) \quad |q| \cdot |\alpha q - p| < \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{2D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für hinreichend kleines σ muß nach (8) auch $|\alpha q - p|$ beliebig klein und folglich, da α nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ angehören soll, $|q|$ beliebig groß sein. Somit gibt es unendlich viele Paare p, q derart, daß

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{2D} \frac{1}{|q|^2} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{\pi} \sqrt{2D} \frac{1}{|q|^2} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Damit ist nicht nur gezeigt, daß es Zahlen γ gibt, die in (A) zulässig sind, sondern auch, daß für ihre untere Grenze $\psi(D)$ die rechte Hälfte der in Formel (3) behaupteten Ungleichung gilt.

§ 3.

Nachweis der Gleichung $\omega(D) = \psi(D)$.

Wir beweisen zuerst, daß es Zahlen γ gibt, die in (C) zulässig sind, und daß für ihre untere Grenze $\omega(D)$ die Ungleichung $\omega(D) \leq \psi(D)$ gilt. Dazu wird es genügen, bei beliebig kleinem positivem ε die Existenz von unendlich vielen Paaren ganzer Zahlen x, y des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ nachzuweisen, für die

$$(10) \quad 0 < |ax^2 + bxy + cy^2| < [\psi(D) + \varepsilon] \sqrt{|b^2 - 4ac|}$$

ist. Sei zunächst $a \neq 0$. Dann ist

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} y \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} y \right),$$

und die Zahl $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gehört wenigstens bei passender Wahl des Vorzeichens der Quadratwurzel nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ an, weil die quadratische Form höchstens *einen* Linearfaktor mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ haben soll. Nach der Bedeutung von $\psi(D)$ gibt es daher unendlich viele Paare x, y , für die

$$0 < \left| x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} y \right| < \frac{\psi(D) + \frac{1}{2}\varepsilon}{|y|}$$

ist; dabei können die Zahlen y nicht beschränkt sein, weil sonst auch die x beschränkt wären, so daß es nicht unendlich viele Paare sein könnten. Dann ist, wenn nur $|y|$ genügend groß ist, auch

$$0 < \left| x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} y \right| < \frac{\psi(D) + \frac{1}{2}\varepsilon}{|y|} + \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{|a|} |y|,$$

und durch Multiplikation mit der vorigen Ungleichung und mit $|a|$ folgt:

$$0 < |ax^2 + bxy + cy^2| < |a| \frac{\left[\psi(D) + \frac{1}{2}\varepsilon \right]^2}{|y|^2} + \left[\psi(D) + \frac{1}{2}\varepsilon \right] \sqrt{|b^2 - 4ac|}.$$

Da die Zahlen y hierbei nicht beschränkt sind, folgt für unendlich viele Paare x, y auch die zu beweisende Ungleichung (10).

Im bisher ausgeschlossenen Fall $a = 0$ ist, weil die quadratische Form höchstens *einen* Linearfaktor mit Koeffizienten aus $\Re(i\sqrt{D})$ haben darf, gewiß $c \neq 0$, so daß die vorige Betrachtung zum Ziel führt, wenn man x und y ihre Rollen tauschen läßt.

Nunmehr müssen wir noch zeigen, daß auch umgekehrt $\psi(D) \leq \omega(D)$ ist. Nach der Bedeutung von $\omega(D)$ gibt es, wenn α nicht dem Körper $\Re(i\sqrt{D})$ angehört, unendlich viele Paare von ganzen Zahlen p, q des Körpers $\Re(i\sqrt{D})$, für die

$$0 < |\alpha q^2 - pq + 0 \cdot p^2| < [\omega(D) + \varepsilon] \sqrt{|1 - 4\alpha \cdot 0|} = \omega(D) + \varepsilon$$

ist. Dann ist aber $q \neq 0$, und es ergibt sich weiter

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\omega(D) + \varepsilon}{|q|^3}.$$

Hiernach ist die Zahl $\omega(D) + \varepsilon$ in (A) zulässig und folglich ist $\psi(D) \leq \omega(D) + \varepsilon$. Da ε hierbei beliebig klein sein darf, so folgt: $\psi(D) \leq \omega(D)$; w. z. b. w.

§ 4.

Eine untere Schranke für $\psi(D)$.

Nunmehr sei D von 1 und 3 verschieden. Dann gehört die Zahl

$$(11) \quad \alpha = \frac{i\sqrt{D} \pm i^d \sqrt{d}}{2},$$

wo das Vorzeichen $\pm$ beliebig sein darf, nicht dem Körper $\Re(i\sqrt{D})$ an⁶⁾. Sie genügt aber der quadratischen Gleichung

$$(12) \quad \alpha^2 - i\sqrt{D}\alpha - \frac{D + (-1)^d d}{4} = 0,$$

⁶⁾ Außer für $D = 2$ gilt das und analog alles Weitere auch, wenn man einfach i statt i^d und demgemäß später -1 statt $(-1)^d$ schreibt.

deren Koeffizienten ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ sind. Setzt man, unter p, q zwei ganze Zahlen ($q \neq 0$) aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ verstehend,

$$\alpha = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2},$$

so folgt durch Quadrieren

$$\alpha^2 = \frac{p^2}{q^2} + 2 \frac{p}{q} \frac{\delta}{q^2} + \frac{\delta^2}{q^4} = \frac{p^2}{q^2} + 2 \alpha \frac{\delta}{q^2} - \frac{\delta^2}{q^4}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \alpha^2 - i\sqrt{D}\alpha - \frac{D + (-1)^d d}{4} \\ &= \frac{p^2}{q^2} + 2 \alpha \frac{\delta}{q^2} - \frac{\delta^2}{q^4} - i\sqrt{D} \left(\frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2} \right) - \frac{D + (-1)^d d}{4} \\ &= \frac{1}{q^4} \left[p^2 - i\sqrt{D} p q - \frac{D + (-1)^d d}{4} q^2 \right] - \frac{\delta^2}{q^4} + (2\alpha - i\sqrt{D}) \frac{\delta}{q^2} \\ &= \frac{1}{q^4} \left[p^2 - i\sqrt{D} p q - \frac{D + (-1)^d d}{4} q^2 \right] - \frac{\delta^2}{q^4} \pm i^d \sqrt{d} \frac{\delta}{q^2}. \end{aligned}$$

Hier ist aber die linke Seite nach (12) gleich 0 und die Größe in der eckigen Klammer ist eine ganze von 0 verschiedene Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, also absolut mindestens gleich 1. Daher ergibt sich nach Multiplikation mit q^2 :

$$\left| \frac{\delta^2}{q^2} \mp i^d \sqrt{d} \delta \right| \geq 1,$$

und umsomehr:

$$\frac{|\delta|^2}{|q|^2} + \sqrt{d} |\delta| \geq 1.$$

Ist nun $|\delta| \leq \gamma$, wo $\gamma < \frac{1}{\sqrt{d}}$, so ist erst recht

$$\frac{\gamma^2}{|q|^2} + \sqrt{d} \gamma \geq 1, \quad \text{also} \quad |q|^2 \leq \frac{\gamma^2}{1 - \sqrt{d} \gamma}.$$

Daher ist q beschränkt und die Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\gamma}{|q|^2}$$

wird somit nur durch endlich viele Paare p, q befriedigt. Damit ist die an Formel (B) geknüpfte Behauptung und folglich auch die linke Hälfte der Ungleichung (3) bewiesen; die rechte Hälfte ergab sich schon in § 2.

§ 5.

Ein Hilfssatz über Cassinische Kurven.

In den in § 1 erwähnten Arbeiten habe ich, um die scharfen Resultate in den Fällen $D = 1$ und $D = 3$ zu gewinnen, je einen Hilfssatz über Cassinische Kurven gebraucht. Ein analoger Hilfssatz, der im Fall $D = 2$

zum Ziel führen würde, existiert nachweislich nicht. Man kommt aber durch, wenn man gleichzeitig drei Cassinische Kurven mit verschiedenen Brennpunktpaaren benutzt. Zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 sollen *homolog* heißen, in Zeichen $z_1 \equiv z_2$, wenn ihre Differenz eine ganze Zahl des Körpers $\Re(i\sqrt{2})$ ist, also die Form $x + i\sqrt{2}y$ hat, wo x, y ganze rationale Zahlen sind. Mit dieser Terminologie beweisen wir den

Hilfssatz. Ist $|a| \leq \frac{1}{2}$, so gibt es zu jeder komplexen Zahl z_1 eine homologe Zahl z , für welche die Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{Min} \left(|z^2 - a|, 2 \left| \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right|, 2 \left| \left(z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right| \right) \\ \leq \text{Max} \left(\sqrt{\frac{17}{24}} + |a|^2, \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2} \right) \end{aligned}$$

gilt, und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in dem Fall

$$a = \frac{1}{2}, \quad z_1 \equiv \frac{i}{\sqrt{2}},$$

in welchem Gleichheit gilt⁷⁾.

Der Ausnahmefall erledigt sich leicht. Der Bereich

$$\text{Min} \left(\left| z^2 - \frac{1}{2} \right|, 2 \left| \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} \right|, 2 \left| \left(z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2} \right| \right) \leq 1$$

enthält nämlich augenscheinlich die sechs zueinander homologen Punkte

$$z = \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{i}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{i}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

auf dem Rand und keinen weiteren dazu homologen Punkt im Innern oder auf dem Rand. Nunmehr schließen wir den Ausnahmefall aus.

Zu jeder Zahl z_1 gibt es unendlich viele homologe Zahlen $z = x + iy$ (x, y reell), bei denen $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist. Da aber die Aussage des Hilfssatzes ungeändert bleibt, wenn man z_1, z durch $-z_1, -z$ ersetzt, genügt es, sich auf

$$(13) \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

zu beschränken. Den reellen Teil x kann man auf irgendein Intervall der Länge 1 beschränken, etwa auf das Intervall

$$(14) \quad 0 \leq x < 1$$

⁷⁾ In der komplexen z -Ebene stellen die Gleichungen

$$|z^2 - a| = C \quad \text{bzw.} \quad 2 \left| \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right| = C \quad \text{bzw.} \quad 2 \left| \left(z + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right| = C$$

Cassinische Kurven dar mit den Brennpunktpaaren $\pm \sqrt{a}$ bzw. $\frac{i}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{a}$ bzw. $-\frac{i}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{a}$.

oder auf das Intervall

$$(15) \quad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

Nun bilden wir die Ausdrücke

$$(16) \quad P = |z^3 - a|^2, \quad Q = |(z-1)^2 - a|^2, \quad R = 4 \left| \left(z - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - a \right|^2,$$

wobei wir je nach dem Wert von a die Zahl x im Intervall (14) oder (15) wählen werden, und zeigen, daß dann

$$(17) \quad \text{Min}(P, Q, R) < \text{Max}\left(\frac{17}{24} + |a|^2, \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2\right)$$

ist, womit der Hilfssatz bewiesen sein wird.

Die Ausdrücke $P, Q, \frac{1}{4}R$ sind, wenn man $a = \alpha + i\beta$ setzt (α, β reell), ausführlich geschrieben die folgenden:

$$(18) \quad P = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2\alpha(x^3 - y^3) - 4\beta xy + |a|^2,$$

$$(19) \quad Q = (x-1)^4 + 2(x-1)^2y^2 + y^4 - 2\alpha[(x-1)^3 - y^3]$$

$$- 4\beta(x-1)y + |a|^2,$$

$$(20) \quad \frac{1}{4}R = x^4 + 2x^2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 2\alpha\left[x^2 - \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$- 4\beta x\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + |a|^2.$$

Wenn $\alpha \leq \frac{1}{4}$ ist, wählen wir x im Intervall (14) und bilden die Linearkombination von P und Q :

$$(21) \quad (1-x)P + xQ = G;$$

dann genügt es zu beweisen, daß

$$G < \frac{17}{24} + |a|^2$$

ist. Die Ausrechnung von G ergibt:

$$G = u - 3u^3 + 2uy^2 + y^4 - 2\alpha(u - y^2) + |a|^2,$$

wobei $u = x(1-x)$ ist. Dieser Ausdruck erreicht in bezug auf u sein Maximum für $u = \frac{1+2y^2-2\alpha}{6}$ und durch Einsetzen kommt dann:

$$G \leq \frac{(1+2y^2-2\alpha)^2}{12} + y^4 + 2\alpha y^2 + |a|^2.$$

Das Maximum der rechten Seite in bezug auf y^2 kann nur an den Intervallgrenzen liegen, also wegen (13) bei $y^2 = 0$ oder bei $y^2 = \frac{1}{2}$. Daher ist

$$(22) \quad G \leq \text{Max} \left(\frac{(1-2\alpha)^2}{12} + |a|^2, \quad \frac{(2-2\alpha)^2}{12} + \frac{1}{4} + \alpha + |a|^2 \right)$$

$$= \text{Max} \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3} + |a|^2, \quad \frac{7}{12} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{3} + |a|^2 \right).$$

Nun ist nach der Voraussetzung des Hilfssatzes $|a| \leq \frac{1}{2}$, also auch $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$, so daß man weiter erhält:

$$(23) \quad G \leq \text{Max} \left(\frac{1}{12} - \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{12} + |a|^2, \frac{7}{12} + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{12} + |a|^2 \right).$$

Speziell für $\alpha \leq 0$, also $-\alpha = |\alpha| \leq \frac{1}{2}$ folgt hieraus:

$$G \leq \text{Max} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + |a|^2, \frac{7}{12} + 0 + \frac{1}{12} + |a|^2 \right) < \frac{17}{24} + |a|^2;$$

w. z. b. w.

Für $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ folgt dagegen aus (22):

$$G \leq \text{Max} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{48} + |a|^2, \frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{48} + |a|^2 \right) < \frac{17}{24} + |a|^2;$$

w. z. b. w.

Nun kommen wir zum Fall $\alpha > \frac{1}{4}$. Dabei wählen wir x im Intervall (15) und schließen den Fall, daß $x = 0$ und zugleich $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, zunächst aus. Bilden wir jetzt die Linearkombination von P und R :

$$(24) \quad \frac{(1 - \sqrt{2}y)P + \frac{\sqrt{2}}{4}yR}{(1 - \sqrt{2}y) + \frac{\sqrt{2}}{4}y} = H,$$

so genügt es zu zeigen, daß

$$H < \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2$$

ist. Die Ausrechnung des Zählers von H ergibt:

$$(25) \quad (1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}y)H = x^4 + 2x^2v + \frac{1}{2}v - 3v^2 - 2\alpha(x^2 - v) + |a|^2,$$

wobei $v = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right)$ ist, also wegen (13) gewiß $0 \leq v \leq \frac{1}{8}$. Das Maximum der rechten Seite von (25) in bezug auf x^2 kann nur an den Intervallgrenzen liegen, also wegen (15) bei $x^2 = 0$ oder $x^2 = \frac{1}{4}$. Wegen $v \leq \frac{1}{8}$ und $\alpha > \frac{1}{4}$ ist aber

$$\frac{1}{16} + \frac{2v}{4} - \frac{2\alpha}{4} < 0;$$

also liegt das fragliche Maximum nur bei $x^2 = 0$ und man erhält:

$$(26) \quad (1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}y)H \leq \frac{1}{2}v - 3v^2 + 2\alpha v + |a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur für $x = 0$. Nun ist $v = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right)$, also

$$1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}y = \frac{1}{4} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - y\right) \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{2}v = \frac{1+6v}{4},$$

und zwar Gleichheit nur für $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daher folgt aus (26) weiter

$$(27) \quad H \leq 4 \frac{\frac{1}{2}v - 3v^2 + 2\alpha v + |a|^2}{1+6v} \leq \frac{2v + 8|a|v + 4|a|^2}{1+6v},$$

und zwar beidemale Gleichheit nur für $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Da wir aber diesen Fall zunächst ausgeschlossen haben, ist

$$H < \frac{2v + 8|a|v + 4|a|^2}{1 + 6v}.$$

Die rechte Seite ist wegen $|a| \leq \frac{1}{2}$ eine monoton wachsende Funktion von v (für $|a| = \frac{1}{2}$ ist sie konstant); sie hat also ihr Maximum an der oberen Intervallgrenze $v = \frac{1}{8}$. Daher ist schließlich

$$H < \frac{\frac{1}{4} + |a| + 4|a|^2}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1 + 4|a| + 16|a|^2}{7};$$

w. z. b. w.

Nun ist noch der vorhin ausgeschlossene Fall $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu erledigen. In diesem ist

$$P = \frac{1}{4} + \alpha + |a|^2, \quad R = 4|a|^3.$$

Wegen $|a| \leq \frac{1}{2}$ ist aber

$$4|a|^2 - (\frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2) = -\frac{1}{7}(1 - 2|a|)(1 + 6|a|) \leq 0,$$

also auch

$$(28) \quad R = 4|a|^3 \leq \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2$$

und zwar Gleichheit nur, wenn $|a| = \frac{1}{2}$ ist. Dann ist aber

$$\frac{1}{4} + \alpha + |a|^2 - (\frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2) = \alpha - \frac{1}{2},$$

also

$$(29) \quad P = \frac{1}{4} + \alpha + |a|^2 = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2 + \alpha - \frac{1}{2} \\ \leq \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2,$$

und zwar Gleichheit nur, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$, also wenn $a = \frac{1}{2}$ ist. Das ist aber, da ja auch $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, der schon zu Beginn erledigte

Ausnahmefall, der jetzt ausgeschlossen ist. Daher gilt wenigstens in einer der beiden Ungleichungen (28), (29) das Kleinerzeichen und folglich ist

$$\text{Min}(R, P) < \frac{1}{7} + \frac{4}{7}|a| + \frac{16}{7}|a|^2,$$

womit nun alle Fälle erledigt sind.

§ 6.

Beweis von Satz 1.

Sei α eine Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{2})$ angehört. Sind dann p, q zwei ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{2})$, und zwar $q \neq 0$, so definieren wir eine zugehörige Zahl δ durch die Formel

$$(30) \quad \alpha - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}.$$

Nach § 2 gibt es unendlich viele Paare p, q , für die $|\delta| < 2$ ist⁸⁾, und weil α nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ angehört, ist $\delta \neq 0$. Dabei wollen wir p, q als relativ prim annehmen, was erlaubt ist, weil in $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ jedes Ideal ein Hauptideal und jede ganze Zahl absolut ≥ 1 ist. Wenn nur für endlich viele der Paare p, q die Ungleichung $|\delta|^2 \geq \frac{1}{2}$ gilt, so ist unendlich oft $|\delta| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und an Satz 1 ist nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen daher an, für unendlich viele Paare p, q sei

$$(31) \quad \frac{1}{2} \leq |\delta|^2 < 4;$$

wir nennen sie die *ausgezeichneten Paare*. Zu jedem ausgezeichneten Paar p, q kann man zwei ganze Zahlen p_0, q_0 in $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ so bestimmen, daß

$$(32) \quad p q_0 - q p_0 = 1$$

ist. Die Zahl q_0 ist durch (32) nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo q . Der Bruch q_0/q darf also durch jede homologe Zahl ersetzt werden; geeignete Wahl behalten wir uns vor. Unter allen Umständen ist aber das Paar p_0, q_0 wieder relativ prim und ebenso sind die beiden später zu benutzenden Paare

$$(33) \quad p_1 = i\sqrt{2}p_0 + p, \quad q_1 = i\sqrt{2}q_0 + q,$$

$$(34) \quad p_{-1} = i\sqrt{2}p_0 - p, \quad q_{-1} = i\sqrt{2}q_0 - q$$

relativ prim.

Wenn $|q|$ hinreichend groß (es genügt $|q| > \sqrt{2}$), so ist $q_0 \neq 0$ und auch $q_{\pm 1} \neq 0$. Setzt man dann

$$(35) \quad \alpha - \frac{p_0}{q_0} = \frac{\delta_0}{q_0^2}, \quad \alpha - \frac{p_{\pm 1}}{q_{\pm 1}} = \frac{\delta_{\pm 1}}{q_{\pm 1}^2},$$

so ist

$$\frac{\delta_0}{q_0^2} = \alpha - \frac{p_0}{q_0} = \frac{p}{q} - \frac{p_0}{q_0} + \frac{\delta}{q^2} = \frac{1}{q q_0} + \frac{\delta}{q^2},$$

also

$$(36) \quad \delta_0 = \delta \left(\frac{q_0}{q} \right)^2 + \frac{q_0}{q} = \delta \left[\left(\frac{q_0}{q} + \frac{1}{2\delta} \right)^2 - \frac{1}{4\delta^2} \right].$$

Ferner ist

$$\frac{\delta_{\pm 1}}{q_{\pm 1}^2} = \alpha - \frac{p_{\pm 1}}{q_{\pm 1}} = \frac{p}{q} - \frac{p_{\pm 1}}{q_{\pm 1}} + \frac{\delta}{q^2} = \frac{i\sqrt{2}}{q q_{\pm 1}} + \frac{\delta}{q^2},$$

⁸⁾ Sogar $|\delta| < \frac{4}{\pi}$; aber die bequemere Ungleichung $|\delta| < 2$ genügt hier.

*also

$$\delta_{\pm 1} = \delta \left(\frac{q_{\pm 1}}{q} \right)^2 + i \sqrt{2} \frac{q_{\pm 1}}{q} = \delta \left[\left(\frac{q_{\pm 1}}{q} + \frac{i \sqrt{2}}{2\delta} \right)^2 + \frac{2}{4\delta^2} \right],$$

und nach Einsetzen des Wertes für $q_{\pm 1}$

$$(37) \quad \delta_{\pm 1} = -2\delta \left[\left(\frac{q_0}{q} + \frac{1}{2\delta} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4\delta^2} \right].$$

Da nun $|\delta|^2 \geq \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{4|\delta|^2} \leq \frac{1}{2}$ ist, so folgt aus (36) und (37) nach dem Hilfssatz des § 5, wenn man q_0/q durch eine geeignete homologe Zahl ersetzt, was ja vorbehalten war:

$$(38) \quad \begin{aligned} \text{Min} (|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) &< |\delta|^2 \text{Max} \left(\frac{17}{24} + \frac{1}{16|\delta|^4}, \frac{1}{7} + \frac{1}{7|\delta|^2} + \frac{1}{7|\delta|^4} \right) \\ &= \text{Max} \left(\frac{17}{24} |\delta|^2 + \frac{1}{16|\delta|^2}, \frac{|\delta|^2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7|\delta|^2} \right), \end{aligned}$$

und hieraus wegen $|\delta|^2 \geq \frac{1}{2}$ auch

$$(39) \quad \text{Min} (|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) < \text{Max} \left(\frac{17}{24} |\delta|^2 + \frac{1}{8}, \frac{|\delta|^2}{7} + \frac{3}{7} \right) \leq |\delta|^2.$$

Der im Hilfssatz angegebene Ausnahmefall der Gleichheit kann in (38) nicht eintreten; denn er würde nur vorliegen für

$$\frac{1}{4\delta^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{q_0}{q} + \frac{1}{2\delta} = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2\delta} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{q_0}{q} = \frac{i \mp 1}{\sqrt{2}};$$

das ist aber nicht möglich, weil die Zahlen $\frac{i \mp 1}{\sqrt{2}}$ nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ angehören.

Wählt man zu jedem der unendlich vielen ausgezeichneten Paare p, q das Paar p_0, q_0 gemäß der Forderung (38), so daß von selbst auch (39) gilt, so sind unter den Paaren p_0, q_0 und ebenso unter den Paaren (33) und (34) wieder je unendlich viele verschiedene Paare⁹⁾. Setzt man nun

$$(40) \quad \lim_{|q| \rightarrow \infty} |\delta|^2 = \varrho,$$

⁹⁾ Allerdings ist es nicht ausgeschlossen, daß einmal zu zwei verschiedenen Paaren p, q dasselbe Paar p_0, q_0 oder dasselbe Paar (33) oder (34) gehört. Da aber die Brüche p/q wegen $|\delta| < 2$ mit wachsendem $|q|$ die nicht in $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ enthaltene Zahl α beliebig approximieren und da nach (32)

$$\begin{aligned} \left| \frac{p}{q} - \frac{p_0}{q_0} \right| &= \frac{1}{|qq_0|} \leq \frac{1}{|q|}, \\ \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{\pm 1}}{q_{\pm 1}} \right| &= \frac{\sqrt{2}}{|qq_{\pm 1}|} \leq \frac{\sqrt{2}}{|q|} \end{aligned}$$

wobei sich die Limesbildung auf die ausgezeichneten Paare p, q bezieht, so ist $\varrho \leq 4$, und man kann nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε unendlich viele ausgezeichnete Paare p, q so auswählen, daß

$$(41) \quad \frac{1}{2} \leq |\delta|^2 < \text{Min} (4, \varrho + \varepsilon)$$

ist. Nach (39) ist dann auch

$$(42) \quad \text{Min} (|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) < \text{Min} (4, \varrho + \varepsilon).$$

Wenn dabei nur für endlich viele Paare p, q die Ungleichung

$$(43) \quad \text{Min} (|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) \geq \frac{1}{2}$$

gilt, so ist an Satz 1 nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen also an, daß (43) für unendlich viele Paare p, q gilt; zusammen mit (42) besagt das dann, daß dasjenige unter den drei Paaren $p, q, (\nu = 0, \pm 1)$, welches das minimale $|\delta_\nu|^2$ liefert, *ausgezeichnet* ist. Wegen (40) ist dann aber

$$\text{Min} (|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) > \varrho - \varepsilon,$$

wenn nur $|q|$ und folglich auch $|q_0|$ und $|q_{\pm 1}|$ genügend groß. Aus (39) folgt daher

$$\varrho - \varepsilon < \text{Max} \left(\frac{17}{24} (\varrho + \varepsilon) + \frac{1}{8}, \frac{\varrho + \varepsilon}{7} + \frac{3}{7} \right),$$

und hieraus resultiert, weil ε beliebig klein sein darf, die Gültigkeit von mindestens einer der beiden Ungleichungen

$$\varrho \leq \frac{17}{24} \varrho + \frac{1}{8}, \quad \varrho \leq \frac{1}{7} \varrho + \frac{3}{7}.$$

Daher ist $\varrho \leq \frac{1}{2}$ und folglich gibt es jedenfalls unendlich viele ausgezeichnete Paare p, q , für welche $|\delta|^2 < \frac{9}{17}$ ist; andererseits ist natürlich, weil die Paare ausgezeichnet sind, auch $|\delta|^2 \geq \frac{1}{2}$. Aus (38) folgt dann, weil die Ausdrücke

$$\frac{17}{24} |\delta|^2 + \frac{1}{16 |\delta|^2}, \quad \frac{|\delta|^2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7 |\delta|^2}$$

ist, so kommen die Brüche

$$\frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_{-1}}{q_{-1}}$$

ebenfalls der Zahl α beliebig nahe; es sind also jeweils unendlich viele verschiedene Brüche. Zugleich sieht man, daß mit q auch die zugehörigen Zahlen q_0, q_1, q_{-1} absolut beliebig groß werden, weil die obigen Brüche der Zahl α beliebig nahe kommen.

als Funktionen von $|\delta|^2$ ihr Maximum nicht im Innern eines Intervalles erreichen können,

$$\text{Min}(|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2)$$

$$< \text{Max}\left(\frac{17}{24 \cdot 2} + \frac{2}{16}, \frac{17 \cdot 9}{24 \cdot 17} + \frac{17}{16 \cdot 9}, \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7}, \frac{9}{7 \cdot 17} + \frac{1}{7} + \frac{17}{7 \cdot 9}\right) = \frac{1}{2}.$$

Somit gibt es auch unendlich viele relativ prime Paare p, q , für die $|\delta|^2 < \frac{1}{2}$ ist. Damit ist der erste Teil von Satz 1 bewiesen. Der zweite Teil ist lediglich die an die Ungleichung (B) Seite 750 geknüpfte Behauptung im Fall $D = 2$, ist also schon in § 4 bewiesen.

§ 7.

Beweis von Satz 2.

Bei der in Satz 2 auftretenden quadratischen Form wollen wir

$$(44) \quad b^2 - 4ac = 1$$

annehmen, was offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt ist. Nach den Ergebnissen des § 2 und § 3 gibt es dann unendlich viele Paare ganzer Zahlen x, y des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ derart, daß

$$0 < |ax^2 + bxy + cy^2| < 2$$

ist. Offenbar gibt es dabei auch unendlich viele Paare x, y , die relativ prim sind und bei denen $y \neq 0$ ist; nur diese wollen wir betrachten. Wenn nur für endlich viele dieser Paare die Ungleichung

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gilt, so trifft für die gegebene quadratische Form gewiß die Behauptung von Satz 2 zu. Wir nehmen daher an, für unendlich viele relativ prime Paare x, y sei

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |ax^2 + bxy + cy^2| < 2, \quad y \neq 0.$$

Diese Paare x, y nennen wir *ausgezeichnet*. Zu jedem ausgezeichneten Paar x, y läßt sich ein Paar ganzer Zahlen x_0, y_0 aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{2})$ so bestimmen, daß

$$(46) \quad yx_0 - xy_0 = 1$$

ist. Dabei ist y_0 nur modulo y bestimmt, so daß der Bruch $y_0 y$ durch jede homologe Zahl ersetzt werden darf; eine geeignete Wahl behalten wir uns vor. Jedenfalls sind aber x_0, y_0 wieder relativ prim.

Wir setzen nun, wenn x, y irgendein ausgezeichnetes Paar ist,

$$(47) \quad ax^2 + bxy + cy^2 = \delta,$$

$$(48) \quad ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 = \delta_0.$$

Dann ist nach (45)

$$(49) \quad \frac{1}{2} \leq |\delta|^2 < 4$$

und außerdem ist

$$\delta_0 - \delta \left(\frac{y_0}{y} \right)^2 = a \frac{y^2 x_0^2 - x^2 y_0^2}{y^2} + b \frac{y x_0 y_0 - x y_0^2}{y},$$

also mit Rücksicht auf (46)

$$\begin{aligned} \delta_0 - \delta \left(\frac{y_0}{y} \right)^2 &= a \frac{y x_0 + x y_0}{y^2} + b \frac{y_0}{y} = a \frac{2 x y_0 + 1}{y^2} + b \frac{y_0}{y} \\ &= \frac{y_0}{y} \cdot \frac{2 a x + b y}{y} + \frac{a}{y^2}. \end{aligned}$$

Oder schließlich, da nach (49) ja $\delta \neq 0$ ist,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \delta \left(\frac{y_0}{y} \right)^2 + \frac{y_0}{y} \cdot \frac{2 a x + b y}{y} + \frac{a}{y^2} \\ &= \delta \left[\left(\frac{y_0}{y} + \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \right)^2 + \frac{a}{\delta y^2} - \frac{(2 a x + b y)^2}{4 \delta^2 y^2} \right]. \end{aligned}$$

Nun ist aber wegen (47) und (44)

$$(50) \quad (2 a x + b y)^2 = 4 a \delta + (b^2 - 4 a c) y^2 = 4 a \delta + y^2,$$

so daß die vorige Formel übergeht in

$$(51) \quad \delta_0 = \delta \left[\left(\frac{y_0}{y} + \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \right)^2 - \frac{1}{4 \delta^2} \right].$$

Weiter sind nun auch die beiden Paare

$$(52) \quad x_1 = i \sqrt{2} x_0 + x, \quad y_1 = i \sqrt{2} y_0 + y,$$

$$(53) \quad x_{-1} = i \sqrt{2} x_0 - x, \quad y_{-1} = i \sqrt{2} y_0 - y$$

relativ prim, und es ist

$$(54) \quad y x_{+1} - x y_{+1} = i \sqrt{2}.$$

Setzt man daher

$$(55) \quad a x_{+1}^2 + b x_{+1} y_{+1} + c y_{+1}^2 = \delta_{+1},$$

so ist zunächst

$$\delta_{+1} - \delta \left(\frac{y_{+1}}{y} \right)^2 = a \frac{y^2 x_{+1}^2 - x^2 y_{+1}^2}{y^2} + b \frac{y x_{+1} y_{+1} - x y_{+1}^2}{y},$$

also mit Rücksicht auf (54)

$$\begin{aligned}\delta_{\pm 1} - \delta \left(\frac{y_{\pm 1}}{y} \right)^2 &= a \frac{y x_{\pm 1} + x y_{\pm 1}}{y^2} i \sqrt{2} + b \frac{y_{\pm 1}}{y} i \sqrt{2} \\ &= a \frac{2 x y_{\pm 1} + i \sqrt{2}}{y^2} i \sqrt{2} + b \frac{y_{\pm 1}}{y} i \sqrt{2} \\ &= i \sqrt{2} \cdot \frac{y_{\pm 1}}{y} \cdot \frac{2 a x + b y}{y} - \frac{2 a}{y^2}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, da wieder $\delta \neq 0$ ist,

$$\begin{aligned}\delta_{\pm 1} &= \delta \left(\frac{y_{\pm 1}}{y} \right)^2 + i \sqrt{2} \cdot \frac{y_{\pm 1}}{y} \cdot \frac{2 a x + b y}{y} - \frac{2 a}{y^2} \\ &= \delta \left[\left(\frac{y_{\pm 1}}{y} + i \sqrt{2} \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \right)^2 - \frac{2 a}{\delta y^2} + 2 \frac{(2 a x + b y)^2}{4 \delta^2 y^2} \right],\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf (50)

$$\delta_{\pm 1} = \delta \left[\left(\frac{y_{\pm 1}}{y} + i \sqrt{2} \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \right)^2 + \frac{2}{4 \delta^2} \right].$$

Setzt man für $y_{\pm 1}$ den Wert aus (52) und (53) ein, so kommt schließlich:

$$(56) \quad \delta_{\pm 1} = -2 \delta \left[\left(\frac{y_0}{y} + \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{4 \delta^2} \right].$$

Aus (51) und (56) folgt, weil $|\delta|^2 \geq \frac{1}{2}$, also $\frac{1}{4|\delta|^2} \leq \frac{1}{2}$ ist, nach dem Hilfssatz des § 5, wenn man y_0/y durch eine geeignete homologe Zahl ersetzt, was ja vorbehalten war:

$$(57) \quad \begin{aligned}\text{Min}(|\delta_0|^2, |\delta_1|^2, |\delta_{-1}|^2) \\ \leq |\delta|^2 \text{Max} \left(\frac{17}{24} + \frac{1}{16|\delta|^4}, \frac{1}{7} + \frac{1}{7|\delta|^2} + \frac{1}{7|\delta|^4} \right),\end{aligned}$$

und zwar Gleichheit nur für

$$(58) \quad \frac{1}{4 \delta^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{y_0}{y} + \frac{2 a x + b y}{2 \delta y} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Aus (57) folgt nun genau wie in § 6 im Anschluß an (38), daß es unendlich viele relativ prime Paare x, y gibt, für welche $|\delta|^2 \leq \frac{1}{2}$ ist, und zwar Gleichheit nur in dem durch (58) gekennzeichneten Ausnahmefall. Für unendlich viele dieser Paare ist auch $\delta \neq 0$, weil es ja augenscheinlich höchstens ein relativ primes Paar x, y geben kann, für das die quadratische Form verschwindet. Der Satz 2 wird daher bewiesen sein, wenn wir noch zeigen können, daß die Formeln (58) genau auf den in Satz 2 angegebenen Ausnahmefall hinauslaufen.

Nun folgt aus (50) und der zweiten Bedingung (58)

$$4 a \delta + y^2 = (2 a x + b y)^2 = 4 \delta^2 y^2 \left(\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{y_0}{y} + g \right)^2 = -2 \delta^2 (y + i \sqrt{2} h)^2,$$

wo g und folglich auch h eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$ ist. Hieraus ergibt sich, wenn man für δ den aus der ersten Formel (58) hervorgehenden Wert $\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ einsetzt und die Gleichung dann nach a auflöst:

$$a = \pm \frac{-y^2 - (y + i\sqrt{2}h)^2}{2\sqrt{2}} = \mp \frac{y^2 + i\sqrt{2}yh - h^2}{\sqrt{2}}.$$

Daher hat der Koeffizient a die Gestalt

$$(59) \quad a = \frac{A}{\sqrt{2}},$$

wo A eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$ ist. Indem man x und y ihre Rollen tauschen läßt, erhält man analog

$$(60) \quad c = \frac{C}{\sqrt{2}},$$

wo auch C eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$ ist. Aus (58) ergibt sich alsdann für b die Gestalt

$$(61) \quad b = \frac{B}{\sqrt{2}},$$

wo B eine Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$ ist; wegen

$$B^2 - 4AC = 2(b^2 - 4ac) = 2$$

ist B sogar eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$. Die quadratische Form ist daher die folgende:

$$\frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2}{\sqrt{2}}.$$

Da aber die Zahl $\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ nach (47) durch sie darstellbar ist, so ist sie äquivalent¹⁰⁾ mit

$$(62) \quad \pm \frac{x^2 + B_1xy + C_1y^2}{\sqrt{2}},$$

wo dann B_1, C_1 wieder ganze Zahlen aus $\Re(i\sqrt{2})$ sind und wo

$$(63) \quad B_1^2 - 4C_1 = 2$$

ist. Daher ist B_1 durch $i\sqrt{2}$ teilbar, hat also die Gestalt

$$B_1 = i\sqrt{2}n,$$

wo n eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$. Aus (63) folgt dann

$$4C_1 = -2n^2 - 2.$$

¹⁰⁾ D. h. durch eine lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten aus $\Re(i\sqrt{2})$ und mit der Determinante 1 überführbar.

Daher muß n relativ prim zu 2 sein, also die Gestalt

$$n = 1 + i\sqrt{2}m$$

haben, wo auch m eine ganze Zahl aus $\Re(i\sqrt{2})$ ist. Somit ist

$$B_1 = i\sqrt{2}(1 + i\sqrt{2}m),$$

$$C_1 = \frac{-(1 + i\sqrt{2}m)^2 - 1}{2} = -1 - i\sqrt{2}m + m^2.$$

Die quadratische Form (62) ist daher die folgende:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{x^2 + i\sqrt{2}(1 + i\sqrt{2}m)xy + (-1 - i\sqrt{2}m + m^2)y^2}{\sqrt{2}} \\ &= \pm \frac{(x - my)^2 + i\sqrt{2}(x - my)y - y^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Sie erweist sich durch die Transformation $x \rightarrow x + my$, $y \rightarrow y$ als äquivalent mit

$$\pm \frac{x^2 + i\sqrt{2}xy - y^2}{\sqrt{2}}.$$

Da diese Form offenbar keinen Linearfaktor mit Koeffizienten aus $\Re(i\sqrt{2})$ hat und für kein von 0,0 verschiedenes Paar x, y einen Wert annehmen kann, der absolut kleiner als $1/\sqrt{2}$ ist, so ist damit Satz 2 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 16. Mai 1933.)

Bemerkung zu der Abhandlung: Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze.

(Diese Zeitschrift 37 (1933), S. 61—76.)

Von

L. Berwald in Prag.

Herr St. Lipka hat mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß sich von Hilfssatz 5 meiner Arbeit der besondere Fall $r = 0$, auf dem allein mein Beweis des dortigen Satzes 1 beruht, schon in seiner Abhandlung: Eine Verallgemeinerung des Rouchéschen Satzes (Journ. f. d. reine u. angew. Math. 160 (1929), S. 143—150) auf S. 143 findet.

Bemerkung zu der Arbeit: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen.

(Diese Zeitschrift 37 (1933), S. 623—634.)

Von

J. Schauder in Lemberg.

Wie in einer gemeinsamen Arbeit von Herrn J. Leray und von mir gezeigt wird, kann mein in der Einleitung ausgesprochener Satz *wesentlich* verallgemeinert werden. Man kann nämlich alle Eindeutigkeitsvoraussetzungen fallen lassen, und dennoch bleibt die sich auf Gleichung (3) beziehende Behauptung von der *Existenz* der Lösung bestehen. Die Überlegungen der erwähnten Arbeit sind aber für den Beweis des erweiterten Satzes *notwendig*. Ähnliches gilt für allgemeine elliptische Differentialgleichungen.

